内容提要

本书是作者在莫斯科大学力学 - 数学系讲授多遍数学分析的基础上写成的. 本书自 1981 年第 1 版出版以来, 至今已经修订为第 4 版. 在内容方面, 作者力图使与其平行的以及后继的分析、代数和几何方面的现代数学课程之间联系更加紧密, 把重点移到一般数学中最有本质意义的那些概念和方法上, 并改进语言的叙述, 使之与现代数学科学文献的语言适当接近; 另一方面, 在保持数学一般理论叙述严谨性的同时, 对反映其自然科学源泉和应用的要求也有充分体现.

全书共二卷, 第二卷的内容包括: 连续映射的一般理论、赋范空间中的微分学、重积分、$\mathbb{R}^n$ 中的曲面和微分形式、曲线积分和曲面积分、向量分析与场论、流形上微分形式的积分法、级数和含参变量函数族的一致收敛性及基本分析运算、含参变量积分、傅里叶级数与傅里叶变换、渐近展开等. 与常见的分析教科书相比, 本卷的内容相当新颖, 系统地引进了现代数学 (包括泛函分析、拓扑学和现代微分几何等) 的基本概念、思想和方法, 有关应用的内容也更加贴近现代自然科学.

本书可供综合大学和师范大学数学、物理、力学及相关专业的教师和学生参考使用, 工科大学应用数学系也可当作教材或主要参考书.

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订，本系列中所列入的教材，以莫斯科大学的教材为主，也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材，也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版，但经多次修订重版，面目已有较大变化，至今仍广泛采用、深受欢迎，反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力，对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版，将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来，对推动我国数学课程设置和教学内容的改革，对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才，可望发挥积极的作用，并起着深远的影响，无疑值得庆贺，特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

再版序言

在第四版改正了已经发现的印刷错误.

B. 卓里奇
莫斯科, 2002 年

第三版与第二版的区别只是一些局部的修改 (只有一处的证明作了修正), 还补充了一些我认为有益的习题.

B. 卓里奇
莫斯科, 2001 年

本书第二版与第一版的区别, 除改正了已经发现的第一版的印刷错误外, 主要特点如下: 某些问题(例如, 涉及到级数和傅里叶变换的问题) 重写了; 有些重要定理(例如, 一般的有限增量定理) 的证明变得更加简洁明晰; 增加了一些新的应用例子和新的内容丰富的练习, 它们与相应章节的理论有关, 有时显著地延伸了这些理论的内容; 书末给出了考试大纲以及口试提纲和参考题; 参考文献索引也扩充了.

关于本书第二卷的取材和特点, 在第一版序言中有进一步的说明.

B. 卓里奇
莫斯科, 1998 年

第一版序言

在第一卷的序言中, 对全书的特点已经作了足够详细的介绍, 因此, 我在这里只对第二卷的内容作一些说明.

作为这一卷的基本内容一方面有重积分, 曲线积分和曲面积分, 直到一般的斯托克斯公式及其应用例子; 另一方面又有级数和含参变量积分的全部材料, 其中包括傅里叶级数, 傅里叶变换和渐近展开的知识.

因此, 这一卷基本上符合综合大学数学系二年级的教学大纲.

为了不致使上述两大题材的前后顺序生硬地按学期固定下来, 我实际上是把它们独立叙述的.

第九章和第十章, 即这本书开头的两章, 实质上用一般形式简要地重写了第一卷中关于连续函数和可微函数的几乎全部最重要的内容. 它们都标以星号 *, 并且是作为第一卷的补充写的. 但是, 其中的许多概念已经是当今向数学系学生叙述分析时必须提到的. 在这两章, 叙述了形式化抽象理论之后常给出大量例子和启发性注释, 在第一卷中, 它们是摆在形式化抽象理论叙述之前的. 如果读者有足够的训练, 在读这两章时能跳过这些例子和启发性注释, 那么, 第二卷在形式上就几乎与第一卷无关.

这本书中关于多变量函数积分学的主要的新内容是从第十一章开始的. 其实, 在读过本教程第一卷之后可以从这一章开始读第二卷, 并不影响对内容的理解.

在叙述曲线和曲面积分理论时, 讲述并使用了微分形式的语言. 首先, 基于初等的材料引进全部基本几何概念和分析结构, 然后, 由它们构成通往一般斯托克斯公式的抽象定义阶梯.

第十五章是流形上微分形式积分法的一个综合性叙述. 我认为它是对第十一至

十四章中, 就具体对象叙述和阐明的那些必须学习的材料, 所作的非常合适、非常系统的补充.

在有关级数和含参变量积分部分, 除给出传统材料外, 还给出 (第十九章) 了渐近级数和积分的渐近式的初等理论, 由于它们都是有效的分析工具, 这样做无疑是非常有益的.

为了理解的方便, 补充材料或第一次阅读可以跳过去的部分, 都用星号标了出来.

本书各章和插图是继已经出版的第一卷 (卓里奇: 数学分析, 第一卷, 莫斯科, 科学出版社, 1981 年) 编号的.

关于参考资料, 这里只给出那些在第一卷中没有提到的学术文献.

为了读者的方便和简化书写, 同过去一样, 证明的开始和结尾分别以记号 ◀ 和 ▶ 表示. 只要方便, 定义的引进都使用了据定义相等的专门符号 := 或 =:, 其中双点放在被定义的对象一边.

这本书继续保持了第一卷的风格, 无论对数学结构本身的简洁性和逻辑的严密性, 还是对如何展示理论在自然科学中的各种应用, 都给予了很大重视.

B. A. 卓里奇

莫斯科, 1982 年

目　　录

*第九章　连续映射 (一般理论)

我们对数值函数和形如 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 的映射已经建立的那些连续映射的性质, 在这一章中将以统一的观点加以推广和叙述. 同时将引进一系列简单的、但数学中广泛使用的重要概念.

§1　度 量 空 间

1. 定义和例子

定义 1　称集合 X 上装备了*度量*或*度量空间的结构*, 或称 X 是*度量空间*, 如果指定了函数

$$d: X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

且满足条件:

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (对称性),

c) $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (三角不等式), 其中 x_1, x_2, x_3 是 X 中的任意元素.

这时, 称函数 (1) 为 X 中的*度量*或*距离*.

因此, *度量空间*是由集合 X 和在 X 上给定的度量组成的序对 $(X; d)$.

按照几何术语, 经常把集合 X 的元素称为*点*.

我们看到, 在三角不等式 c) 中如果假设 $x_3 = x_1$, 那么考虑到度量公理 a) 和 b), 便得到

$$0 \leqslant d(x_1, x_2),$$

也就是说, 满足公理 a),b),c) 的度量是非负的.

我们来看几个例子.

例 1 实数集 $\mathbb{R}$ 成为度量空间, 如果对于数 x_1, x_2 规定 $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$.

例 2 在 $\mathbb{R}$ 上还可以引进许多其他的度量. 例如, 平凡度量, 在这种度量下任何不同两点间的距离都规定等于 1.

$\mathbb{R}$ 上的下列度量包含丰富的内容. 假设 $x \longmapsto f(x)$ 是对 $x \geqslant 0$ 定义的非负函数, 而且仅当 $x = 0$ 时它等于 0. 如果这个函数严格上凸, 那么对于 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 规定

$$d(x_1, x_2) = f(|x_1 - x_2|), \tag{2}$$

便得到 $\mathbb{R}$ 上的度量.

这里, 公理 a),b) 显然满足, 而三角不等式可以从下列不难验证的事实推出: f 严格单调, 并且当 $0 < a < b$ 时满足不等式

$$f(a+b) - f(b) < f(a) - f(0) = f(a).$$

特别地, 可以规定

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|}$$

或

$$d(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}.$$

在后一种情况下, 任意两个不同点之间的距离是小于 1 的正数.

例 3 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 点 $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^n), x_2 = (x_2^1, x_2^2, \cdots, x_2^n)$ 间除了通常的距离

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^2} \tag{3}$$

外, 还可以引进距离

$$d_p(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^p\right)^{1/p} \tag{4}$$

其中 $p \geqslant 1$. 由闵可夫斯基不等式 (见第 5 章 §4 第 2 段) 可以推知函数 (4) 满足三角不等式.

例 4 如果在印制的文件中遇到有印错某些字母的词, 假如错的不多, 那么纠正错误以恢复词的原意不会有特别的困难. 但是, 纠正错误和恢复词意的操作并不总是唯一确定的, 因此, 在其他条件相同的情况下, 必须优先采用那种修改量较少的译解. 根据这个道理, 在编码理论中, 在由 0 和 1 组成的长为 n 的所有序列的集合上采用 $p = 1$ 时的度量 (4).

在几何上, 这些序列所组成的集合可理解为 $\mathbb{R}^n$ 中单位立方体

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \leqslant x^i \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

的顶点所组成的集合. 两个顶点间的距离是从两顶点之一的坐标得到另一个顶点的坐标所必须的 0, 1 的转换数. 每个这样的转换是沿着立方体的某一棱进行的. 因此, 所研究的距离是立方体的顶点间沿着立方体棱的最短路径.

例 5 在比较两组 n 次同类测量的结果时, 最常用的是 $p = 2$ 时的度量 (4). 在这个度量下, 两点间的距离通常称为它们的*二次根方差*.

例 6 在 (4) 中如果对 $p \to +\infty$ 取极限, 那么容易得到 $\mathbb{R}^n$ 中的下列度量:

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_1^i - x_2^i|. \tag{5}$$

例 7 $C[a,b]$ 是闭区间上连续函数组成的集合, 它做成度量空间, 如果对其中的函数 f, g, 规定

$$d(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|. \tag{6}$$

显然, 度量公理 a),b) 是满足的, 而三角不等式从以下事实推出;

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leqslant d(f, g) + d(g, h), \end{aligned}$$

即

$$d(f, h) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - h(x)| \leqslant d(f, g) + d(g, h).$$

度量 (6) 称为 $C[a,b]$ 中的*一致度量*或*切比雪夫度量*, 当我们希望用别的函数, 譬如多项式, 代替给定的函数, 并能借助它以所需精度计算原来函数在每一点 $x \in [a, b]$ 的值时, 量 $d(f, g)$ 恰好刻画了这个近似计算的精确度.

$C[a,b]$ 中的度量 (6) 与 $\mathbb{R}^n$ 中的度量 (5) 是很相似的.

例 8 在 $C[a,b]$ 中可以像度量 (4) 那样对 $p \geqslant 1$ 引进度量

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f - g|^p(x) dx \right)^{1/p}. \tag{7}$$

当 $p \geqslant 1$ 时, 从积分的闵可夫斯基不等式推出, (7) 的确是度量. 而积分的闵可夫斯基不等式可从对积分和写出的闵可夫斯基不等式取极限得到.

特别地, 度量 (7) 的重要的特殊情形是: $p = 1$ 时叫积分度量; $p = 2$ 时叫均方度量; $p = +\infty$ 时叫一致度量.

装备了度量 (7) 的空间 $C[a,b]$ 经常用符号 $C_p[a,b]$ 表示. 可以验证, $C_\infty[a,b]$ 是装备了度量 (6) 的空间 $C[a,b]$.

例 9 也可以把度量 (7) 用到区间 $[a,b]$ 上黎曼可积的函数集 $\mathfrak{R}[a,b]$ 上. 但是, 即使两个函数不恒等, 它们之差的模的积分也可以变为零, 因此, 公理 a) 将不满足. 然而我们知道, 非负函数 $\varphi \in \mathfrak{R}[a,b]$ 的积分等于零的充要条件是 $\varphi(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立. •

这样一来, 如果把集合 $\mathfrak{R}[a,b]$ 分成等价函数类, $\mathfrak{R}[a,b]$ 中的两个函数认为是等价的, 如果它们至多在一个零测度集上不相等. 那么, 在那些等价类组成的集合 $\widetilde{\mathfrak{R}}[a,b]$ 上, 关系式 (7) 确实给出了度量. 装备了这个度量的集合 $\widetilde{\mathfrak{R}}[a,b]$ 用 $\widetilde{\mathfrak{R}}_p[a,b]$ 表示, 有时也简单地记作 $\widetilde{\mathfrak{R}}_p[a,b]$.

例 10 在定义于 $[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上有 k 阶连续导数的函数集 $C^{(k)}[a,b]$ 中可以定义下列度量:

$$d(f,g)=\max\{M_0,\cdots,M_k\}, \tag{8}$$

其中

$$M_i=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|,\quad i=0,1,\cdots,k.$$

利用 (6) 是度量, 容易验证 (8) 是度量.

例如, 假设 f 作为时间的函数是动点的坐标. 如果对点在时间间隔 $[a,b]$ 内所能到达的区域加以限制, 且不准它超过确定的速度, 此外, 还希望有一定的舒适性, 也就是加速度不能超过一个确定的水准, 那么对于函数 $f\in C^{(2)}[a,b]$, 自然就要考虑数组

$$\{\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|,\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|\},$$

而且, 当量 (8) 很小时, 就认为运动 f、g 就这些特征而言是相近的.

所研究的例子表明, 同一个集合可以用不同的方法度量化. 至于装备何种度量, 通常是由问题本身决定的. 而现在我们关心的是一切度量空间共同具有的最一般的性质.

2. 度量空间中的开集和闭集

设 $(X;d)$ 是度量空间. 像第 7 章 §1 中对 $X=\mathbb{R}^n$ 所做的那样, 在一般情形下, 也可以引进以给定点为中心的球、开集、闭集、点的邻域、集合的极限点等概念.

让我们回忆这些在今后起重要作用的概念.

定义 2 设 $\delta>0, a\in X$, 称集合

$$B(a;\delta)=\{x\in X|d(a,x)<\delta\}$$

为以 $a\in X$ 为中心 δ 为半径的球, 或点 a 的 δ- 邻域.

在一般度量空间的情况, 给它这样一个名称是合适的, 但不应把它等同于我们在 $\mathbb{R}^3$ 中习惯了的传统的几何形象.

例 11 $C[a,b]$ 中, 以在 $[a,b]$ 上恒等于零的函数为中心的单位球, 由在 $[a,b]$ 上连续且在 $[a,b]$ 上的模小于 1 的那些函数组成.

例 12 设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形,X 中两点间的距离, 由该两点在 $\mathbb{R}^2$ 中的距离来定义. 那么 X 是度量空间, 同时, 具有这种度量的正方形 X 本身可看作以自己中心为中心且有任意半径 $\rho \geqslant \sqrt{2}/2$ 的球.

显然, 如此这般地构造形状离奇的球是可能的, 因此, 对球这个术语不应过于从字面上去理解.

定义 3 集合 $G \subset X$ 称为*度量空间* $(X;d)$ *的开集*, 如果对于任意点 $x \in G$, 都有球 $B(x;\delta)$, 使得 $B(x;\delta) \subset G$.

显然, 从这个定义推出 X 本身是 $(X;d)$ 中的开集; 空集 $\varnothing$ 也是开集. 利用 $\mathbb{R}^n$ 中的那些论证, 可以证明球 $B(a;r)$ 或者它的外部 $\{x \in X | d(a,x) > r\}$ 是开集. (见第 7 章 §1 的例 3, 例 4.)

定义 4 集合 $F \subset X$ 称为 $(X;d)$ *的闭集*, 如果它的余集 $X \setminus F$ 是 $(X;d)$ 的开集.

特别地, 由此得出*闭球*

$$\widetilde{B}(a;r) = \{x \in X | d(a,x) \leqslant r\}$$

是度量空间 $(X;d)$ 的闭集.

对于度量空间 $(X;d)$ 的开集和闭集成立

命题 1 *a) X 中由开集组成的任意开集族 $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ 的集合之并集 $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ 是 X 中的开集.*

b) X 中有限个开集之交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ 是 X 中的开集.

a′) X 中由闭集组成的闭集族 $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ 的集合之交集 $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ 是 X 中的闭集.

b′) X 中有限个闭集之并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ 是 X 中的闭集.

命题 1 的证明可以逐字逐句地重复 $\mathbb{R}^n$ 中对于开集和闭集的相应命题的证明 (见第 7 章 §1 命题 1), 我们把它略去.

定义 5 称 X 中包含点 $x \in X$ 的开集为这个点在 X 中的*邻域*.

定义 6 称点 $x \in X$ 是集合 $E \subset X$ 的

内点, 如果点 x 连同它的某个邻域都含在 E 中;

外点, 如果点 x 是 E 在 X 中的余集的内点;

边界点, 如果点 x 既不是 E 的内点, 也不是 E 的外点 (即在点 x 的任一邻域中既有属于 E 的点, 也有不属于 E 的点).

例 13 球 $B(a;r)$ 的所有点均是它的内点, 而集合

$$C_X\widetilde{B}(a;r) = X \setminus \widetilde{B}(a;r)$$

由球 $B(a;r)$ 的外点组成.

对 $\mathbb{R}^n$ 赋以标准度量 d 时, $\mathbb{R}^n$ 中的球面

$$S(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) = r > 0\}$$

是球 $B(a;r)$ 的边界点的集合①.

定义 7 点 $a \in X$ 称为集合 $E \subset X$ 的**极限点**, 如果对于点 a 的任意邻域 $O(a)$, 集合 $E \cap O(a)$ 是无限集.

定义 8 称集合 E 和它在 X 中所有极限点组成的集合之并集为 E 在 X 中的**闭包**.

像以前那样, 集合 $E \subset X$ 的闭包将用 $\overline{E}$ 表示.

命题 2 *集合 $F \subset X$ 是 X 中的闭集, 当且仅当 F 包含 F 的所有极限点.* 即

$$(F \text{ 是 } X \text{ 中的闭集}) \Leftrightarrow (\text{在 } X \text{ 中有 } F = \overline{F}).$$

我们略去证明, 因为只要重复第 7 章 §1 中 $X = \mathbb{R}^n$ 时所叙述的类似断言的证明就可以了.

3. 度量空间的子空间

如果 $(X;d)$ 是度量空间, 而 E 是 X 的子集, 那么对于 E 中的任意点对 x_1, x_2, 规定它们的距离等于它们在 X 中的距离 $d(x_1,x_2)$, 就得到度量空间 $(E;d)$, 称之为原空间 $(X;d)$ 的**子空间**.

于是, 我们有下列定义:

定义 9 称度量空间 $(X_1;d_1)$ 为*度量空间* $(X;d)$ *的子空间*, 如果 $X_1 \subset X$, 并且对于集合 X_1 的任意点对 a,b, 等式 $d_1(a,b) = d(a,b)$ 成立.

因此, 度量空间 $(X;d)$ 的子空间 $(X_1;d_1)$ 中的球

$$B_1(a;r) = \{x \in X_1 | d_1(a,x) < r\}$$

①还可参看本节末与例 13 有关的练习 2.

显然是集合 $X_1 \subset X$ 与 X 中的球 $B(a;r)$ 的交集

$$B_1(a;r) = X_1 \cap B(a;r).$$

于是, X_1 中的一切开集有形式

$$G_1 = X_1 \cap G,$$

其中 G 是 X 中的开集, 而 X_1 中的一切闭集 F_1 有形式

$$F_1 = X_1 \cap F,$$

其中 F 是 X 中的闭集.

由此可见, 度量空间中的集合的性质, 开或闭都是相对的, 同时还与集合所在的空间有关.

例 14 平面 $\mathbb{R}^2$ 的横坐标轴上的区间 $|x| < 1, y = 0$, 在装备了 $\mathbb{R}^2$ 中的标准度量后是度量空间 $(X_1; d_1)$, 像任何一个度量空间一样, 它相对于本身是闭的. 因为它包含了它在 X_1 中的所有极限点. 同时,X_1 显然不是 $\mathbb{R}^2 = X$ 中的闭集.

这个例子就说明, 开集的概念也是相对的.

例 15 具有度量 (7) 的定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数的集合 $C[a, b]$ 是度量空间 $\mathfrak{R}_p[a, b]$ 的子空间. 但是如果在 $C[a, b]$ 上采用度量 (6) 而不是 (7), 那么结论就不再成立.

4. 度量空间的直积

如果 $(X_1; d_1)$ 和 $(X_2; d_2)$ 是两个度量空间, 那么在直积 $X_1 \times X_2$ 中可以引进度量 d. 在 $X_1 \times X_2$ 中引进度量的最常见的方法如下: 如果 $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2, (x_1', x_2') \in X_1 \times X_2$, 那么可以规定

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_1') + d_2^2(x_2, x_2')},$$

或者

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2'),$$

或者

$$d((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = \max\{d_1(x_1, x_1'), d_2(x_2, x_2')\}.$$

容易看出, 在上述每一种情形, 我们都得到 $X_1 \times X_2$ 上的度量.

定义 10 如果 $(X_1; d_1), (X_2; d_2)$ 是两个度量空间, 那么空间 $(X_1 \times X_2; d)$ 称为度量空间 $(X_1; d_1)$ 和 $(X_2; d_2)$ 的**直积**, 其中 d 是在 $X_1 \times X_2$ 中按上述任一种方式引进的度量.

例 16 空间 $\mathbb{R}^2$ 可以看作具有标准度量的两个度量空间 $\mathbb{R}$ 的直积, 而度量空间 $\mathbb{R}^3$ 是度量空间 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ 的直积.

练 习

1. a) 推广例 2, 证明, 如果 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是严格上凸的连续函数, 而 $(X; d)$ 是度量空间, 那么在 X 上可以用关系式 $d_f(x_1, x_2) = f(d(x_1, x_2))$ 定义新度量 d_f.

b) 证明: 在任意的度量空间 $(X; d)$ 上都可以引进度量

$$d'(x_1, x_2) = \frac{d(x_1, x_2)}{1 + d(x_1, x_2)},$$

在 $(X; d')$ 内两点间的距离不超过 1.

2. 设 $(X; d)$ 是装备了例 2 开始所指出的平凡 (离散) 度量的度量空间, 且设 $a \in X$. 在给定情况下, 集合 $B(a; 1/2), B(a; 1), \overline{B}(a; 1), \widetilde{B}(a; 1), B(a; 3/2)$ 和集合 $\{x \in X | d(a, x) = 1/2\}, \{x \in X | d(a, x) = 1\}, \overline{B}(a; 1) \setminus B(a; 1), \widetilde{B}(a; 1) \setminus B(a; 1)$ 是怎样的?

3. a) "任意闭集族的并集是闭集" 对吗?

b) 集合的一切边界点是否都是它的极限点?

c) 集合的边界点的任意邻域是否总是既含有该集合的内点又含有该集合的外点?

d) 证明: 任一集合的边界点所组成的集合是闭集.

4. a) 证明: 如果 $(Y; d_Y)$ 是度量空间 $(X; d_X)$ 的子空间, 那么对于 Y 中的任意开 (闭) 集 $G_Y(F_Y)$, 可以找到 X 中的开 (闭) 集 $G_X(F_X)$ 使得 $G_Y = Y \cap G_X (F_Y = Y \cap F_X)$.

b) 验证, 如果 Y 中的开集 G'_Y, G''_Y 互不相交, 那么可以选择 X 中相应的集合 G'_X, G''_X, 使得它们也没有公共点.

5. 在集合 X 上有了度量 d 后, 可能试图把集合 $A \subset X$ 与 $B \subset X$ 之间的距离定义为

$$\widetilde{d}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

a) 举出一个度量空间和它的两个互不相交的闭子集 $A \subset X, B \subset X$, 且 $\widetilde{d}(A, B) = 0$ 的例子.

b) 试证在度量空间 $(X; d)$ 的闭子集组成的集类* 上可以引进**豪斯多夫度量** D: 对于闭子集 $A \subset X$ 和 $B \subset X$, 设

$$D(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \widetilde{d}(a, B), \sup_{b \in B} \widetilde{d}(A, b)\right\}.$$

* 译者注: 应为 "有界闭子集组成的集类".

§2 拓扑空间

对于与函数或映射的极限概念有关的问题, 许多情况重要的不是空间中存在这样那样的度量, 而是界定了点的邻域. 为了证实这一点, 只需回忆极限定义或连续性定义, 它们完全能用邻域的术语来叙述. 拓扑空间是那样的数学对象, 在其上以最一般的形式去研究取极限的运算和映射的连续性.

1. 基本定义

定义 1 称集合 X *装备了拓扑空间结构或装备了拓扑*, 或者称 X *是拓扑空间*, 如果指定了 X 的一个子集族 τ (其中集合叫 X 中的开集), 它具有下列性质:

a) $\varnothing \in \tau; X \in \tau$.

b) $(\forall \alpha \in A; \tau_\alpha \in \tau) \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$.

c) $(\tau_i \in \tau; i = 1, \cdots, n) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$.

于是, 拓扑空间是由集合 X 和 X 的具有上述性质的子集族 τ 所组成的序对 $(X;\tau)$.τ 包含空集和整个集 X, 族 τ 中的任意多个集合的并集是族 τ 中的集合, 并且族 τ 中的有限个集合之交集是族 τ 中的集合.

可以看出, 在拓扑空间的公理 a),b),c) 中, 把度量空间情形下已经证明了的开集的性质当作公设. 因此, 像前面那样定义了开集的任一度量空间都是拓扑空间.

于是, 在 X 中*给出拓扑*就意味着指出 X 的满足拓扑空间公理 a),b),c) 的子集族 τ.

正像我们看到的那样, 在 X 中给出度量自然也就给出了 X 上由这个度量导出的拓扑. 然而应当指出的是:X 上的不同度量在这个集合上可以产生同一个拓扑.

例 1 设 $X = \mathbb{R}^n (n > 1)$. 在 $\mathbb{R}^n$ 中我们考察由 §1 关系式 (5) 所给出的度量 $d_1(x_1, x_2)$ 和由 §1 公式 (3) 所定义的度量 $d_2(x_1, x_2)$.

显然, 从不等式

$$d_1(x_1, x_2) \leqslant d_2(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{n} d_1(x_1, x_2)$$

推出, 在这两个度量之一的意义下, 以任意点 $a \in X$ 为中心的每一个球 $B(a;r)$ 都包含在另一个度量意义下以同一点为中心的某一球中. 因此, 由度量空间开子集的定义得出, 这两个度量在 X 上导出同一个拓扑.

在本教科书中, 我们所采用的几乎所有的拓扑空间都是度量空间. 但是不能认为一切拓扑空间都可以度量化, 即不能认为都可以给它装备一个度量, 使得在该度量下的开集与定义 X 的拓扑的集族 τ 中的开集相一致. 这件事能实现的条件正是度量化定理的内容.

定义 2 如果 $(X;\tau)$ 是拓扑空间, 那么族 τ 中的集合称为*开集*, 而它关于 X 的余集称为拓扑空间 $(X;\tau)$ 的*闭集*.

用列出集族 τ 中的所有集合来给出集合 X 的拓扑 τ 的作法是罕见的. 经常是只指出 X 的一些子集组成的一个集类, 而族 τ 的任一集合可以由该集类中集合的并和交得到. 因此, 很重要的乃是

定义 3 X 的开子集族 $\mathfrak{B}$ 称为拓扑空间 $(X;\tau)$ 的*基*(*开基或拓扑基*),如果每个开集 $G\in\tau$ 是 $\mathfrak{B}$ 中某些元素的并.

例 2 如果 $(X;d)$ 是度量空间, 而 $(X;\tau)$ 是与它相对应的拓扑空间, 那么所有的球作成的集族 $\mathfrak{B}=\{B(a;r)\}$ 显然是 τ 的拓扑基, 其中 $a\in X, r>0$. 另外, 如果取 $\mathfrak{B}$ 是以正有理数 r 为半径的所有球的集族 $\mathfrak{B}'$, 那么这个族也是 τ 的拓扑基.

于是, 为了给出拓扑 τ, 只要给出这个拓扑的基. 像例 2 中所看到的那样, 一个拓扑空间可以有许多不同的拓扑基.

定义 4 称拓扑空间的基的最小势为该拓扑空间的*权*.

我们通常涉及的是有可数拓扑基的拓扑空间 (但是, 也有例外. 参看练习第 4 题和第 6 题).

例 3 在 $\mathbb{R}^k$ 中如果取以有理点 $\left(\dfrac{m_1}{n_1},\cdots,\dfrac{m_k}{n_k}\right)\in\mathbb{R}^k$ 为中心, 有理数 $r=\dfrac{m}{n}>0$ 为半径的所有的球组成的集族为 $\mathfrak{B}$, 那么, 显然得到空间 $\mathbb{R}^k$ 的标准拓扑的可数基. 不难验证, 有限的开集族不可能给出 $\mathbb{R}^k$ 中的标准拓扑. 因此, 标准拓扑空间 $\mathbb{R}^k$ 有可数权.

定义 5 称包含点 $x\in X$ 的开集为拓扑空间 $(X;\tau)$ 中该点的*邻域*.

显然, 如果在 X 上给出了拓扑 τ, 那么对于每个点就确定了它的邻域系.

同样显然的是, 拓扑空间各个点的所有邻域系可以作为这个空间的拓扑基. 于是, 在 X 中可以由集合 X 的点的邻域来引进拓扑. 最初的拓扑空间定义, 正是用这种方式给出的①. 请注意, 在度量空间中我们实质上就是在指出点的 $\delta-$ 邻域后再引进拓扑的. 我们再举一个例子.

例 4 我们研究定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数集 $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, 并在此基础上构造新的集 —— 连续函数的*芽*集. 称函数

$$f,g\in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

①度量空间和拓扑空间的概念在 20 世纪初就给出了明确的陈述. 法国数学家弗雷歇 (M. R. Fréchet) (1878—1973) 在 1906 年引进了度量空间的概念, 德国数学家豪斯多夫 (F. Hausdorff) (1868—1942) 在 1914 年定义了拓扑空间.

在点 $a \in \mathbb{R}$ 是等价的, 如果存在这点的邻域 $U(a)$, 使得

$$\forall x \in U(a), f(x) = g(x).$$

所引进的关系确实是等价关系 (它是自反的, 对称的和传递的). 在点 $a \in \mathbb{R}$ 彼此等价的连续函数类称为在这一点的**连续函数芽**. 如果 f 是在点 a 生成芽的函数之一, 那么芽本身将用记号 f_a 表示. 现在我们定义芽的邻域. 设 $U(a)$ 是 $\mathbb{R}$ 中点 a 的邻域, f 是定义在 $U(a)$ 上并在点 a 生成芽 f_a 的一个函数. 这个函数 f 在任意点 $x \in U(a)$ 生成自己的芽 f_x. 相应于一切点 $x \in U(a)$ 的芽的集 $\{f_x\}$ 称为**芽 f_a 的邻域**. 把所有不同芽的这样的邻域组成的集取作拓扑基, 连续函数的芽集就成了拓扑空间. 值得注意的是在所得到的拓扑空间中, 两个不同点 (芽) f_a, g_a 可以没有不相交的邻域 (图 66).

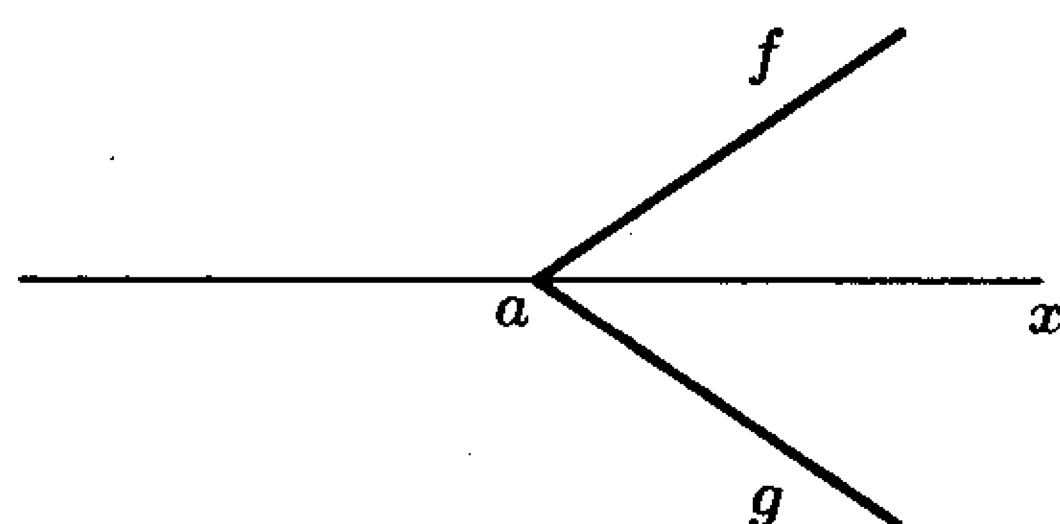


图 66

定义 6 称拓扑空间为**豪斯多夫空间**, 如果它满足**豪斯多夫公理**: 空间的任意两个不同点有不相交的邻域.

例 5 显然, 任一度量空间 (X, d) 都是豪斯多夫空间, 因为对于任意不重合的两个点 $a, b \in X$, 有 $d(a, b) > 0$, 它们的球邻域

$$B\left(a; \frac{1}{2}d(a,b)\right), B\left(b; \frac{1}{2}d(a,b)\right)$$

就没有公共点.

同时, 如例 4 所示, 的确有非豪斯多夫拓扑空间. 看来具有最简单的拓扑 $\tau = \{\varnothing, X\}$ 的拓扑空间就是这种空间的最简单的例子, 即便 X 只有两个点, $(X; \tau)$ 也不是豪斯多夫空间. 此外, 在这个空间中, 点的补集 $X \setminus x$ 不是开集.

我们将只研究豪斯多夫拓扑空间.

定义 7 称集合 $E \subset X$ 是拓扑空间 $(X; \tau)$ 中的**处处稠密集**, 如果对任意点 $x \in X$ 和它的任一邻域 $U(x)$, 交集 $E \cap U(x)$ 都非空.

例 6 如果在 $\mathbb{R}$ 中考察标准拓扑, 那么有理数集 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中处处稠密. 类似地, $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集在 $\mathbb{R}^n$ 中处处稠密.

可以证明, 在每个拓扑空间中存在势不超过这个拓扑空间权的处处稠密集.

定义 8 具有可数处处稠密集的度量空间称为**可分空间**.

例 7 在任一标准度量下, 度量空间 $(\mathbb{R}^n; d)$ 是可分空间, 因为集合 $\mathbb{Q}^n$ 在 $(\mathbb{R}^n; d)$ 中处处稠密.

例 8 具有由关系式 (6) 定义度量的度量空间 $(C([0,1];\mathbb{R});d)$ 也是可分的, 因为从函数 $f\in C([0,1];\mathbb{R})$ 的一致连续性推出, 可以用顶点为有理坐标的有限段折线以任意精确度逼近函数 f 的图形. 这些折线组成的集合是可数的.

我们将主要研究可分空间.

现在我们指出, 因为拓扑空间中点的邻域的定义与度量空间中点的邻域的定义的文字表述是完全相同的, 而在 §1 中所研究的集合的*内点*, *外点*, *边界点*, *极限点*的概念和集合的*闭包*的概念, 由于它们的表述只用到了邻域的概念, 所以可以不加改变地移到任一拓扑空间的情况.

此外 (从第 7 章 §1 中证明命题 2 的过程可以看出), 也成立同样的命题: 拓扑空间中的集合是闭集, 当且仅当它含有它所有的极限点.

2. 拓扑空间的子空间

设 $(X;\tau_X)$ 是拓扑空间, 而 Y 是 X 的子集. 利用拓扑 τ_X 可在 Y 中定义下列拓扑, 叫做在 Y 中的*诱导拓扑*或*相对拓扑*.

称形如 $G_Y=Y\cap G_X$ 的任一集合 G_Y 为 Y 中的开集, 其中 G_X 是 X 中的开集.

不难验证, 所产生的 Y 的子集族 τ_Y 满足拓扑空间的开集公理.

可以看出, Y 中开集 G_Y 的定义与我们在前一节第 3 段中当 Y 是度量空间 X 的子空间的情况一致.

定义 9 称拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 $Y\subset X$ 为 $(X;\tau)$ 的子空间, 如果在 Y 中装备了诱导拓扑 τ_Y.

显然, $(Y;\tau_Y)$ 中的开集不一定是 $(X;\tau_X)$ 中的开集.

3. 拓扑空间的直积

如果 $(X_1;\tau_1)$ 和 $(X_2;\tau_2)$ 是两个具有开集族 $\tau_1=\{G_1\},\tau_2=\{G_2\}$ 的拓扑空间, 那么在 $X_1\times X_2$ 中可把形如 $G_1\times G_2$ 的所有集作为基以引进拓扑.

定义 10 拓扑空间 $(X_1\times X_2;\tau_1\times\tau_2)$ 称为拓扑空间 $(X_1;\tau_1),(X_2;\tau_2)$ 的*直积*, 如果它的拓扑基由形如 $G_1\times G_2$ 的集所组成, 其中 G_i 是拓扑空间 $(X_i;\tau_i), i=1,2,$ 中的开集.

例 9 如果 $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ 和 $\mathbb{R}^2$ 有标准拓扑, 那么, $\mathbb{R}^2$ 是直积 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$, 因为 $\mathbb{R}^2$ 中一切开集均可表成它的所有点的方形邻域之并. 而正方形 (设其边与坐标轴平行) 是 $\mathbb{R}$ 中开区间 (从而是 $\mathbb{R}$ 中的开集) 的直积.

应当注意, 形如 $G_1\times G_2$ 的集合 (其中 $G_1\in\tau_1,G_2\in\tau_2$) 只组成拓扑基, 但不是拓扑空间直积的所有开集.

练 习

1. 验证, 若 $(X;d)$ 是度量空间, 则 $\left(X;\dfrac{d}{1+d}\right)$ 也是度量空间, 而且度量 d 和 $\dfrac{d}{1+d}$ 在 X 上导出同一个拓扑 (见前一节练习 1).

2. a) 在自然数集 $\mathbb{N}$ 中, 令公差 d 与 n 互质的等差序列为 $n \in \mathbb{N}$ 的邻域. 试问, 这样生成的拓扑空间是否是豪斯多夫空间?

   b) $\mathbb{N}$ 作为取标准拓扑的实数集 $\mathbb{R}$ 的子空间时具有怎样的拓扑?

   c) 写出 $\mathbb{R}$ 的所有开子集.

3. 如果在同一个集合上给出两个拓扑 τ_1 和 τ_2, 那么, 说拓扑 τ_2 比拓扑 τ_1 强, 是指 $\tau_1 \subset \tau_2$, 即在 τ_2 中除了组成族 τ_1 的开集外, 还包含某些不在 τ_1 中的集合.

   a) 在习题 2 中研究的 $\mathbb{N}$ 上的两个拓扑能否比较?

   b) 如果在定义在区间 $[0,1]$ 的实值连续函数集 $C[0,1]$ 中先按 §1 中关系式 (6) 引进度量, 然后按同一节中关系式 (7) 引进度量, 那么, 在 $C[a,b]$ 上, 一般将产生两个拓扑. 试问, 它们能否比较?

4. a) 详细证明例 4 中研究的连续函数芽空间不是豪斯多夫空间.

   b) 试说明为什么这个拓扑空间不能度量化.

   c) 这个空间有怎样的权?

5. a) 试用闭集的语言叙述拓扑空间的公理.

   b) 证明 $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$.

   c) 证明, 任一集合的边界是闭集.

   d) 证明, 如果 F 是 $(X;\tau)$ 的闭集, G 是 $(X;\tau)$ 的开集, 那么 $G \setminus F$ 是 $(X;\tau)$ 的开集.

   e) 如果 $(Y;\tau_Y)$ 是拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 的子空间, 集合 E 满足: $E \subset Y \subset X$, 且 $E \in \tau_X$, 那么 $E \in \tau_Y$.

6. 给定拓扑空间 (X,τ), 如果其任意单点集都是闭集, 则称它是**强意义下的拓扑空间**或 τ_1- 空间. 试证:

   a) 任何豪斯多夫空间都是 τ_1- 空间 (豪斯多夫空间叫 τ_2- 空间, 部分地由于这个原因);

   b) 并非所有 τ_1- 空间都是 τ_2- 空间 (参看例 4);

   c) 两点集 $X = \{a,b\}$, 在其中定义开集族 $\tau = \{\varnothing, X\}$, 则它不是 τ_1- 空间;

   d) 在 τ_1- 空间中, 集合 F 是闭集, 当且仅当它包含自己的一切极限点.

7. a) 证明, 在任一拓扑空间中存在势不超过空间权的处处稠密集.

   b) 试证度量空间 $C[a,b], C^{(k)}[a,b], \mathfrak{R}_1[a,b], \mathfrak{R}_p[a,b]$ 的可分性 (相应度量的公式见 §1).

   c) 试证, 如果在定义在区间 $[a,b]$ 上的有界实值函数集中用 §1 中关系式 (6) 引进度量, 那么所得到的空间不是可分的度量空间.

§3 紧 集

1. 紧集的定义和一般性质

定义 1 拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的集合 K 称为是紧集(紧致集①), 如果能从 X 的任一覆盖 K 的开集族中选出 K 的有限覆盖.

例 1 在标准拓扑下, 实数集 $\mathbb{R}$ 的闭区间 $[a,b]$ 是紧集, 这从第 2 章 §3 第 2 段证明了的关于从闭区间的任何开覆盖中可以选出有限覆盖的引理立即可得.

一般地,$\mathbb{R}^m$ 中的 m 维区间

$$I^m=\{x\in\mathbb{R}^m|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i,i=1,2,\cdots,m\}$$

是紧集. 这在第 7 章 §1 第 3 段中已经建立.

在第 7 章 §1 第 3 段同时还证明了 $\mathbb{R}^m$ 的子集是紧集, 当且仅当它是有界闭集.

与拓扑空间中集合成为开集或闭集的相对性质不同, 集合成为紧集的性质在下述意义下是绝对的, 即不依赖于它作为哪个空间的子空间, 更确切地说, 成立以下的

命题 1 *拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 K 是 X 中的紧集, 当且仅当 K 是其本身作为 $(X;\tau)$ 的子空间中的紧集.*

◀ 所述命题可以从紧集的定义和在 K 中诱导拓扑 F 每个开集 G_K 都是 X 中的某个开集 G_X 与 K 的交推出. ▶

于是, 如果 $(X;\tau_X)$ 和 $(Y;\tau_Y)$ 在集 $K\subset(X\cap Y)$ 上诱导出同一个拓扑的两个拓扑空间, 那么 K 无论是在 X 中还是在 Y 中同时是紧集, 或者同时不是紧集.

例 2 设 d 是 $\mathbb{R}$ 上的标准度量, 而 $I=\{x\in\mathbb{R}|0<x<1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的单位开区间. I 在度量空间 $(I;d)$ 中是闭的, 并且有界, 但不是紧的, 因为它不是 $\mathbb{R}$ 中的紧集.

现在来证明紧集的一些重要性质.

引理 1 (紧集的闭性引理) *如果 K 是豪斯多夫空间 $(X;\tau)$ 中的紧集, 那么 K 是 X 的闭子集.*

◀ 根据集合闭性的判别准则, 只要验证 K 的任一极限点 $x_0\in X$ 都属于 K.

假设 $x_0\notin K$. 对每个点 $x\in K$, 作 x 的开邻域 $G(x)$, 使它与 x_0 的某邻域不相交. 所有这些邻域 $G(x),x\in K$, 组成 K 的一个开覆盖, 从中选出有限覆盖 $G(x_1),\cdots,G(x_n)$. 如果 x_0 点的邻域 $O_i(x_0)$ 使得 $G(x_i)\cap O_i(x_0)=\varnothing$, 那么集合

$$O(x_0)=\bigcap_{i=1}^{n}O_i(x_0)$$

①定义 1 引入的紧集概念在拓扑学中有时称为紧致集或重紧致集.

也是 x_0 点的邻域, 而且对于任意的 $i=1,\cdots,n$, 都有

$$G(x_i)\cap O(x_0)=\varnothing.$$

所以 $K\cap O(x_0)=\varnothing$. 即 x_0 点不可能是 K 的极限点. ▶

引理 2 (紧集套引理) 如果 $K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_n\supset\cdots$ 是非空的紧集套, 那么交 $\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$ 非空.

◀ 由引理 1, 集合 $G_i=K_1\setminus K_i, i=1,2,\cdots$ 是 K_1 中的开集. 如果交集 $\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$ 是空的, 那么集列 $G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n\subset\cdots$ 全体组成 K_1 的覆盖. 从中选出有限覆盖, 这样, 我们便找到集列的某个元素 G_m 已经能盖住 K_1, 然而根据条件

$$K_m=K_1\setminus G_m\neq\varnothing.$$

导致矛盾, 引理 2 得证. ▶

引理 3 (紧集的闭子集引理) 紧集 K 的闭子集 F 是紧集.

◀ 设 $\{G_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 F 的开覆盖. 增加一个开集 $G=K\setminus F$, 得到紧集 K 的开覆盖. 从这个覆盖中可以选出 K 的有限覆盖. 因为 $G\cap F=\varnothing$, 这意味着从族 $\{G_\alpha:\alpha\in A\}$ 中选出了集 F 的有限覆盖. ▶

2. 度量紧集

下面我们证明度量紧集的某些性质, 即度量空间作为由度量导出的拓扑空间的紧集性质.

定义 2 称集合 $E\subset X$ 是度量空间 $(X;d)$ 的$\varepsilon-$ 网, 如果对于任一点 $x\in X$, 有点 $e\in E$ 使得 $d(e,x)<\varepsilon$.

引理 4 (有限 $\varepsilon-$ 网引理) 如果度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 在 $(K;d)$ 中 K 有有限 $\varepsilon-$ 网.

◀ 对每个点 $x\in K$, 取开球 $B(x;\varepsilon)$. 然后从这些球的开覆盖中选取有限覆盖 $B(x_1;\varepsilon),\cdots,B(x_n;\varepsilon)$. 显然, 点

$$x_1,x_2,\cdots,x_n$$

组成所求的 $\varepsilon-$ 网. ▶

除挑选有限覆盖的推理外, 在分析里还经常遇到从任意序列中选取收敛子列的推理. 在这方面成立以下的

命题 2 (度量紧集的准则) *度量空间 $(K;d)$ 是紧的, 当且仅当从它的任一点列中可以选取收敛到 K 中某个点的子列.*

如前所说, 点列 $\{x_n\}$ 收敛到某个点 $a \in K$, 意味着对于点 $a \in K$ 的任一邻域 $U(a)$, 有号码 $N \in \mathbb{N}$, 使当 $n > N$ 时, $x_n \in U(a)$.

关于极限的更详细的内容我们将在下面 §6 里讨论.

在证明命题 2 之前, 我们引进两个引理.

引理 5 *如果度量空间 $(K;d)$ 的任一点列中均可选出在 K 中收敛的子列, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, K 有有限 $\varepsilon-$ 网.*

◀ 假如存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 在 K 中没有有限 ε_0- 网, 那么在 K 中可以构造点列 $\{x_n\}$, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ 均有 $d(x_n, x_i) > \varepsilon_0$. 显然, 从这个序列中不能选出收敛子列. ▶

引理 6 *如果从度量空间 $(K;d)$ 的任一点列可以选出在 K 中收敛的子列, 那么这个空间的任一非空闭子集套有非空的交集.*

◀ 如果 $F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ 是所指的 K 中的闭集列, 从该集列的每一个集合中取一个点, 得到点列 $x_1, \cdots, x_n, \cdots$, 从中选出收敛子列 $\{x_{n_i}\}$. 根据作法, 它的极限 $a \in K$ 一定属于闭集列中的每一个 $F_i, i \in \mathbb{N}$. ▶

现在证明命题 2.

◀ 首先验证, 如果 $(K;d)$ 是紧的, $\{x_n\}$ 是它的一个点列, 那么从中可以选出收敛到 K 的某个点的子列. 如果序列 $\{x_n\}$ 只有有限个不同的点, 那么结论显然成立, 因此可以认为序列 $\{x_n\}$ 有无限多个不同的点. 对于 $\varepsilon_1 = 1/1$, 构作有限 $1-$网, 并取包含序列无限多项的闭球 $\widetilde{B}(a_1;1)$. 根据引理 3, $\widetilde{B}(a_1;1)$ 本身是紧集, 在 $\widetilde{B}(a_1;1)$ 中存在有限 $\varepsilon_2 = 1/2$ 网和包含序列无限多个元的闭球 $\widetilde{B}(a_2;1/2)$, 这就得到了一个紧集套

$$\widetilde{B}(a_1;1) \supset \widetilde{B}(a_2;1/2) \supset \cdots \supset \widetilde{B}(a_n;1/n) \supset \cdots,$$

根据引理 2, 它们有公共点 $a \in K$. 在 $\widetilde{B}(a_1;1)$ 中取序列的点 x_{n_1}, 然后在 $\widetilde{B}(a_2;1/2)$ 中取序列的点 x_{n_2}, 号码 $n_2 > n_1$, 等等. 这样一来, 我们得到了子序列 $\{x_{n_i}\}$, 根据作法, $\{x_{n_i}\}$ 收敛到 a.

现在证明充分性, 也就是验证, 如果从度量空间 $(K;d)$ 的任一点列 $\{x_n\}$ 中可以选出在 K 中收敛的子列, 那么 $(K;d)$ 是紧的.

事实上, 如果从空间 $(K;d)$ 的某个开覆盖 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 中不能选出有限覆盖, 那么由引理 5, 构作 K 的有限 $\varepsilon_1 = 1$ 网, 并且可以找到闭球 $\widetilde{B}(a_1;1)$, 使 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 不含 $\widetilde{B}(a_1;1)$ 的有限覆盖.

现在对 $\widetilde{B}(a_1;1)$ 构作有限的 1/2 网, 从中可以找出闭球

$$\widetilde{B}\,(a_2;1/2)\,,$$

$\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 不含 $\widetilde{B}\,(a_2;1/2)$ 的有限覆盖.

这样一来, 便得到闭集套

$$\widetilde{B}(a_1;1) \supset \widetilde{B}(a_2;1/2) \supset \cdots \supset \widetilde{B}\,(a_n;1/n) \supset \cdots,$$

由引理 6, 并且从作法可以看出, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}(a_n;1/n) = \{a\} \in K$. 这个点 a 被 $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 中某个集 G_{α_0} 覆盖, 因为 G_{α_0} 是开集, 因此对于充分大的 n, 整个集合 $\widetilde{B}(a_n;1/n)$ 都含于 G_{α_0}. 导致矛盾, 命题 2 得证. ►

练 习

1. 度量空间的子集叫*全有界集*, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 它都有有限 ε- 网.

a) 验证: 集合全有界性定义与其叙述中的 ε- 网的点是取自其本身还是其所在空间无关.

b) 试证: 度量空间中的集合是紧集, 当且仅当它全有界而且是闭集.

c) 举例说明, 度量空间中的闭有界集未必是全有界的, 因此, 也未必是紧集.

2. 拓扑空间的子集称为是*相对紧的*, 如果它的闭包是紧集.

举出 $\mathbb{R}^n$ 的相对紧子集的例子.

3. 拓扑空间称为是*局部紧集*, 如果这个空间的每个点有相对紧的邻域.

举出局部紧但不紧的拓扑空间的例子.

4. 证明, 对任一局部紧但不紧的拓扑空间 $(X;\tau_X)$, 存在紧拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$, 使得 $X \subset Y$, 而 $Y \setminus X$ 由一个点组成, 并且空间 $(X;\tau_X)$ 是拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 的子空间.

§4 连通的拓扑空间

定义 1 称拓扑空间 $(X;\tau)$ 是*连通的*, 如果在 $(X;\tau)$ 中除了 X 本身和空集以外没有别的开 – 闭集①.

如果使上述定义具有下列形式, 那么它在直观上就更清楚了.

拓扑空间是连通的, 当且仅当它不能表为它的两个非空不交的闭 (开) 子集的并.

定义 2 拓扑空间 $(X;\tau)$ 中的集合 E 称为是*连通集*, 如果它作为 $(X;\tau)$ 的拓扑子空间 (具有诱导拓扑) 是连通的.

①即同时是开的和闭的.

从这个定义和定义 1 推出, 集合 E 连通的性质不依赖于包含它的空间. 更精确地说, 如果 $(X;\tau_X)$ 和 $(Y;\tau_Y)$ 是包含 E 并且在 E 上导出同一个拓扑的拓扑空间, 那么 E 在 X 和 Y 中同时连通, 或者同时不连通.

例 1 设 $E=\{x\in\mathbb{R}|x\neq 0\}$. 集合 $E_-=\{x\in E|x<0\}$ 非空, 它与 E 不重合, 而且如果把 E 看作拓扑空间, 其拓扑是 $\mathbb{R}$ 上标准拓扑的诱导拓扑, $E_-(E_+=\{x\in E|x>0\}$ 也一样) 同时还是 E 中的开–闭集. 那么, E 不是连通的, 这与我们直观想像的一样.

命题 (关于 $\mathbb{R}$ 的连通子集) *非空集合 $E\subset\mathbb{R}$ 是连通的, 当且仅当对于任意属于 E 的 x,z, 从 $x<y<z$ 能推出 $y\in E$.*

可见, 在直线上只有 (有限或无限) 区间: 开区间, 半开区间, 闭区间是连通的.

◀ **必要性** 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的连通子集, 三个点 a,b,c 满足 $a\in E, b\in E$. 而 $c\notin E, a<c<b$. 设

$$A=\{x\in E|x<c\},\quad B=\{x\in E|x>c\},$$

则有 $a\in A, b\in B$, 即 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$. 此外, $E=A\cup B$, 并且两个集 A,B 是 E 中的开集. 这与 E 的连通性矛盾.

充分性 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的具有下述性质的子空间: 与任一对点 a 和 b 属于 E 的同时, 区间 $[a,b]$ 中一切点都属于 E. 我们来证 E 是连通集.

假设 A 是 E 的开 – 闭子集, 并且 $A\neq\varnothing, B=E\setminus A\neq\varnothing$. 设 $a\in A, b\in B$. 为了确定起见, 设 $a<b$ (因为 $A\cap B=\varnothing$, 所以 $a\neq b$). 考察点 $c_1=\sup\{A\cap[a,b]\}$. 因为 $A\ni a\leqslant c_1\leqslant b\in B$, 我们有 $c_1\in E$. 由 A 在 E 中的闭性推出 $c_1\in A$.

现在考察点 $c_2=\inf\{B\cap[c_1,b]\}$, 类似地, 由 B 的闭性推出 $c_2\in B$. 于是, 因为 $c_1\in A, c_2\in B$ 和 $A\cap B=\varnothing$, 所以 $a\leqslant c_1<c_2\leqslant b$. 但是从 c_1 和 c_2 的定义以及 $E=A\cup B$ 推出, 开区间 $]c_1,c_2[$ 的任一点不能属于 E. 这与已知的 E 的性质不符, 可见, 集合 E 不能有具上述性质的子集 A, 从而, E 的连通性得证. ▶

练 习

1. a) 验证, 如果 A 是 $(X;\tau)$ 的开 – 闭子集, 那么 $B=X\setminus A$ 同样是开 – 闭集.

b) 证明, 用集合包含关系的术语, 集合的连通性质可以用以下形式表示: 拓扑空间 $(X;\tau)$ 的子集 E 是连通的, 当且仅当在 X 中不存在一对不交开集 (闭集) G'_X, G''_X, 使得 $E\cap G'_X\neq\varnothing, E\cap G''_X\neq\varnothing$ 且 $E\subset G'_X\cup G''_X$.

2. 证明:

a) 有公共点的连通子空间的并是连通的.

b) 连通子空间的交不一定连通.

c) 连通空间的闭包是连通的.

3. 具有实元素的 n 阶非退化矩阵组成的群 $GL(n)$ 可以看作乘积拓扑空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的子空间, 矩阵的每个元素分属于自己的、构成乘积空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的那个实数集 $\mathbb{R}$. 试问, $GL(n)$ 是否连通?

4. 拓扑空间称为是*局部连通的*, 如果它的每个点具有连通的邻域.

a) 证明, 从局部连通性还不能推出拓扑空间的连通性.

b) $\mathbb{R}^2$ 中的集合 E 是函数 $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}(x \neq 0)$ 的图形加上纵轴上的区间

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \wedge |y| \leqslant 1\}.$$

在 E 上装备由 $\mathbb{R}^2$ 诱导出的拓扑. 证明, 这样得到的拓扑空间是连通的, 但不是局部连通的.

5. 在第 7 章 §2 第 2 段中, 我们把 $\mathbb{R}^n$ 中的连通子集定义作那样的集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 它的任意两点都可以用 E 中的一条道路连接. 为了与这一节里引进的拓扑连通性区别, 第 7 章中所研究的概念通常叫做*弧式连通性*. 试证:

a) $\mathbb{R}^n$ 的一切弧式连通集是连通集.

b) 当 $n > 1$ 时, 不是所有 $\mathbb{R}^n$ 的连通子集都是弧式连通的 (见练习 4).

c) $\mathbb{R}^n$ 的一切连通开子集是弧式连通的.

§5 完备的度量空间

这一节只讨论度量空间, 更确切地说, 是这种空间中在分析的各个领域里起重要作用的一类空间.

1. 基本定义和例子

与从空间 $\mathbb{R}^n$ 的研究已知的概念类似, 我们将在任意度量空间中引进基本列和收敛列的概念.

定义 1 度量空间 $(X;d)$ 的点列 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 叫做*基本列*或者*柯西列*, 如果对每一个 $\varepsilon > 0$, 有号码 $N \in \mathbb{N}$, 使对一切大于 N 的号码 $m, n \in \mathbb{N}$, 满足关系 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

定义 2 说度量空间 $(X;d)$ 的点列 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*收敛于点* $a \in X$, 或 a 是这个点列的*极限*, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.

像以前那样, 把有极限的序列称为*收敛列*.

现在我们给出完备度量空间的定义

定义 3 称度量空间 $(X;d)$ 是*完备的*, 如果它的每个基本列是收敛列.

例 1 具有标准度量的实数集 $\mathbb{R}$ 是完备的度量空间, 这可从数列的柯西收敛准则推出.

我们指出, 因为度量空间的一切收敛列显然是基本列, 那么, 在完备度量空间的定义中, 实质上是要求空间满足序列收敛性的柯西准则.

例 2 如果在集合 $\mathbb{R}$ 中去掉数 0, 那么在标准度量下, 集合 $\mathbb{R}\setminus 0$ 就不是完备空间. 事实上, 它的点 $x_n = 1/n, n\in\mathbb{N}$, 作成基本列, 但在 $\mathbb{R}\setminus 0$ 中没有极限.

例 3 具有任一标准度量的空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的, 这在第 7 章 §2 第 1 段里已经阐明.

例 4 考察定义在区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上具有度量

$$d(f,g) = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)| \tag{1}$$

的实值连续函数集 $C[a,b]$ (见 §1 例 7).

我们来证明度量空间 $(C[a,b];d)$ 是完备的.

◀ 设函数列 $\{f_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是 $C[a,b]$ 中的基本列, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall m,n\in\mathbb{N}$ $(m>N$ 且 $n>N)$, 有

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b]. \tag{2}$$

对于每个固定的值 $x\in[a,b]$, 从 (2) 可以看出, 数列 $\{f_n(x);n\in\mathbb{N}\}$ 是基本的, 根据柯西准则, 它有极限, 记作 $f(x)$.

于是,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad x\in[a,b]. \tag{3}$$

我们来验证函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 即 $f\in C[a,b]$.

从 (2) 和 (3) 推出, 当 $n>N$ 时 f 满足不等式

$$|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon,\quad \forall x\in[a,b]. \tag{4}$$

对于固定点 $x\in[a,b]$, 验证函数 f 在这点的连续性. 设位移 h 使得 $x+h\in[a,b]$. 从恒等式

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)=f(x+h)-f_n(x+h)+f_n(x+h)\\ -f_n(x)+f_n(x)-f(x),\end{aligned}$$

得到不等式

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)|\leqslant|f(x+h)-f_n(x+h)|\\ +|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|.\end{aligned} \tag{5}$$

由 (4), 不等式 (5) 的右端第一和第三项, 当 $n > N$ 时, 都不超过 ε. 取定 $n > N$, 得到函数 $f_n \in C[a,b]$, 再选取 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得对于 $|h| < \delta$, 有 $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \varepsilon$, 我们就得到: 如果 $|h| < \delta$, 则

$$|f(x+h) - f(x)| < 3\varepsilon.$$

这说明函数 f 在点 x 连续. 由点 x 在 $[a,b]$ 中的任意性, 即知 $f \in C[a,b]$.

最后, 根据 (4), 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} d(f,f_n) = 0$.* 因此, 具有度量 (1) 的空间 $C[a,b]$ 是完备的度量空间. ►

这是一个很重要的定理, 它在分析中有广泛应用.

例 5 如果在同一个集合 $C[a,b]$ 上, 代替度量 (1), 考察积分度量

$$d(f,g) = \int_a^b |f-g|(x)dx, \tag{6}$$

那么所产生的度量空间不完备.

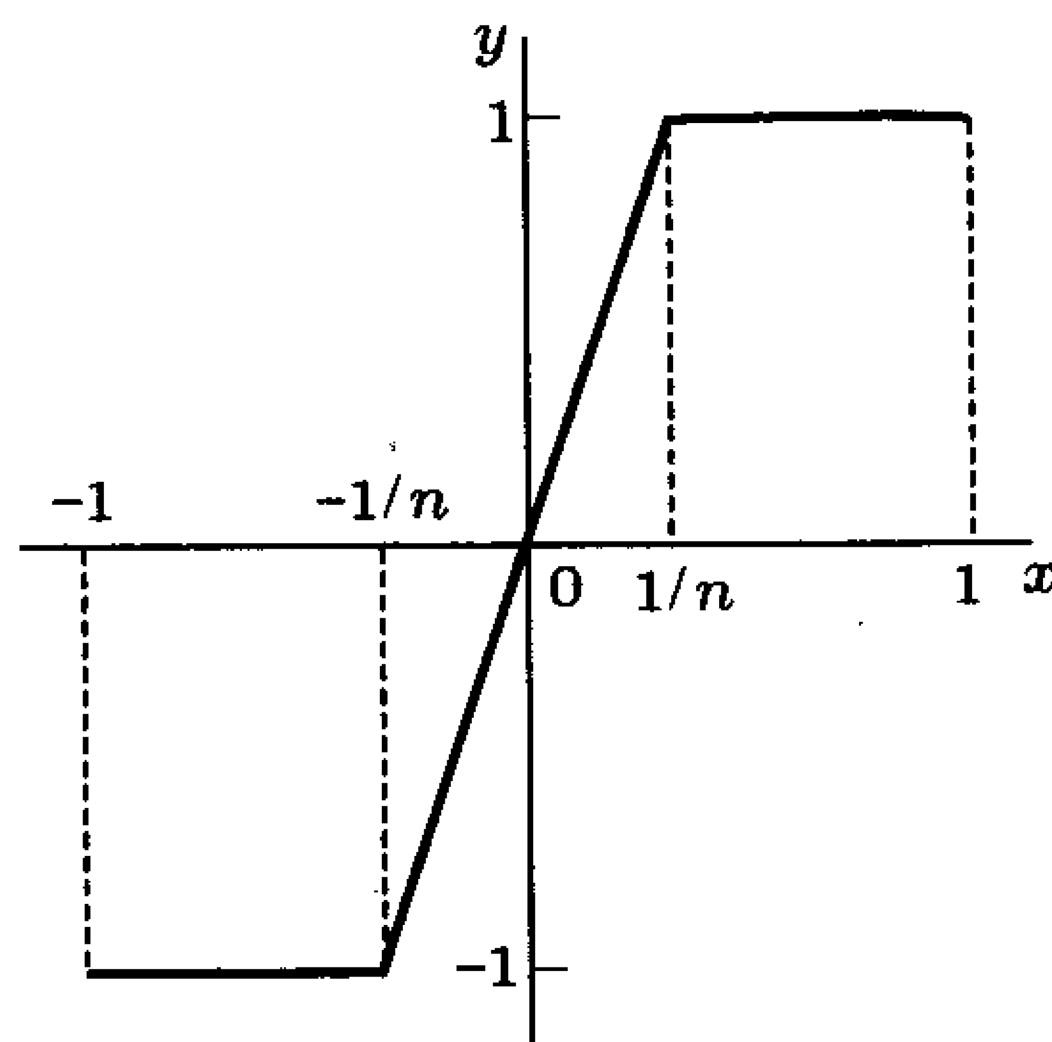


图 67

◄ 为了记号简单起见, 我们设 $[a,b] = [-1,1]$, 作为例子, 我们考察用以下方式定义的函数列 $\{f_n \in C[-1,1]; n \in \mathbb{N}\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, \text{如果 } -1 \leqslant x \leqslant -1/n, \\ nx, \text{如果 } -1/n < x < 1/n, \\ 1, \quad \text{如果 } 1/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(图 67).

从积分的性质直接推出这个序列在度量 (6) 下是空间 $C[-1,1]$ 的基本列. 同时, 它在 $C[-1,1]$ 中没有极限, 因为如果连续函数 $f \in C[-1,1]$ 是该序列在度量 (6) 下的极限的话, 那么函数 f 在区间 $-1 \leqslant x < 0$ 上应取常数 -1, 而在区间 $0 < x \leqslant 1$ 上应等于 1, 这与 f 在 $x = 0$ 处的连续性不相容. ►

例 6 证明定义在 $[a,b]$ 上的实值黎曼可积函数集 $\mathfrak{R}[a,b]$ 在度量 (6)① 的意义下也不完备要困难些, 我们借助在黎曼意义下函数可积性的勒贝格准则来证明这个事实.

◄ 取闭区间 $[0,1]$ 作为 $[a,b]$, 并且在 $[0,1]$ 上构造测度不是零的康托尔集. 设 $\Delta \in]0,1/3[$. 在 $[0,1]$ 中去掉长度为 Δ 的中间部分, 更确切地说, 是去掉区间 $[0,1]$ 的

* 这一句是译者加的.

①关于 $\mathfrak{R}[a,b]$ 上的度量 (6), 参看 §1 例 9 中所作的说明.

中点的 $\Delta/2-$ 邻域. 在剩下的两个区间的每一个区间中去掉长度为 $\Delta\cdot 1/3$ 的中间部分. 再从剩下的四个区间的每一个区间中去掉长度为 $\Delta\cdot 1/3^2$ 的中间部分, 等等. 在这个过程中所有去掉的区间长等于

$$\Delta+\Delta\cdot 2/3+\Delta\cdot 4/3^2+\cdots+\Delta\cdot(2/3)^n+\cdots=3\Delta.$$

因为 $0<\Delta<1/3$, 所以, $1-3\Delta>0$, 由此推出区间 $[0,1]$ 上剩下来的集合 K (康托尔集) 的勒贝格测度不是零.

现在我们考察以下的序列: $\{f_n\in\mathfrak{R}[0,1];n\in\mathbb{N}\}$. 设 f_n 是在前 n 步删去的区间上等于零, 而在 $[0,1]$ 上其他点等于 1 的函数. 容易验证, 这个序列在度量 (6) 的意义上是基本列. 假如某个函数 $f\in\mathfrak{R}[0,1]$ 是这个序列的极限, 那么在 $[0,1]$ 上 f 应该与集合 K 的特征函数几乎处处相同. 这样, f 在集合 K 的每个点间断. 可是, 由于 K 不是零测度集, 从勒贝格准则推出 $f\notin\mathfrak{R}[0,1]$. 这说明具有度量 (6) 的 $\mathfrak{R}[a,b]$ 不是完备的度量空间. ►

2. 度量空间的完备化

例 7　重新回到实数轴上, 考察有理数集 $\mathbb{Q}$, 其中装备由 $\mathbb{R}$ 上标准度量导出的度量.

显然, 在 $\mathbb{R}$ 中收敛到 $\sqrt{2}$ 的有理数列是基本列, 但它在 $\mathbb{Q}$ 中没有极限, 也就是说, 具有所指度量的 $\mathbb{Q}$ 不是完备的空间. 并且, $\mathbb{Q}$ 原本是完备度量空间 $\mathbb{R}$ 的那样的子空间,$\mathbb{R}$ 自然地看作是 $\mathbb{Q}$ 的完备化. 要注意的是, 集合 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ 也可能看作完备度量空间 $\mathbb{R}^2$ 的子集, 但是把 $\mathbb{R}^2$ 称为 $\mathbb{Q}$ 的完备化是不合理的.

定义 4　包含给定度量空间 $(X;d)$ 的最小的完备度量空间称为空间 $(X;d)$ 的**完备化空间**.

这个直观上可以接受的定义至少需要两个方面的说明: “最小” 是什么意思和它是否存在.

我们很快就能回答这两个问题, 而现在暂且采用以下较为形式的定义.

定义 5　如果度量空间 $(X;d)$ 是完备度量空间 $(Y;d)$ 的子空间, 并且集合 $X\subset Y$ 在 Y 中处处稠密, 那么就称空间 $(Y;d)$ 为度量空间 $(X;d)$ 的**完备化空间**.

定义 6　称度量空间 $(X_1;d_1)$ 与度量空间 $(X_2;d_2)$ 是**等距的**, 如果存在一一映射 $f:X_1\to X_2$, 使得对于 X_1 中的任意点 a,b, 成立等式 $d_2(f(a),f(b))=d_1(a,b)$. (在这种情况下, 称映射 $f:X_1\to X_2$ 为**等距映射**.)

显然, 所引进的关系是自反的、对称的和传递的, 也就是说, 引进的关系是度量空间之间的等价关系. 在研究度量空间性质的时候, 我们研究的不是个别的空间, 而

是同时研究了与它等距的所有空间的性质. 由于这个原因, 等距的度量空间可以不加区分.

例 8 平面上两个全等的图形作为度量空间是等距的, 所以在研究图形的度量性质时, 我们完全不管像图形在平面中处于什么位置这种问题, 而把所有彼此全等的图形视为同一的.

采用了把等距的空间视为同一空间的约定后, 可以证明, 一个度量空间, 如果它有完备化空间, 那么必是唯一的.

我们先来验证

引理 *对于度量空间 $(X;d)$ 的任意四个点 a,b,u,v 成立不等式*

$$|d(a,b)-d(u,v)| \leqslant d(a,u)+d(b,v). \tag{7}$$

◀ 根据三角不等式, 有

$$d(a,b) \leqslant d(a,u)+d(u,v)+d(b,v).$$

由于 a,b 和 u,v 两对元素是平权的, 由此即可推得 (7). ▶

现在证明

命题 1 *如果度量空间 $(Y_1;d_1),(Y_2;d_2)$ 是同一个空间 $(X;d)$ 的完备化空间, 那么它们是等距的.*

◀ 用以下的方法构造等距映射 $f: Y_1 \to Y_2$. 对于 $x \in X$, 设 $f(x)=x$. 那么 $x_1,x_2 \in X$ 时, $d_2(f(x_1),f(x_2)) = d(f(x_1),f(x_2)) = d(x_1,x_2) = d_1(x_1,x_2)$. 如果 $y_1 \in Y_1 \setminus X$, 那么因为 X 在 Y_1 中处处稠密, y_1 是对于 X 的极限点. 设 $\{x_n; n\in\mathbb{N}\}$ 是在度量 d_1 意义下收敛于 y_1 的 X 中的点列. 这个点列在 d_1 意义下是基本的. 但是因为在 X 上度量 d_1 和 d_2 均与 d 相同, 这个序列也是 $(Y_2;d_2)$ 中的基本列. $(Y_2;d_2)$ 是完备的, 因此这个序列在 Y_2 中有极限 $y_2 \in Y_2$. 可以用常规的方法证明这个极限是唯一的. 现在设 $f(y_1)=y_2$. 因为任意点 $y_2 \in Y_2\setminus X$ 和任意点 $y_1 \in Y_1 \setminus X$ 一样, 也是 X 中某个基本列的极限, 于是所作的映射 $f: Y_1 \to Y_2$ 是满射.

现在验证, 对于 Y_1 中任意一对点 y_1', y_1'', 成立等式

$$d_2(f(y_1'),f(y_1'')) = d_1(y_1',y_1''). \tag{8}$$

如果 $y_1', y_1'' \in X$, 那么 (8) 显然成立. 在一般的情况下, 取 X 中收敛于 y_1' 和 y_1'' 的两个点列 $\{x_n'; n\in\mathbb{N}\}, \{x_n''; n\in\mathbb{N}\}$. 从不等式 (7) 推出

$$d_1(y_1',y_1'') = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n',x_n''),$$

或者

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n''). \tag{9}$$

根据作法, 这两个点列在 $(Y_2; d_2)$ 中相应地收敛于 $y_2' = f(y_1')$ 和 $y_2'' = f(y_1'')$. 所以

$$d_2(y_2', y_2'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n''). \tag{10}$$

比较关系式 (9) 和 (10) 便得等式 (8). 这个等式同时说明我们的映射 $f: Y_1 \to Y_2$ 是单射. 这就完成了 f 是等距映射的证明. ►

在定义 5 中,$(Y; d)$ 是度量空间 $(X; d)$ 的完备化空间, 要求 $(X; d)$ 是 $(Y; d)$ 的子空间且 X 在 $(Y; d)$ 中处处稠密. 从把彼此等距的空间视为同一空间的观点, 现在可以将完备化概念推广如下

定义 5′ 完备度量空间 $(Y; d_Y)$ 称为是度量空间 $(X; d_X)$ 的完备化, 如果在 $(Y; d_Y)$ 中有与 $(X; d_X)$ 等距的处处稠密的子空间.

现在证明

命题 2 *每个度量空间都有完备化空间.*

◄ 如果原来的空间本身是完备的, 那么它本身就是自己的完备化空间.

实际上, 在证明命题 1 时我们已给出了构作不完备度量空间 $(X; d_X)$ 的完备化空间的思想.

考察空间 $(X; d_X)$ 中的基本序列的集合. 称其中的两个序列 $\{x_n'; n \in \mathbb{N}\}, \{x_n''; n \in \mathbb{N}\}$ **等价或共尾**, 如果当 $n \to \infty$ 时, 有

$$d(x_n', x_n'') \to 0.$$

容易看出, 共尾关系实际上是等价关系. 用 S 表示等价基本序列类的集合. 在 S 中按照以下法则引进度量. 如果 s' 和 s'' 是 S 的元, 而 $\{x_n'; n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{x_n''; n \in \mathbb{N}\}$ 分别是类 s' 和 s'' 中的基本列, 则设

$$d(s', s'') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n', x_n''). \tag{11}$$

从不等式 (7) 推出, 这个定义是合理的: 右端极限存在 (根据数列的柯西准则), 并且不依赖于 s', s'' 中序列 $\{x_n'; n \in \mathbb{N}\}, \{x_n''; n \in \mathbb{N}\}$ 的选取.

函数 $d(s', s'')$ 满足度量的三条公理. 这样得到的度量空间 $(S; d)$ 就是所求的空间 $(X; d_X)$ 的完备化空间. 事实上, $(X; d_X)$ 等距于空间 $(S; d)$ 的子空间 $(S_X; d)$, 这里 $(S_X; d)$ 是那样一些基本序列等价类的集合, 其中每个类含有一个常驻列 $\{x_n = x \in X; n \in \mathbb{N}\}$. 自然, 把这样的类 $s \in S$ 等同于点 $x \in X$. 这样得到的映射

$$f: (X; d_X) \to (S_X; d)$$

显然是等距的.

剩下来的是要验证, $(S_X; d)$ 在 $(S; d)$ 中处处稠密以及 $(S; d)$ 是完备的度量空间.

先验证 $(S_X; d)$ 在 $(S; d)$ 中的稠密性. 设 s 是 S 的任一元, 而 $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是属于类 s 的 $(X; d_X)$ 中的基本列. 取 $\xi_n = f(x_n), n \in \mathbb{N}$, 我们得到空间 $(S_X; d)$ 的点列 $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}\}$, 从 (11) 可以看出, 它以 $s \in S$ 为极限.

现在证明空间 $(S; d)$ 完备. 设 $\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$ 是空间 $(S; d)$ 的任一基本列. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 选择 $(S_X; d)$ 中的元 ξ_n, 使得 $d(s_n, \xi_n) < 1/n$, 那么序列 $\{\xi_n; n \in \mathbb{N}\}$ 与序列 $\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$ 一样, 也是基本列. 但在这种情况下, 序列 $\{x_n = f^{-1}(\xi_n); n \in \mathbb{N}\}$ 也将成为 $(X; d_X)$ 中的基本列, 它定义一个元 $s \in S$, 而由 (11) 知, 这个元是给定的序列 $\{s_n; n \in \mathbb{N}\}$ 的收敛极限. ►

注 1 证明了命题 1 和命题 2 以后, 就容易明白在定义 5′ 的意义下, 度量空间的完备化实际上是包含 (精确到等距) 给定度量空间的最小的完备空间. 利用这些, 我们明确了并且证实了开始的定义 4.

注 2 从有理数集 $\mathbb{Q}$ 出发构造实数集 $\mathbb{R}$, 可以完全按照上面在一般形式下构造度量空间的完备化空间的方法进行. 这正是由康托尔完成的从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 的过渡.

注 3 在例 6 中我们证明了黎曼可积函数空间 $\mathfrak{R}[a, b]$ 在原来的积分度量下是不完备的. 它的完备化是重要的勒贝格可积函数空间 $\mathfrak{L}[a, b]$.

练 习

1. a) 证明以下的**闭球套引理**. 设 $(X; d)$ 是度量空间, $\widetilde{B}(x_1; r_1) \supset \widetilde{B}(x_2; r_2) \supset \cdots \supset \widetilde{B}(x_n; r_n) \supset \cdots$ 是 X 中的半径趋于零的闭球套. 那么, 空间 $(X; d)$ 完备, 当且仅当对于任意这样的序列, 存在唯一的点属于这个序列中的每一个球.

b) 证明, 如果在上述引理的条件中, 去掉 $r_n \to 0, n \to \infty$ 的要求, 那么, 甚至当空间完备时, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{B}(x_n; r_n)$ 也可以是空集.

2. a) 在度量空间 $(X; d)$ 中, 称集合 $E \subset X$ 是**无处稠密的**, 如果它在任一球内都不稠密, 即对于任一球 $B(x; r)$, 可以找到球

$$B(x_1; r_1) \subset B(x; r),$$

使得 $B(x_1; r_1)$ 中没有集合 E 的点.

集合 E 称为 X 中的**第一纲集**, 如果它可以表示为可数个无处稠密集的并.

X 中不是第一纲集的集称为**第二纲集**.

试证, 完备的度量空间是 (自身中的) 第二纲集.

b) 试证, 如果函数 $f \in C^{\infty}[a, b]$, 且满足: $\forall x \in [a, b], \exists n \in \mathbb{N}, \forall m > n$, 有 $f^{(m)}(x) = 0$, 那么函数 f 是多项式.

§6 拓扑空间的连续映射

从分析的观点来看, 这一节和下一节包含了这一章的最重要的结果.

这里所叙述的基本概念和命题都是很自然的, 有时简直是把我们已经熟知的一些概念和命题逐字逐句地移植到任意的拓扑空间或度量空间中的映射的情形. 这时, 对于许多事实, 不只是它们的叙述, 就连它们的证明, 几乎都与已经研究过的情况相同, 在这些情况下, 自然就引用此前已详细叙述过的相应的命题, 而略去叙述和证明.

1. 映射的极限

a. 基本定义和它的特殊情况

定义 1 设 $f: X \to Y$ 是从在 X 中具有确定基底 $\mathfrak{B} = \{B\}$ 的集合 X 到拓扑空间 Y 的映射. 称点 $A \in Y$ 是映射 $f: X \to Y$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 的极限, 并记作 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x) = A$, 如果对于 Y 中点 A 的任一邻域 $V(A)$, 有基 $\mathfrak{B}$ 的元素 $B \in \mathfrak{B}$, 使得 B 在映射 f 下的像含于 $V(A)$ 中.

用逻辑符号表示, 定义 1 有如下形式

$$\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y \quad \exists B \in \mathfrak{B}(f(B) \subset V(A)).$$

我们最经常遇到的情况是 X 和 Y 一样, 也是拓扑空间, 而 $\mathfrak{B}$ 是某个点 $a \in X$ 的邻域基或者去心邻域基. 对于点 a 的去心邻域基 $\{\overset{\circ}{U}(a)\}$ 仍采用以前的记号 $x \to a$, 对这个基, 定义 1 可以具体化为:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y \quad \exists \overset{\circ}{U}(a) \subset X(f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(A)).$$

如果 $(X; d_X)$ 和 $(Y; d_Y)$ 是两个度量空间, 那么后一个定义可以用 ε-δ 语言改述为:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \forall x \in X$$
$$(0 < d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

换言之

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} d_Y(A, f(x)) = 0.$$

于是我们看到, 有了邻域的概念以后, 在拓扑空间或者度量空间 Y 中, 就可以像在 $Y = \mathbb{R}$ 中, 或者更一般地, 像在 $Y = \mathbb{R}^n$ 中所作的那样, 定义映射 $f: X \to Y$ 的极限概念.

b. 关于映射极限的性质

我们对极限的一般性质作一些说明.

首先指出, 以前所得到的极限的唯一性当 Y 不是豪斯多夫空间时已不再成立. 如果 Y 是豪斯多夫空间, 那么极限的唯一性成立, 并且它的证明与特殊情况 $Y=\mathbb{R}$ 或者 $Y=\mathbb{R}^n$ 中所进行的没有什么区别.

其次, 如果 $f: X\to Y$ 是度量空间中的映射, 那么可以谈论映射的有界性 (就是 Y 中集合 $f(X)$ 的有界性) 和映射关于 X 中基 $\mathfrak{B}$ 的最终有界性 (是指存在基 $\mathfrak{B}$ 的元 B, 在 B 上 f 有界).

从映射的极限定义本身推出, 如果从具有基 $\mathfrak{B}$ 的集合 X 到度量空间 Y 的映射 $f: X\to Y$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 有极限, 那么它关于这个基底最终有界.

c. 映射极限的存在性问题

命题 1 (关于复合映射的极限) *设 Y 是具有基 $\mathfrak{B}_Y$ 的集合, 而 $g: Y\to Z$ 是从 Y 到拓扑空间 Z 的关于基 $\mathfrak{B}_Y$ 有极限的映射.*

设 X 是具有基 $\mathfrak{B}_X$ 的集合. 并且 $f: X\to Y$ 是从 X 到 Y 的满足下述条件的映射: 对于基 $\mathfrak{B}_Y$ 中的任一元 $B_Y\in\mathfrak{B}_Y$, 有基 $\mathfrak{B}_X$ 中的 $B_X\in\mathfrak{B}_X$, 使 B_X 的像含于 B_Y 中, 即 $f(B_X)\subset B_Y$.

在这些条件下, 由映射 f 和 g 所确定的复合映射 $g\circ f: X\to Z$ 有关于基 $\mathfrak{B}_X$ 的极限, 并且

$$\lim_{\mathfrak{B}_X} g\circ f(x)=\lim_{\mathfrak{B}_Y} g(y).$$

证明参看第 3 章 §2 定理 5.

现在我们来讨论有关极限存在性的另一重要论断 —— 柯西准则. 而这次所谈的是关于度量空间甚至是完备度量空间中的映射 $f: X\to Y$.

在从集合 X 到度量空间 $(Y;d)$ 的映射 $f: X\to Y$ 的情况下, 自然采用以下的

定义 2 称量

$$\omega(f;\varepsilon)=\sup_{x_1,x_2\in E} d(f(x_1),f(x_2))$$

为映射 $f: X\to Y$ 在集合 $E\subset X$ 上的**振幅**.

命题 2 (映射极限存在性的柯西准则) *设 X 是具有基 $\mathfrak{B}$ 的集合; $f: X\to Y$ 是从 X 到完备度量空间 $(Y;d)$ 的映射.*

为使映射 f 关于基 $\mathfrak{B}$ 有极限, 必须且只需对于任意的 $\varepsilon>0$, 有基 $\mathfrak{B}$ 的元 B, 映射在 B 上的振幅小于 ε.

简言之:

$$\exists\lim_{\mathfrak{B}} f(x)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists B\in\mathfrak{B}\,(\omega(f;B)<\varepsilon).$$

证明参看第 3 章 §2 定理 4.

要指出的是, 空间 Y 的完备性只在从最后的关系式的右边导出左边时需要. 另外, 如果 Y 不是完备空间, 那么一般来说这样的推导是不可能的.

2. 连续映射

a. 基本定义

定义 3 称从拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 在点 $a\in X$ **连续**, 如果对于点 $f(a)\in Y$ 的任意邻域 $V(f(a))\subset Y$, 有点 $a\in X$ 的邻域 $U(a)\subset X$, 使 $U(a)$ 的像 $f(U(a))$ 含于 $V(f(a))$ 中.

因此,

$f:X\to Y$ 在 $a\in X$ 连续

$$:=\forall V(f(a))\exists U(a)(f(U(a))\subset V(f(a))).$$

在 X 和 Y 是度量空间 $(X;d_X),(Y;d_Y)$ 的情形, 定义 3 自然可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述:

$f:X\to Y$ 在 $a\in X$ 连续 $:=\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in X(d_X(a,x)<\delta\Rightarrow d_Y(f(a),f(x))<\varepsilon)$.

定义 4 称映射 $f:X\to Y$ 为**连续的**, 如果它在每个点 $x\in X$ 连续.

从 X 到 Y 的连续映射的集合用记号 $C(X;Y)$ 表示.

定理 1 (映射连续性准则) *从拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 连续, 当且仅当 Y 的任何开 (闭) 子集的原像是 X 中的开 (闭) 集.*

◀ 因为余集的原像是原像的余集, 因此只需对开集证明定理.

首先证明, 如果 $f\in C(X;Y)$, 而 $G_Y\in\tau_Y$, 那么 $G_X=f^{-1}(G_Y)\in\tau_X$. 若 $G_X=\varnothing$, 则 $G_X\in\tau_X$ 是显然的. 若 $G_X\neq\varnothing$ 且 $a\in G_X$, 那么根据映射 f 在点 a 的连续性定义. 对于点 $f(a)$ 的邻域 G_Y, 有点 a 在 X 中的邻域 $U_X(a)$, 满足 $f(U_X(a))\subset G_Y$. 也就是 $U_X(a)\subset G_X=f^{-1}(G_Y)$. 因为 $G_X=\bigcup\limits_{a\in G_X}U_X(a)$, 所以 G_X 是开的, 即 $G_X\in\tau_X$.

现在证明, 如果 Y 中任一开集的原像是 X 中的开集, 那么 $f\in C(X;Y)$. 任取点 $a\in X$ 和它的像在 Y 中的任意邻域 $V_Y(f(a))$, 我们发现, 集合 $U_X(a)=f^{-1}(V_Y(f(a)))$ 是点 a 在 X 中的开邻域, 且 $f(U_X(a))\subset V_Y(f(a))$. 因此得到, 映射 $f:X\to Y$ 在任意点 $a\in X$ 连续. ▶

定义 5 称从一个拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 到另一个拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 上的双射 $f:X\to Y$ 是**同胚的或者同胚**, 如果它本身和它的逆映射 $f^{-1}:Y\to X$ 都是连续的.

定义 6 称两个拓扑空间是*同胚的*, 如果存在从其中一个空间到另一个空间上的同胚映射.

正像定理 1 所指出的那样, 对于从拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 到空间 $(Y;\tau_Y)$ 上的同胚映射 $f:X\to Y$, 开集族 τ_X,τ_Y 在下述意义下互相对应: $G_X\in\tau_X \Leftrightarrow f(G_X)=G_Y\in\tau_Y$.

因此, 从拓扑性质的观点来看, 同胚空间是完全相同的. 因而, 像度量空间的等距性是等价关系一样, 拓扑空间的同胚性同样是拓扑空间集合中的等价关系.

b. 连续映射的局部性质

我们将指出连续映射的局部性质. 它们可从极限的相应性质直接推出.

命题 3 (连续映射的复合的连续性) *设 $(X;\tau_X),(Y;\tau_Y),(Z;\tau_Z)$ 是拓扑空间. 如果映射 $g:Y\to Z$ 在点 $b\in Y$ 连续, 映射 $f:X\to Y$ 在点 $a\in X$ 连续, 而且 $f(a)=b$, 那么这两个映射的复合 $g\circ f:X\to Z$ 在点 $a\in X$ 连续.*

这可从映射连续性定义和命题 1 推出.

命题 4 (映射在连续点邻域内的有界性) *如果拓扑空间 (X,τ) 到度量空间 $(Y;d)$ 的映射 $f:X\to Y$ 在某个点 $a\in X$ 连续, 那么它在这个点的某个邻域内有界.*

命题从有极限的映射的关于基底的最终有界性推出.

在叙述下面关于连续映射性质的结论之前, 对于 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{R}^n$ 中的映射, 我们先回忆一下量

$$\omega(f;a):=\lim_{r\to 0}\omega(f;B(a;r)),$$

它称之为映射 f 在点 a 的*振幅*.

因为映射在集合上的振幅概念和球的概念在任何度量空间中都仍然有效, 所以映射 f 在点 a 的振幅 $\omega(f;a)$ 的定义对于从度量空间 $(X;d_X)$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 同样有效.

命题 5 *从度量空间 $(X;d_X)$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的映射 $f:X\to Y$ 在点 $a\in X$ 连续, 当且仅当 $\omega(f;a)=0$.*

这个结论可从映射在一点的连续性定义直接推出.

c. 连续映射的整体性质

现在我们来讨论连续映射的最重要的整体性质.

定理 2 *在连续映射下, 紧集的像是紧集.*

◀ 设 $f: K \to Y$ 是从紧集 $(K;\tau_K)$ 到拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 的连续映射, 并且设 $\{G_Y^\alpha, \alpha \in A\}$ 是 Y 中覆盖 $f(K)$ 的开集族. 由定理 1, 集合 $\{G_X^\alpha = f^{-1}(G_Y^\alpha), \alpha \in A\}$ 组成 K 的开覆盖. 从中选出有限覆盖 $G_X^{\alpha_1}, \cdots, G_X^{\alpha_n}$, 得到集合 $f(K) \subset Y$ 的有限覆盖 $G_Y^{\alpha_1}, \cdots, G_Y^{\alpha_n}$. 因而 $f(K)$ 是 Y 中的紧集. ▶

推论 *紧集上的连续实函数 $f: K \to \mathbb{R}$ 在紧集的某个点取得最大 (最小) 值.*

◀ 事实上, $f(K)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集, 也就是有界闭集. 这意味着 $\inf f(K) \in f(K)$ 和 $\sup f(K) \in f(K)$. ▶

特别地, 如果 K 是区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$, 那么我们重新得到古典的魏尔斯特拉斯定理.

关于一致连续性的康托尔定理能逐字逐句地转移给在紧集上定义的连续映射. 在叙述它之前, 我们先引进必要的

定义 7　称从度量空间 $(X;d_X)$ 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 的映射 $f: X \to Y$ 为**一致连续映射**, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使得在任意直径小于 δ 的集 $E \subset X$ 上, 映射 f 的振幅 $\omega(f;E)$ 小于 ε.

定理 3 (关于一致连续性)　*从度量紧集 K 到度量空间 $(Y;d_Y)$ 中的连续映射 $f: K \to Y$ 是一致连续的.*

特别地, 如果 K 是 $\mathbb{R}$ 上的闭区间, 而 $Y = \mathbb{R}$, 那么我们重新得到古典的康托尔定理, 第 4 章 §2 第 2 段中对这个定理的证明, 实际上, 可以不加改变地移到上述一般情况上来.

现在研究连通空间上的连续映射.

定理 4　*在连续映射下, 连通拓扑空间的像是连通的.*

◀ 设 $f: X \to Y$ 是从连通拓扑空间 $(X;\tau_X)$ 到拓扑空间 $(Y;\tau_Y)$ 上的连续映射. 设 E_Y 是 Y 的开 - 闭子集. 由定理 1, 集合 E_Y 的原像 $E_X = f^{-1}(E_Y)$ 是 X 中的开 - 闭集. 由 X 的连通性得到, 或者 $E_X = \varnothing$, 或者 $E_X = X$. 但这意味着, 或者 $E_Y = \varnothing$, 或者 $E_Y = Y = f(X)$. ▶

推论　*如果连通拓扑空间 $(X;\tau)$ 上的连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 取值 $f(a) = A \in \mathbb{R}$ 和 $f(b) = B \in \mathbb{R}$, 那么对于 A 和 B 之间的任一数 C, 必存在点 $c \in X$, 使得 $f(c) = C$.*

◀ 实际上, 根据定理 4, $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的连通集. 而 $\mathbb{R}$ 中的连通集只能是区间 (见 §4 中断言). 因此点 C 与点 A 和 B 一起含于 $f(X)$ 中. ▶

特别地, 如果 X 是区间, 我们得到古典的连续实值函数的中值定理.

练　习

1. a) 如果映射 $f: X \to Y$ 连续, 那么 X 中的开集 (闭集) 的像是否为 Y 中的开集 (闭集)?

b) 如果在映射 $f: X \to Y$ 下, 不仅开集的原像是开集, 而且开集的像也是开集, 那么 f 是否一定为同胚映射?

c) 如果映射 $f: X \to Y$ 连续, 并且是满单射, 那么它是否总是同胚的?

d) 同时满足条件 b 和 c 的映射是否是同胚的?

2. 试证

a) 从紧集到豪斯多夫空间的连续双射是同胚映射.

b) 如果去掉值域空间的豪斯多夫性要求, 一般说来, 上述断言不成立.

3. 说明 $\mathbb{R}^n$ 的以下子集: 直线, 直线上的开区间, 直线上的闭区间, 球面及环面, 作为拓扑空间, 是否 (两两) 同胚.

4. 称拓扑空间 $(X;\tau)$ 是*弧式连通的*, 如果对于它的任意两个点, 可以用位于 X 中的一条路径连结. 更确切地说, 就是对于 X 中的任意两个点 A 和 B, 有从闭区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 到 X 中的连续映射 $f: I = [a,b] \to X$, 使得 $f(a) = A, f(b) = B$.

a) 证明, 一切弧式连通空间是连通的.

b) 证明, $\mathbb{R}^n$ 中任一凸集是弧式连通的.

c) 验证, $\mathbb{R}^n$ 中的连通开子集均弧式连通.

d) 证明, $\mathbb{R}^n$ 中的球面 $S(a;r)$ 是弧式连通的, 但在另外的度量空间中, 作为集合, 它装备了完全不同的拓扑, 一般来说, 可能不再是连通的.

e) 验证, 在拓扑空间中不可能不穿过集合的边界用路径连结这个集合的内点和外点.

§7 压缩映像原理

这里将建立一个原理, 它本身虽然很简单, 却是证明许多存在性定理的有效工具.

定义 1 称点 $a \in X$ 为映射 $f: X \to X$ 的*不动点*, 如果

$$f(a) = a.$$

定义 2 称从度量空间 $(X;d)$ 到自身中的映射 $f: X \to X$ 是*压缩映射*, 如果存在数 $q, 0 < q < 1$, 使得对于 X 中的任意两点 x_1, x_2, 成立不等式

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q d(x_1, x_2). \tag{1}$$

定理 (皮卡[1]-巴拿赫[2]不动点原理) *从完备度量空间 $(X;d)$ 到自身中的压缩映射 $f: X \to X$ 有唯一的不动点 a.*

[1] 皮卡 (C. E. Picard) (1856—1941) —— 法国数学家, 在微分方程理论和解析函数理论中, 有一系列重要结果都属于他.

[2] 巴拿赫 (S. Banach) (1892—1945) —— 波兰数学家, 泛函分析创立者之一.

另外, 对于任意点 $x_0 \in X$, 迭代序列

$$x_0, x_1 = f(x_0), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$$

收敛到 a. 收敛速度由估计式

$$d(a, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{2}$$

给出.

◀ 取任意点 $x_0 \in X$, 我们来证序列 $x_0, x_1 = f(x_0), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$ 是基本列. 已知映射 f 是压缩的, 因此由 (1) 得

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant q d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant q^n d(x_1, x_0)$$

和

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leqslant (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{n+k-1}) d(x_1, x_0) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

由此看出, 序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 确实是基本的.

空间 $(X; d)$ 完备, 因此上述基本列有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in X$.

从压缩映射的定义看出, 压缩映射总是连续的, 因此

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

于是,a 是映射 f 的不动点.

映射 f 不可能有的其他的不动点, 因为从 $a_i = f(a_i), i = 1, 2$, 考虑到 (1), 推出

$$0 \leqslant d(a_1, a_2) = d(f(a_1), f(a_2)) \leqslant q d(a_1, a_2),$$

而这只有当 $d(a_1, a_2) = 0$, 即 $a_1 = a_2$ 时才能成立.

其次, 在关系式

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

中令 $k \to \infty$ 取极限, 就得到

$$d(a, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$ ▶

作为这个定理的补充, 我们来证明以下的

命题 (关于不动点的稳定性) 设 $(X;d)$ 是完备的度量空间; $(\Omega;\tau)$ 是拓扑空间, 它在下面起参变量空间的作用.

假设每个参变量 $t\in\Omega$ 对应空间 X 到 X 的压缩映射

$$f_t: X\to X,$$

而且满足以下条件:

a) 族 $\{f_t, t\in\Omega\}$ 一致压缩, 即存在数 $q, 0<q<1$, 使得每个映射 f_t 是 q–压缩的;

b) 对于每个 $x\in X$, 映射 $f_t(x):\Omega\to X$ 看作 t 的函数在某个点 $t_0\in\Omega$ 连续, 即 $\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x)=f_{t_0}(x)$,

那么, 方程 $x=f_t(x)$ 的解 $a(t)\in X$ 在点 t_0 连续地依赖于 t, 即 $\lim\limits_{t\to t_0} a(t)=a(t_0)$.

◀ 像证明定理时所看到的, 方程 $x=f_t(x)$ 的解 $a(t)$ 可以作为从任意点 $x_0\in X$ 出发的序列 $\{x_{n+1}=f(x_n), n=0,1,\cdots\}$ 的极限而得到. 取 $x_0=a(t_0)=f_{t_0}(a(t_0))$.

考虑到估计式 (2) 和条件 a), 我们得到

$$\begin{aligned}d(a(t),a(t_0))=d(a(t),x_0)&\leqslant\frac{1}{1-q}d(x_1,x_0)\\&=\frac{1}{1-q}d(f_t(a(t_0)),f_{t_0}(a(t_0))).\end{aligned}$$

由条件 b), 这个关系式中最后一项当 $t\to t_0$ 时趋向于零. 因而证得

$$\lim_{t\to t_0} d(a(t),a(t_0))=0,\quad 即\quad \lim_{t\to t_0} a(t)=a(t_0).\ ▶$$

例 1 作为压缩映像原理应用的重要例子, 我们将遵循皮卡的方法, 证明微分方程 $y'(x)=f(x,y(x))$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解的存在定理.

如果函数 $f\in C(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, 且

$$|f(u,v_1)-f(u,v_2)|\leqslant M|v_1-v_2|,$$

其中 M 是某个常数, 那么, 无论给定怎样的初始条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{3}$$

总有点 $x_0\in\mathbb{R}$ 的邻域 $U(x_0)$ 和唯一的定义在 $U(x_0)$ 上的函数 $y=y(x)$, 满足方程

$$y'=f(x,y) \tag{4}$$

和初始条件 (3).

◀ 方程 (4) 和条件 (3) 一起可以写成一个关系式

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{5}$$

用 $A(y)$ 表示最后一个等式的右边部分, 我们得到, $A : C(V(x_0); \mathbb{R}) \to C(V(x_0); \mathbb{R})$ 是从定义在点 x_0 的邻域 $V(x_0)$ 上的连续函数集到自身的映射. 把 $C(V(x_0); \mathbb{R})$ 看作具有一致度量 (见 §1 中公式 (6)) 的度量空间, 我们得到

$$\begin{aligned} d(Ay_1, Ay_2) &= \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \right| \\ &\leqslant \max_{x \in V(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|dt \right. \\ &\leqslant M|x - x_0| d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

如果 $|x - x_0| \leqslant \dfrac{1}{2M}$, 那么在相应的区间 I 上成立不等式

$$d(Ay_1, Ay_2) \leqslant \frac{1}{2} d(y_1, y_2),$$

其中 $d(y_1, y_2) = \max\limits_{x \in I} |y_1(x) - y_2(x)|$. 这样一来, 我们得到一个从完备 (见 §5 例 4) 度量空间 $(C(I; \mathbb{R}); d)$ 到自身的压缩映射

$$A : C(I; \mathbb{R}) \to C(I; \mathbb{R}),$$

根据压缩映像原理, 它应该有唯一的不动点 $y = Ay$. 而这意味着在 $C(I; \mathbb{R})$ 中所找到的函数将是唯一的那个定义在 $I \ni x_0$ 并且满足方程 (5) 的函数. ▶

例 2 作为上述方法的示例, 我们将根据压缩映像原理来求方程

$$y = y'$$

在初始条件 (3) 下我们早已知道的解.

这时

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(t)dt,$$

至少在 $|x - x_0| \leqslant q < 1$ 时可以应用这个原理.

从初始近似 $y(x) \equiv 0$ 出发, 构造逼近序列 $y_1 = A(0), \cdots, y_{n+1}(t) = A(y_n(t)), \cdots$:

$$\begin{aligned} &y_1(x) \equiv y_0, \\ &y_2(x) = y_0[1 + (x - x_0)], \\ &y_3(x) = y_0\left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_{n+1}(x) = y_0\left[1 + (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

从中可以看出

$$y(x) = y_0 e^{x-x_0}.$$

在上述定理中所说的不动点原理也称为**压缩映像原理**. 例 1 中微分方程 (4) 的解的存在性定理的证明是皮卡给出的, 压缩映像原理是作为皮卡证明的推广而产生的. 巴拿赫把压缩映像原理陈述成了完全一般的形式.

例 3 求方程 $f(x)=0$ 的根的牛顿方法. 假设在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上具有正导数的凸实值函数 $f(x)$ 在区间的端点上取不同符号的值. 这时, 它在这个区间上有且仅有一个点 a, 满足 $f(a)=0$. 除了用平分区间这种最简单的方法求点 a 以外, 还有各种利用了函数 f 的特性作出的更精细快捷的求点 a 的方法. 比如, 在我们的情况下可以利用以下由牛顿提出的方法, 称为**牛顿法或切线法**. 取任意点 $x_0 \in [\alpha,\beta]$, 并写出函数的图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线方程

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

我们将得到切线与横轴的交点 $x_1 = x_0 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_0)$ (图 68). 取 x_1 作为根 a 的第一次近似, 用 x_1 代替 x_0 重复上面的过程. 这样做下去, 便得到点列

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n). \tag{6}$$

可以验证, 在我们的情况下, 该点列单调趋于 a.

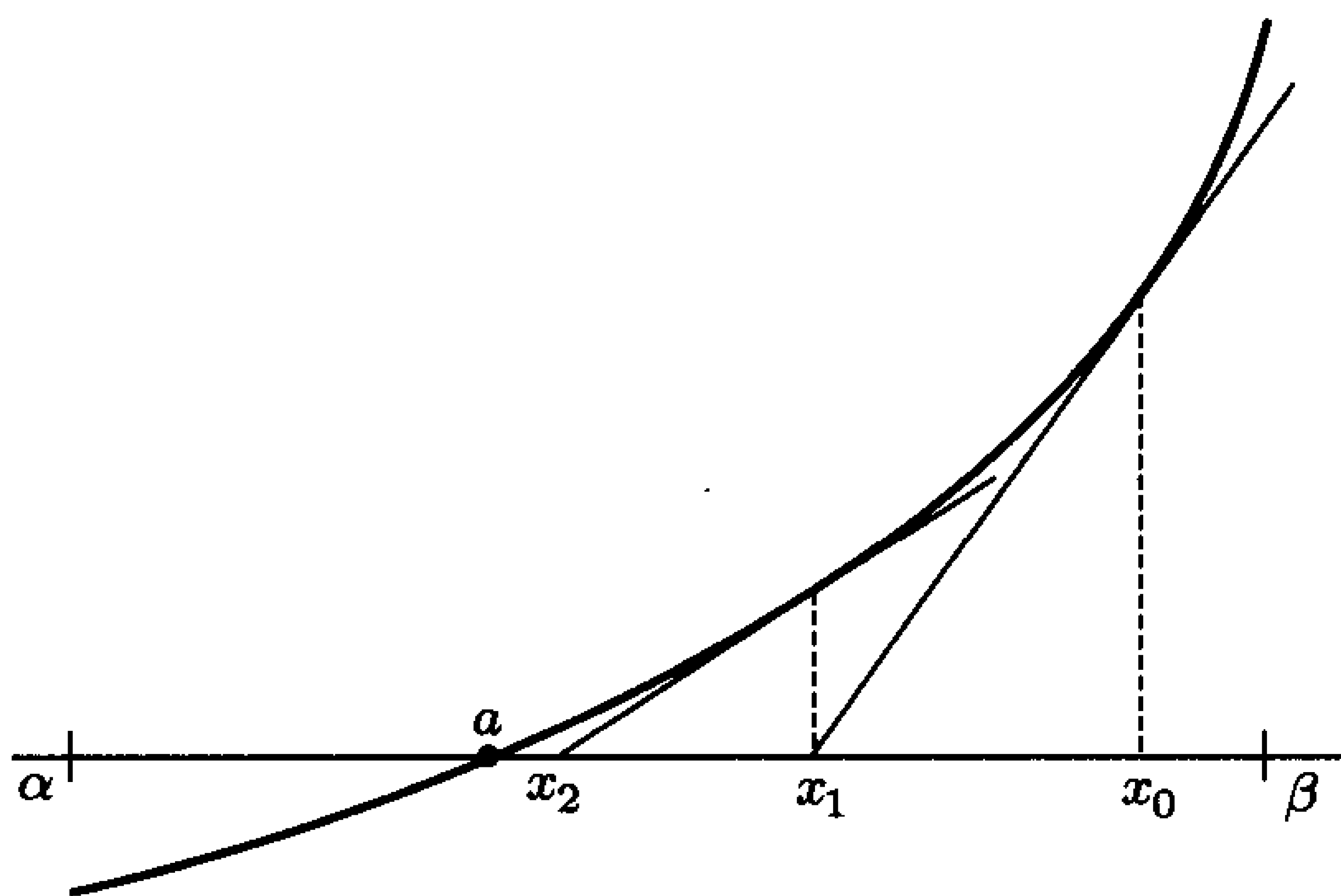


图 68

特别地, 如果 $f(x) = x^k - a$, 也就是要寻求 $\sqrt[k]{a}$, 其中 $a > 0$, 则递推关系 (6) 有形式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}},$$

当 $k=2$ 时, 它就是熟知的公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

构造序列 $\{x_n\}$ 的方法 (6) 称为*牛顿法*.

如果代替序列 (6), 研究由递推关系

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_n), \tag{7}$$

得到的序列, 则称为*改进的牛顿方法*①. 方法的不同之处在于, 只在 x_0 处计算一次导数就一劳永逸了.

研究映射

$$x \mapsto A(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x). \tag{8}$$

根据拉格朗日定理,

$$|A(x_2) - A(x_1)| = |1 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(\xi)| \cdot |x_2 - x_1|,$$

其中 ξ 是位于 x_1 和 x_2 之间的某个点.

因此, 如果在某个区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上满足条件

$$A(I) \subset I \tag{9}$$

和

$$|1 - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(x)| \leqslant q < 1, \tag{10}$$

那么由关系式 (8) 给出的映射 $A : I \to I$ 是这个区间上的压缩映射. 这时, 根据一般原理, 它在区间上有唯一的不动点 a. 而从 (8) 看出, 条件 $A(a) = a$ 等同于关系 $f(a) = 0$.

因此, 当满足条件 (9) 和 (10) 时, 对于任意函数 f, 用基于压缩映像原理的改进的牛顿方法能求出方程 $f(x) = 0$ 的解 a.

练 习

1. 证明, 在压缩映像原理中条件 (1) 不能用更弱的条件

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2)$$

来代替.

2. a) 证明, 如果从完备的度量空间 $(X; d)$ 到自身的映射 $f : X \to X$ 的某次迭代 $f^n : X \to X$ 是压缩映射, 那么 f 有唯一的不动点.

b) 验证, 对于任意区间 $I \subset \mathbb{R}$, 例 2 中所研究的映射 $A : C(I; \mathbb{R}) \to C(I; \mathbb{R})$ 的某次迭代 A^n 是压缩映射.

---

①它在泛函分析中有大量应用, 叫做*牛顿 - 康托罗维奇方法*, 康托罗维奇 (Л. В. Канторович) (1912—1986) —— 杰出的苏联数学家, 他的经济数学研究获诺贝尔奖.

c) 从 b) 推证, 例 2 中求得的局部解 $y = y_0 e^{x-x_0}$ 实际上是原来方程在整个数直线上的解.

3. a) 证明, 对于在区间 $[\alpha, \beta]$ 上具有正导数且在区间的端点取不同符号值的凸函数, 牛顿方法 (6) 实际上给出了收敛到使 $f(a) = 0$ 的点 $a \in [\alpha, \beta]$ 的序列 $\{x_n\}$.

b) 估计序列 (6) 收敛到点 a 的收敛速度.

*第十章　线性赋范空间中的微分学

§1　线性赋范空间

微分法是寻求函数的局部最优线性近似的方法. 因此微分法的任何一般理论都应基于初等的、与线性函数有关的那些概念. 从代数教程里读者已熟知线性空间的概念, 向量组线性相关和线性无关的概念, 线性空间的基底和维数以及子空间等概念. 在这一节中, 我们将给出带有范数的线性空间或者通常称为线性赋范空间的概念. 这类空间在分析中得到了广泛应用. 但是, 我们还是从线性空间的例子开始.

1. 分析中一些线性空间的例子

例 1　n 维实算术空间 $\mathbb{R}^n$ 和复算术空间 $\mathbb{C}^n$ 分别是实数域和复数域上的线性空间的经典例子.

例 2　在分析中除了例 1 所指出的空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 外, 还常遇到最接近它们的实数列或复数列 $x=(x^1,\cdots,x^n,\cdots)$ 组成的空间 l. 在 l 中线性运算像 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 中那样按坐标进行. 与 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 不同的是, 可数向量组

$$\{x_i=(0\cdots,0,x^i=1,0,\cdots),i\in\mathbb{N}\}$$

的任意有限子集均线性无关, 也就说, l 是无穷维 (这里是可数维) 线性空间.

有限支集序列 (即从某项开始数列的所有项等于零的序列) 的全体 $\underset{\circ}{l}$ 是空间 l 的线性子空间, 而且也是无限维的.

例 3　设 $F[a,b]$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的数值 (实数或复数) 函数集. 这个集合关于函数的加法和数与函数的乘积运算是 (相应数域上的) 线性空间.

形如

$$e_\tau(x)=\begin{cases}0, \text{如果 } x\in[a,b] \text{ 且 } x\neq\tau,\\ 1, \text{如果 } x\in[a,b] \text{ 且 } x=\tau\end{cases}$$

的函数全体是 $F[a,b]$ 中的线性无关向量组, 它有连续统的势.

显然, 连续函数集 $C[a,b]$ 是空间 $F[a,b]$ 的子空间.

例 4 设 X_1 和 X_2 是同一个数域上的两个线性空间, 如果在它们的直积 $X_1\times X_2$ 中对元素 $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ 的线性运算是按分量进行的, 则在其中自然就引进了一个线性空间结构.

类似地可在任意有限个线性空间的直积 $X_1\times\cdots\times X_n$ 中引进线性空间的结构. 这全然是空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$ 的翻版.

2. 线性空间中的范数

现在给出基本的

定义 1 设 X 是实数域或复数域上的线性空间.

把每个向量 $x\in X$ 对应于一个实数 $\|x\|$ 的函数 $\|\ \|: X\to\mathbb{R}$ 称为线性空间 X 中的*范数*, 如果它满足以下三个条件:

a) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$ (非退化性);

b) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ (齐次性);

c) $\|x_1+x_2\|\leqslant\|x_1\|+\|x_2\|$ (三角不等式).

定义 2 在其上定义了范数的线性空间称为*线性赋范空间*.

定义 3 称向量的范数值为*这个向量的范数*.

向量的范数总是非负的, 而且, 从 a) 可以看出, 只有零向量, 其范数才等于零.

◀ 事实上, 对于任意的 $x\in X$, 由于 c) 且考虑到 a) 和 b) 就得到

$$0=\|0\|=\|x+(-x)\|\leqslant\|x\|+\|-x\|=\|x\|+|-1|\,\|x\|=2\|x\|. \ ▶$$

从 c) 并利用归纳法即可推出一般的不等式

$$\|x_1+\cdots+x_n\|\leqslant\|x_1\|+\cdots+\|x_n\|, \tag{1}$$

考虑到 b), 从 c) 也容易推出有用的不等式

$$\big|\|x_1\|-\|x_2\|\big|\leqslant\|x_1-x_2\|. \tag{2}$$

任意线性赋范空间都有自然的度量 (线性赋范空间的度量)

$$d(x_1,x_2)=\|x_1-x_2\|. \tag{3}$$

这样定义的函数 $d(x_1,x_2)$ 满足距离公理，这一点可直接从范数定义推出. 因为在 X 中具有线性结构，所以,X 中的度量 d 有两条附加的特殊性质:

$$d(x_1+x,x_2+x)=\|(x_1+x)-(x_2+x)\|$$
$$=\|x_1-x_2\|=d(x_1,x_2),$$

即度量有平移不变性，以及

$$d(\lambda x_1,\lambda x_2)=\|\lambda x_1-\lambda x_2\|=\|\lambda(x_1-x_2)\|$$
$$=|\lambda|\,\|x_1-x_2\|=|\lambda|d(x_1,x_2),$$

即它是齐次的.

定义 4 如果线性赋范空间作为关于自然度量 (3) 的度量空间是完备的，则称它为**完备的线性赋范空间**或者**巴拿赫空间**.

例 5 如果对于向量 $x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$, 当 $p\geqslant 1$ 时，令

$$\|x\|_p:=\left(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

那么从闵可夫斯基不等式可知，我们将得到 $\mathbb{R}^n$ 中的范数. 装备了这个范数的空间 $\mathbb{R}^n$ 用记号 $\mathbb{R}_p^n$ 表示.

可以验证,

$$\|x\|_{p_2}\leqslant\|x\|_{p_1},\quad \text{如果 } 1\leqslant p_1\leqslant p_2, \tag{5}$$

而且，当 $p\to+\infty$ 时，有

$$\|x\|_p\to\max\{|x^1|,\cdots,|x^n|\}. \tag{6}$$

这样，自然令

$$\|x\|_\infty:=\max\{|x^1|,\cdots,|x^n|\}. \tag{7}$$

于是，从 (4) 和 (5) 推出

$$\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_p\leqslant\|x\|_1\leqslant n\|x\|_\infty \quad \text{当 } p\geqslant 1 \text{ 时}. \tag{8}$$

从这个不等式，其实，也可从 $\|x\|_p$ 的定义 (4) 看出，$\mathbb{R}_p^n$ 是完备的赋范空间.

例 6 上述例子可用以下方式作有益的推广. 如果

$$X=X_1\times\cdots\times X_n$$

是赋范空间的直积, 那么令

$$\| x \|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1, \tag{9}$$

即可在 X 中引进向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的范数, 这里 $\| x_i \|$ 是向量 $x_i \in X_i$ 在空间 X_i 中的范数.

当然, 这时不等式 (8) 仍然有效.

以后, 当研究赋范空间的直积时, 如果不特别说明, 总是假设在空间中按照公式 (9) 定义范数 (包括 $p = +\infty$ 的情况).

例 7 设 $p \geqslant 1$. 用 l_p 表示使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ 收敛的实数列或复数列 $x = (x^1, \cdots, x^n, \cdots)$ 的集合, 并且对于 $x \in l_p$ 设

$$\| x \|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

利用闵可夫斯基不等式容易看出, l_p 是关于标准线性运算和范数 (10) 的线性赋范空间. 它是一个无限维空间, $\mathbb{R}_p^n$ 是它的有限维线性子空间.

对于范数 (10), 不等式 (8) 除了最后一个不等号以外全部成立. 不难验证, l_p 是巴拿赫空间.

例 8 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的数值函数的线性空间 $C[a, b]$ 中, 经常采用以下范数:

$$\| f \| := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{11}$$

我们把验证范数公理留给读者完成. 需要指出的是, 这个范数产生已为我们所熟知的 $C[a, b]$ 上的度量 (见第 9 章 §5), 并且这时所产生的度量空间是完备的. 因此具有范数 (11) 的线性空间 $C[a, b]$ 是巴拿赫空间.

例 9 在 $C[a, b]$ 中可以引进另外的范数

$$\| f \|_p := \left(\int_a^b |f|^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1, \tag{12}$$

当 $p \to +\infty$ 时, 它化作为 (11).

容易验证 (可参看, 譬如, 第 9 章 §5), 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, 具有范数 (12) 的空间 $C[a, b]$ 不完备.

3. 向量空间中的数量积

具有数量积的空间是一类重要的赋范空间, 它们是欧氏空间的直接推广
我们给出

定义 5　称在 (复数域上的) 线性空间 X 中给出了一个**埃尔米特形式**, 如果定义了具有以下性质的映射 $\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$:

a) $\langle x_1, x_2 \rangle = \overline{\langle x_2, x_1 \rangle}$

b) $\langle \lambda x_1, x_2 \rangle = \lambda \langle x_1, x_2 \rangle$,

c) $\langle x_1 + x_2, x_3 \rangle = \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle$,

其中 x_1, x_2, x_3 是 X 中的向量, 而 $\lambda \in \mathbb{C}$.

从 a), b), c) 推出,

$$\begin{aligned}
\langle x_1, \lambda x_2 \rangle &= \overline{\langle \lambda x_2, x_1 \rangle} = \overline{\lambda \langle x_2, x_1 \rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle x_2, x_1 \rangle} \\
&= \overline{\lambda} \langle x_1, x_2 \rangle; \\
\langle x_1, x_2 + x_3 \rangle &= \overline{\langle x_2 + x_3, x_1 \rangle} = \overline{\langle x_2, x_1 \rangle} + \overline{\langle x_3, x_1 \rangle} \\
&= \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_1, x_3 \rangle; \\
\langle x, x \rangle &= \overline{\langle x, x \rangle}, \text{ 即 } \langle x, x \rangle \text{ 是实数.}
\end{aligned}$$

埃尔米特形式称为是**正的**, 如果

d) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$,

称它是**非退化的**, 如果

e) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

如果 X 是实数域上的线性空间, 那么自然就应当考察实形式 $\langle x_1, x_2 \rangle$. 这时, 可直接用 $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle$ 代替 a), 这意味着它关于向量变量 x_1, x_2 是对称的.

解析几何中熟知的三维欧氏空间向量的数量积可以作为这种实形式的例子. 由于有这种类似, 采用

定义 6　称线性空间中的非退化正埃尔米特形式为这个空间中的**数量积**.

例 10　$\mathbb{R}^n$ 中向量 $x = (x^1, \cdots, x^n), y = (y^1, \cdots, y^n)$ 的数量积可以定义为

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i, \tag{13}$$

而在 $\mathbb{C}^n$ 中定义为

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y^i}. \tag{14}$$

例 11　在 l_2 中向量 x, y 的数量积可定义为

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x^i \overline{y^i}.$$

这里所写的级数绝对收敛, 因为

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} |x^i \overline{y^i}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^2.$$

例 12 在 $C[a,b]$ 中数量积可以用公式

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b (f\cdot\overline{g})(x)dx \tag{15}$$

来定义.

从积分的性质容易推出, 这时数量积的全部要求都满足.

对于数量积成立以下重要的**柯西-布尼雅可夫斯基不等式**:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle, \tag{16}$$

其中等号成立的充分必要条件是 x 与 y 共线.

◀ 事实上, 设 $a=\langle x,x\rangle, b=\langle x,y\rangle$ 和 $c=\langle y,y\rangle$. 根据条件, $a\geqslant 0$ 且 $c\geqslant 0$, 如果 $c>0$, 那么从

$$0\leqslant \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = a+\overline{b}\lambda+b\overline{\lambda}+c\lambda\overline{\lambda} \tag{17}$$

当 $\lambda=-\dfrac{b}{c}$ 时我们得到

$$0\leqslant a-\frac{\overline{b}b}{c}-\frac{b\overline{b}}{c}+\frac{b\overline{b}}{c}$$

或者

$$0\leqslant ac-b\overline{b}=ac-|b|^2,$$

这与 (16) 完全一样.

$a>0$ 的情况可类似地研究.

如果 $a=c=0$, 那么在 (17) 中置 $\lambda=-b$, 我们得到 $0\leqslant -\overline{b}b-b\overline{b}=-2|b|^2$, 即 $b=0$, 从而, 不等式 (16) 仍成立.

如果 x 与 y 不共线, 则 $0<(x+\lambda y, x+\lambda y)$, 因此, 在这种情形下, 不等式 (16) 严格不等. 而如果 x 与 y 共线, 容易验证, (16) 变成等式. ▶

有数量积的线性空间具有自然的范数

$$\| x \| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{18}$$

和度量

$$d(x,y) := \| x-y \|.$$

利用柯西-布尼雅可夫斯基不等式, 我们来验证, 如果 $\langle x,y\rangle$ 是非退化的正埃尔米特形式, 那么公式 (18) 确实定义一个范数.

◀ 事实上, 利用型 $\langle x,y\rangle$ 是非退化的, 有

$$\| x \| = \sqrt{\langle x,x\rangle}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

其次,

$$\| \lambda x \| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \, \| x \| .$$

最后验证三角形不等式

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| .$$

为此, 我们应当证明

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

或者将它平方且化简后所得的

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle \leqslant 2\sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}.$$

但是

$$\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = 2\mathrm{Re}\langle x, y \rangle \leqslant 2|\langle x, y \rangle|,$$

因此, 从柯西–布尼雅可夫斯基不等式 (16) 即可直接推出所要证明的不等式. ▶

最后我们指出, 具有数量积的有限维线性空间, 与其数域是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 相应, 称之为**欧氏空间**或**埃尔米特空间**. 如果具有数量积的线性空间是无限维的, 当它关于由空间的自然范数导出的度量完备时, 称它为**希尔伯特空间**, 若不完备, 称它为**内积空间**.*

练　习

1. a) 证明, 如果在线性空间 X 中所给度量 $d(x_1, x_2)$ 是平移不变的和齐次的, 那么 X 可以赋予范数 $\| x \| = d(0, x)$.

b) 验证, 线性空间 X 中的范数关于由自然度量 (3) 导出的那个拓扑是连续函数.

c) 证明, 如果 X 是有限维的线性空间, 而 $\| x \|$ 和 $\| x \|'$ 是 X 上的两个范数, 那么总可以找到正数 M, N 使得对于任意向量 $x \in X$ 满足

$$M \| x \| \leqslant \| x \|' \leqslant N \| x \| . \tag{19}$$

d) 以空间 l 中的范数 $\| x \|_1$ 和 $\| x \|_\infty$ 为例说明上述不等式在无限维空间中一般来说是不成立的.

2. a) 证明不等式 (5).

b) 验证关系式 (6).

---

* 译者注. 一般地, 称具有数量积的线性空间为内积空间, 特别地, 如果它关于由自然范数导出的度量完备, 则称它为希尔伯特空间.

c) 证明, 当 $p \to +\infty$ 时, 由公式 (12) 所定义的量 $\| f \|_p$ 趋于由公式 (11) 给出的量 $\| f \|$.

3. a) 验证, 在例 7 中所研究的赋范空间 l_p 是完备的.

b) 证明, 空间 l_p 的由具有限支集 (以零结束) 的序列组成的子空间不是巴拿赫空间.

4. a) 验证, 关系式 (11)、(12) 都给出空间 $C[a, b]$ 中的范数, 并且说明这时在一种情况下得到完备的赋范空间, 而在另一种情况下得到不完备的赋范空间.

b) 公式 (12) 是否给出黎曼可积函数组成的线性空间 $\mathfrak{R}[a, b]$ 中的范数?

c) 为了在所得到的线性空间中由公式 (12) 给出的量成为范数, 在 $\mathfrak{R}[a, b]$ 中应当引进怎样的等价关系?

5. a) 验证, 公式 (13)—(15) 确实给出相应线性空间中的数量积.

b) 由公式 (15) 给出的形式是否是黎曼可积函数空间 $\mathfrak{R}[a, b]$ 中的数量积?

c) 为了在等价类的商空间中问题 b) 的回答是正确的, 在 $\mathfrak{R}[a, b]$ 中应当把怎样的函数看作是一样的.

6. 利用柯西–布尼雅可夫斯基不等式, 对在闭区间 $[a, b]$ 上不取零值的连续实值函数集, 求乘积

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \left(\frac{1}{f}\right)(x)dx\right)$$

的值的下确界.

§2 线性和多重线性算子

1. 定义和例子

我们先来回忆一下以下的定义

定义 1 如果 X 和 Y 是同一个数域上的线性空间 (其数域为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$), 那么, 称映射 $A : X \to Y$ 为**线性映射**, 如果对于空间 X 中的任意向量 x, x_1, x_2 和系数域中的任意数 λ 成立等式

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2),$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x).$$

对于线性算子 $A : X \to Y$, 经常把 $A(x)$ 写作 Ax.

定义 2 称从线性空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的直积到线性空间 Y 的映射 $A : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ 为**多重线性 (n–线性) 映射**, 如果这个映射 $y = A(x_1, \cdots, x_n)$ 关于每个变量当取定其他变量的值时是线性的.

n–线性映射 $A : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ 的集合将用记号 $\mathfrak{L}(X_1, \cdots, X_n; Y)$ 表示. 特别地, 当 $n = 1$ 时我们得到从 $X_1 = X$ 到 Y 的线性映射集 $\mathfrak{L}(X; Y)$.

当 $n=2$ 时, 把多重线性映射称为**双线性的**, $n=3$ 时称为**三重线性的**, 等等.

不要把 n–线性映射 $A \in \mathfrak{L}(X_1, \cdots, X_n; Y)$ 和线性空间 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 的线性映射 $A \in \mathfrak{L}(X; Y)$ 相混 (参看这方面的例 9—11).

如果 $Y = \mathbb{R}$ 或 $Y = \mathbb{C}$, 则常把线性和多重线性映射相应地称为**线性函数**或**多重线性函数**(或者**泛函**, 如果所映的是函数空间的话). 而当 Y 是任意的线性空间时, 常称线性映射 $A: X \to Y$ 为从空间 X 到空间 Y 的**线性算子**.

来看一些线性映射的例子.

例 1 设 $\underset{\circ}{l}$ 是具有限支集数值序列的线性空间. 算子 $A: \underset{\circ}{l} \to \underset{\circ}{l}$ 用以下方式定义:

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) := (1x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, 0, \cdots).$$

例 2 用关系式

$$A(f) := f(x_0)$$

定义泛函 $A: C([a,b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, 其中 $f \in C([a,b]; \mathbb{R})$, 而 x_0 是闭区间 $[a,b]$ 的固定点.

例 3 用关系式

$$A(f) := \int_a^b f(x) dx$$

定义泛函 $A: C([a,b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

例 4 用公式

$$A(f) := \int_a^x f(t) dt$$

定义变换 $A: C([a,b]; \mathbb{R}) \to C([a,b]; \mathbb{R})$, 其中点 x 跑遍闭区间 $[a,b]$.

显然, 这些映射都是线性映射.

让我们来看几个已知的多重线性映射的例子.

例 5 n 个实数的普通乘积 $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ 是 n–线性函数 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}, \cdots, \mathbb{R}; \mathbb{R})$ 的典型例子.

例 6 在实数域 $\mathbb{R}$ 上的欧氏向量空间中, 数量积 $(x_1, x_2) \overset{A}{\longmapsto} \langle x_1, x_2 \rangle$ 是双线性函数.

例 7 三维欧氏空间 E^3 中, 向量的向量积

$$(x_1, x_2) \overset{A}{\longmapsto} [x_1, x_2]$$

是双线性算子, 即 $A \in \mathfrak{L}(E^3, E^3; E^3)$.

例 8 如果 X 是域 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间; $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 X 中的基底; $x = x^i e_i$ 是向量 $x \in X$ 的坐标表示, 那么设

$$A(x_1, \cdots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 \cdots x_1^n \\ \cdots\cdots \\ x_n^1 \cdots x_n^n \end{pmatrix},$$

便得到 n–线性函数 $A : X^n \to \mathbb{R}$.

作为对于所引进例子的有益的补充, 我们还要分析一下线性空间的乘积到线性空间的乘积的线性映射的构造.

例 9 设线性空间 $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ 是线性空间 $X_1, \cdots, X_m$ 的直积, $A : X \to Y$ 是 X 到线性空间 Y 的线性映射. 将每个向量 $x = (x_1, \cdots, x_m) \in X$ 表为

$$x = (x_1, \cdots, x_m) = (x_1, 0, \cdots, 0) + (0, x_2, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0, x_m) \tag{1}$$

并且对于 $x_i \in X_i, i \in \{1, \cdots, m\}$, 设

$$A_i(x_i) := A((0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)) \tag{2}$$

我们看到, $A_i : X_i \to Y$ 是线性映射, 并且

$$A(x) = A_1(x_1) + \cdots + A_m(x_m). \tag{3}$$

因为对于任意的线性映射 $A_i : X_i \to Y$, 由公式 (3) 所定义的映射 $A : X = X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ 显然是线性的, 因此, 我们证明了: 公式 (3) 给出任意线性映射 $A \in \mathfrak{L}(X = X_1 \times \cdots \times X_m; Y)$ 的一般形式.

例 10 根据线性空间 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的直积 $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ 的定义和线性映射 $A : X \to Y$ 的定义, 容易看出, 任意线性映射

$$A : X \to Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$$

都有 $x \mapsto Ax = (A_1 x, \cdots, A_n x) = (y_1, \cdots, y_n) = y \in Y$ 的形式, 其中 $A_i : X \to Y_i$ 是线性映射.

例 11 结合例 9 和例 10, 我们得到, 从线性空间的直积 $X = X_1 \times \cdots \times X_m$ 到另一个线性空间的直积 $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ 的任意线性映射

$$A : X_1 \times \cdots \times X_m = X \to Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$$

都有

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = Ax \tag{4}$$

的形式, 其中 $A_{ij}: X_j \to Y_i$ 是线性映射.

特别地, 如果 $X_1 = X_2 = \cdots = X_m = \mathbb{R}, Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_n = \mathbb{R}$, 那么每个 $A_{ij}: X_j \to Y_i$ 都是 $\mathbb{R} \ni x \mapsto a_{ij}x \in \mathbb{R}$ 的线性映射, 它由一个数 a_{ij} 给出. 于是, 在这种情况下, 关系式 (4) 变成了线性映射 $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 的熟知的数字记法.

2. 算子的范数

定义 3　设 $A: X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ 是从赋范空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的直积到赋范空间 Y 的多重线性算子. 量

$$\| A \| := \sup_{\substack{x_1, \cdots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|A(x_1, \cdots, x_n)|_Y}{|x_1|_{X_1} \cdot \cdots \cdot |x_n|_{X_n}}, \tag{5}$$

称为*多重线性算子 A 的范数*. 其中上确界是对空间 $X_1, \cdots, X_n$ 中除了零向量以外的所有可能的向量组 $x_1, \cdots, x_n$ 取的.

在公式 (5) 的右边, 用 $|\cdot|$ 代替向量范数的记号 $\|\cdot\|$, 位于 $|\cdot|$ 右下方的记号是向量所在的赋范空间. 以后, 对于向量的范数我们将沿用这个表示, 并且, 只要不致产生误会, 就将略去所指空间的记号, 不言而喻地约定, 对于向量, 总是在它所属的空间中计算它的范数 (模) 的. 我们希望用这样的方法使向量范数的符号和作用在赋范向量空间上的线性或多重线性算子范数的符号暂时有所区别.

利用向量范数的性质和多重线性算子的性质, 可以把公式 (5) 改写为以下形式:

$$\| A \| = \sup_{\substack{x_1, \cdots, x_n \\ x_i \neq 0}} \left| A\left(\frac{x_1}{|x_1|}, \cdots, \frac{x_n}{|x_n|}\right) \right| = \sup_{e_1, \cdots, e_n} |A(e_1, \cdots, e_n)| \tag{6}$$

这里最后一个上确界是关于一切可能的分别属于空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的单位向量 $e_1, \cdots, e_n$ 组成的向量组取的.

特别地, 对于线性算子 $A: X \to Y$, 从 (5) 和 (6) 得到

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|e|=1} |Ae|. \tag{7}$$

从多重线性算子 A 的范数的定义 3 推出, 如果 $\| A \| < \infty$, 那么对于任意的向量 $x_i \in X_i, i = 1, \cdots, n$, 成立不等式

$$|A(x_1, \cdots, x_n)| \leqslant \| A \| \, |x_1| \cdot \cdots \cdot |x_n|. \tag{8}$$

特别地, 对于线性算子范数我们得到

$$|Ax| \leqslant \| A \| \, |x|. \tag{9}$$

此外, 从定义 3 得到, 如果多重线性算子的范数有限, 那么它是使不等式

$$|A(x_1, \cdots, x_n)| \leqslant M|x_1| \cdot \cdots \cdot |x_n| \tag{10}$$

对于任意 $x_i \in X_i, i = 1, \cdots, n$, 都成立的那些数 M 的下确界.

定义 4 称多重线性算子 $A: X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ 是*有界多重线性算子*, 如果存在数 $M \in \mathbb{R}$, 使得对于相应空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的任意向量 $x_1, \cdots, x_n$ 成立不等式 (10).

因此, 算子是有界的, 当且仅当算子有有限范数.

根据关系式 (7), 容易理解, 在熟知的情况 $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 下, 线性算子范数的几何意义. 这时, 空间 $\mathbb{R}^m$ 的单位球面在映射 A 的作用下变为 $\mathbb{R}^n$ 中以零点为中心的某个椭球面. 因此, 在这种情况下, A 的范数就是这个椭球的最长的半轴的长.

另一方面, 从 (7) 中第一个等式可以看出, 对于给定的映射, 线性算子的范数也可以解释为在给定的映射下向量的伸长系数的上确界.

不难证明, 对于有限维空间的映射, 多重线性算子的范数总是有限的, 特别地, 线性算子的范数也有限. 在无限维空间的情况, 一般来说这个结论不成立, 这从下面第一个例子可以看出.

我们来计算在例 1—8 中所研究的算子的范数.

例 1′ 设 $\underset{\circ}{l}$ 是赋范空间 l_p 的子空间, 在 l_p 中向量

$$e_n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots)$$

的范数为 1, 那么, 因为 $Ae_n = ne_n$, 显然有 $\| A \| = \infty$.

例 2′ 如果 $|f| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant 1$, 那么 $|Af| = |f(x_0)| \leqslant 1$, 而且当 $f(x_0) = 1$ 时 $|Af| = 1$, 所以 $\| A \| = 1$.

我们指出, 如果在同一个线性空间 $C([a,b];\mathbb{R})$ 上引进积分范数

$$|f| = \int_a^b |f|(x)dx,$$

那么 $\| A \|$ 的计算可以有本质的变化. 事实上, 设 $[a,b] = [0,1]$, 而 $x_0 = 1$, 显然, 闭区间 $[0,1]$ 上的函数 $f_n = x^n$ 的积分范数是 $\dfrac{1}{n+1}$, 可是

$$Af_n = Ax^n = x^n|_{x=1} = 1.$$

由此推出 $\| A \| = \infty$.

以后, 如果不作相反的声明, 总认为空间 $C([a,b];\mathbb{R})$ 具有由函数在 $[a,b]$ 上的最大模所定义的范数.

例 3′　如果 $|f| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant 1$, 那么

$$|Af| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)dx$$
$$\leqslant \int_a^b 1dx = b - a.$$

而当 $f(x) \equiv 1$ 时, 得到 $|A1| = b - a$, 因此 $\| A \| = b - a$.

例 4′　如果 $|f| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant 1$, 那么

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x |f|(t)dt$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}(x - a) = b - a.$$

而 $f(t) \equiv 1$ 时得到

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^x 1dt = b - a,$$

因此, 在这个例子中也有 $\| A \| = b - a$.

例 5′　从定义 3 直接得到, 在给定情况下有 $\| A \| = 1$.

例 6′　由于有柯西 – 布尼雅可夫斯基不等式

$$|\langle x_1, x_2\rangle| \leqslant |x_1| \cdot |x_2|,$$

而且当 $x_1 = x_2$ 时, 这个不等式变为等式, 所以 $\| A \| = 1$.

例 7′　我们知道,

$$|[x_1, x_2]| = |x_1||x_2|\sin\varphi,$$

其中 φ 是向量 x_1, x_2 间的夹角, 因此 $\| A \| \leqslant 1$, 同时, 若向量 x_1 与 x_2 正交, 那么 $\sin\varphi = 1$, 因而 $\| A \| = 1$.

例 8′　如果认为向量取自于 n 维欧氏空间, 那么可以发现, $A(x_1, \cdots, x_n) = \det(x_1, \cdots, x_n)$ 是以 $x_1, \cdots, x_n$ 为边的平行多面体的体积, 并且在保持向量长度不变而 $x_1, \cdots, x_n$ 彼此垂直时体积最大.

因而

$$|\det(x_1, \cdots, x_n)| \leqslant |x_1| \cdot \cdots \cdot |x_n|,$$

而且对于正交向量等号成立. 因此, 在这个问题中有

$$\| A \| = 1.$$

现在我们估计在例 9—11 中所研究的算子的范数，我们将认为，在赋范空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的直积 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 中，按照 §1(例 6) 中的约定引进了向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的范数.

例 9′ 给定线性算子

$$A : X_1 \times \cdots \times X_m = X \to Y,$$

正如前面所指出的, 这相当于给定了由关系式

$$A_i x_i = A((0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)),$$

$i = 1, \cdots, m$ 所定义的 m 个线性算子 $A_i : X_i \to Y$. 这时有公式 (3) 成立, 根据它, 有

$$\begin{aligned} |Ax|_Y &\leqslant \sum_{i=1}^{m} |A_i x_i|_Y \leqslant \sum_{i=1}^{m} \| A_i \| \, |x_i|_{X_i} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \| A_i \| \right) |x|_X. \end{aligned}$$

于是, 证明了

$$\| A \| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \| A_i \| .$$

另一方面, 利用

$$\begin{aligned} |A_i x_i| &= |A((0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0))| \\ &\leqslant \| A \| \, |(0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0)|_X = \| A \| \, |x_i|_{X_i}, \end{aligned}$$

可以推出, 对于任意的 $i = 1, \cdots, m$, 还有估计式

$$\| A_i \| \leqslant \| A \| .$$

例 10′ 考虑到在 $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ 中所引进的范数, 在这种情况下, 立刻得到双侧估计

$$\| A_i \| \leqslant \| A \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| A_i \| .$$

例 11′ 考虑到例 9 和例 10 的结果, 可以推出

$$\| A_{ij} \| \leqslant \| A \| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \| A_{ij} \| .$$

3. 连续算子空间

今后我们感兴趣的不是所有的线性或多重线性算子, 而只是连续的线性或多重线性算子, 因而指出以下断言是有益的.

命题 1　对于从赋范空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的直积到赋范空间 Y 的多重线性算子 $A: X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$, 以下诸条件是彼此等价的:

a) A 有有限范数,

b) A 是有界算子,

c) A 是连续算子,

d) A 是在点 $(0, \cdots, 0) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ 连续的算子.

◀ 我们来证明封闭的一串蕴含关系 a) ⇒ b) ⇒ c) ⇒ d) ⇒ a).

由 (8), 显然有 a) ⇒ b).

我们验证 b) ⇒ c), 即从 (10) 推出算子 A 的连续性. 事实上, 考虑到 A 的多重线性性, 有

$$\begin{aligned}&A(x_1+h_1, x_2+h_2, \cdots, x_n+h_n) - A(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ =\ &A(h_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + A(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, h_n)\\ &+A(h_1, h_2, x_3, \cdots, x_n) + \cdots + A(x_1, \cdots, x_{n-2}, h_{n-1}, h_n)\\ &+\cdots + A(h_1, \cdots, h_n).\end{aligned}$$

由 (10) 我们得到估计式

$$\begin{aligned}&|A(x_1+h_1, x_2+h_2, \cdots, x_n+h_n) - A(x_1, x_2, \cdots, x_n)|\\ \leqslant\ &M(|h_1|\cdot|x_2|\cdot \cdots \cdot|x_n| + \cdots + |x_1|\cdot|x_2|\cdot \cdots \cdot|x_{n-1}|\cdot|h_n|\\ &+|h_1||h_2||x_3|\cdot \cdots \cdot|x_n| + \cdots + |x_1||x_2|\cdot \cdots \cdot|x_{n-1}||h_n| + \cdots + |h_1|\cdot \cdots \cdot|h_n|),\end{aligned}$$

从上式推出 A 在任意点 $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ 的连续性,

特别地, 如果 $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$, 那么从 c) 得到 d).

剩下要证 d) ⇒ a).

对 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使当 $\max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} < \delta$ 时, 有

$$|A(x_1, \cdots, x_n)| < \varepsilon.$$

这样, 对于任意的单位向量组 $e_1, \cdots, e_n$, 得到

$$|A(e_1, \cdots, e_n)| = \frac{1}{\delta^n}|A(\delta e_1, \cdots, \delta e_n)| < \frac{\varepsilon}{\delta^n},$$

即 $\| A \| < \dfrac{\varepsilon}{\delta^n} < \infty$. ▶

从上面 (例 1) 我们已看到, 并非所有的线性算子都有有限范数, 也就是说, 线性算子不总是连续的. 我们也指出过, 破坏线性算子的连续性只可能发生在它定义在无限维空间的情况.

从这里开始, 符号 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 表示线性赋范空间 $X_1,\cdots,X_n$ 的直积到线性赋范空间 Y 的多重线性连续算子的集合.

特别地, $\mathfrak{L}(X;Y)$ 是从 X 到 Y 的所有线性连续算子的集合.

在集合 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 中引进自然的线性空间结构:

$$(A+B)(x_1,\cdots,x_n):=A(x_1,\cdots,x_n)+B(x_1,\cdots,x_n)$$

和

$$(\lambda A)(x_1,\cdots,x_n):=\lambda A(x_1,\cdots,x_n).$$

显然, 如果 $A,B\in\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$, 那么

$$(A+B)\in\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)\quad \text{且}\quad (\lambda A)\in\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y).$$

因此, $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 可以看成线性空间.

命题 2 多重线性算子的范数是连续多重线性算子的线性空间 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 中的范数.

◀ 首先指出, 由命题 1, 对于任意的算子 $A\in\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 都确定了非负数 $\|A\|<\infty$.

不等式 (8) 表明

$$\|A\|=0\Leftrightarrow A=0.$$

其次, 根据多重线性算子范数的定义

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|&=\sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n\\ x_i\neq 0}}\frac{|(\lambda A)(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|\cdot\cdots\cdot|x_n|}\\&=\sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n\\ x_i\neq 0}}\frac{|\lambda||A(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|\cdot\cdots\cdot|x_n|}=|\lambda|\,\|A\|.\end{aligned}$$

最后, 如果 A 和 B 是空间 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 的元素, 那么

$$\begin{aligned}\| A+B \| &= \sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n\\x_i\neq 0}} \frac{|(A+B)(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|\cdot\cdots\cdot|x_n|}\\ &= \sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n\\x_i\neq 0}} \frac{|A(x_1,\cdots,x_n)+B(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|\cdot\cdots\cdot|x_n|}\\ &\leqslant \sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n\\x_i\neq 0}} \frac{|A(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|\cdot\cdots\cdot|x_n|} + \sup_{\substack{x_1,\cdots,x_n\\x_i\neq 0}} \frac{|B(x_1,\cdots,x_n)|}{|x_1|\cdot\cdots\cdot|x_n|}\\ &= \| A \| + \| B \|. \blacktriangleright\end{aligned}$$

现在, 记号 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 将用以表示装备了上述算子范数的 n–线性算子的线性空间. 特别地, $\mathfrak{L}(X;Y)$ 是从 X 到 Y 的线性连续算子的赋范空间.

对命题 2 作以下有益的补充

注 如果 X,Y,Z 是赋范空间, 并且 $A\in\mathfrak{L}(X;Y)$, 而 $B\in\mathfrak{L}(Y;Z)$, 那么

$$\| B\circ A \| \leqslant \| B \|\cdot\| A \|.$$

◀ 事实上,

$$\begin{aligned}\| B\circ A \| &= \sup_{x\neq 0}\frac{|(B\circ A)x|}{|x|} \leqslant \sup_{x\neq 0}\frac{\| B \|\,|Ax|}{|x|}\\ &= \| B \| \sup_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|} = \| B \|\cdot\| A \|. \blacktriangleright\end{aligned}$$

命题 3 如果 Y 是完备的赋范空间, 那么 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$ 也是完备的赋范空间.

◀ 我们将对线性连续算子空间 $\mathfrak{L}(X;Y)$ 进行证明. 至于一般情形, 从下面的讨论中看出, 所不同的只是更烦琐的写法.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是 $\mathfrak{L}(X;Y)$ 中的基本列. 对任意的 $x\in X$, 因为

$$|A_m x - A_n x| = |(A_m-A_n)x| \leqslant \| A_m - A_n \|\,|x|,$$

显然, 对任意 $x\in X$, 序列 $A_1x,A_2x,\cdots,A_nx,\cdots$ 在 Y 中是基本的. 由于 Y 完备, 它在 Y 中有极限, 我们用 Ax 表示这个极限.

于是

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

我们来证明 $A: X\to Y$ 是线性连续算子.

A 的线性性从

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_{n\to\infty}(\lambda_1 A_n x_1 + \lambda_2 A_n x_2)$$
$$= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2$$

推出.

其次, 对于任意固定的 $\varepsilon > 0$ 和充分大的值 $m, n \in \mathbb{N}$, 满足 $\| A_m - A_n \| < \varepsilon$, 因此对任意向量 $x \in X$, 有

$$|A_m x - A_n x| \leqslant \varepsilon |x|.$$

在最后的不等式中令 $m \to \infty$ 取极限并利用向量范数的连续性, 我们得到

$$|Ax - A_n x| \leqslant \varepsilon |x|.$$

这样一来,$\| A - A_n \| \leqslant \varepsilon$, 于是, 由 $A = A_n + (A - A_n)$ 推出

$$\| A \| \leqslant \| A_n \| + \varepsilon.$$

因此, 我们证明了 $A \in \mathfrak{L}(X; Y)$ 和 $\| A - A_n \| \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时, 也即在空间 $\mathfrak{L}(X; Y)$ 的范数意义下 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$. ►

最后, 我们给出一个在研究高阶微分时需要的关于多重线性算子空间的专门的注.

命题 4 **对于任意的** $m \in \{1, \cdots, n\}$, **在空间** $\mathfrak{L}(X_1, \cdots, X_m; \mathfrak{L}(X_{m+1}, \cdots, X_n; Y))$ **和** $\mathfrak{L}(X_1, \cdots, X_n; Y)$ **之间存在保持线性结构和范数的双射.**

◄ 我们给出这个同构.

设 $\mathfrak{B} \in \mathfrak{L}(X_1, \cdots, X_m; \mathfrak{L}(X_{m+1}, \cdots, X_n; Y))$, 也即

$$\mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_m) \in \mathfrak{L}(X_{m+1}, \cdots, X_n; Y).$$

令

$$A(x_1, \cdots, x_n) := \mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_m)(x_{m+1}, \cdots, x_n). \tag{11}$$

那么

$$\| \mathfrak{B} \| = \sup_{\substack{x_1, \cdots, x_m \\ x_i \neq 0}} \frac{\| \mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_m) \|}{|x_1| \cdot \cdots \cdot |x_m|}$$
$$= \sup_{\substack{x_1, \cdots, x_m \\ x_i \neq 0}} \frac{\sup\limits_{\substack{x_{m+1}, \cdots, x_n \\ x_j \neq 0}} \dfrac{|\mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_m)(x_{m+1}, \cdots, x_n)|}{|x_{m+1}| \cdot \cdots \cdot |x_n|}}{|x_1| \cdot \cdots \cdot |x_m|}$$
$$= \sup_{\substack{x_1, \cdots, x_n \\ x_k \neq 0}} \frac{|A(x_1, \cdots, x_n)|}{|x_1| \cdot \cdots \cdot |x_n|} = \| A \|.$$

我们把验证关系式 (11) 给出所研究的线性空间间的同构这件事, 留给读者自己完成. ▶

特别地, n 次利用命题 4, 我们就得到空间 $\mathfrak{L}(X_1;\mathfrak{L}(X_2;\cdots;\mathfrak{L}(X_n;Y)\cdots))$ 同构于 n-线性算子空间 $\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$.

练　习

1. a) 证明, 如果 $A:X\to Y$ 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性算子, 并且空间 X 是有限维的, 那么 A 是连续算子.

b) 对于多重线性算子证明类似于 a) 中所叙述的结论.

2. 称两个线性赋范空间是*同构的*, 如果作为线性向量空间在它们之间存在那样的同构, 它与它的逆都是连续的线性算子.

a) 证明, 维数相同的有限维线性赋范空间是同构的.

b) 证明, 对于无限维的情况一般来说结论 a) 不成立.

c) 在空间 $C([a,b];\mathbb{R})$ 中引进两个范数, 使得 $C([a,b];\mathbb{R})$ 到自身的恒等映射不是所得的两个赋范空间间的连续映射.

3. 证明, 如果多重线性算子在某个点连续, 那么它处处连续.

4. 设 $A:E^n\to E^n$ 是 n 维欧氏空间的线性映射, $A^*:E^n\to E^n$ 是 A 的共轭映射.

证明:

a) 算子 $A\cdot A^*:E^n\to E^n$ 的所有的特征值是非负的.

b) 如果 $\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 是算子 $A\cdot A^*$ 的特征值, 那么 $\|A\|=\sqrt{\lambda_n}$.

c) 如果算子 A 有逆 $A^{-1}:E^n\to E^n$, 那么 $\|A^{-1}\|=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$.

d) 如果 (a^i_j) 是映射 $A:E^n\to E^n$ 在某个基底下的矩阵, 那么成立估计式

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a^i_j)^2}\leqslant\|A\|\leqslant\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}(a^i_j)^2}\leqslant\sqrt{n}\,\|A\|.$$

5. 设 $\mathbb{P}[x]$ 是关于变量 x 的实系数多项式的线性空间. 向量 $P\in\mathbb{P}[x]$ 的范数由公式

$$\|P\|=\sqrt{\int_0^1 P^2(x)dx}$$

定义.

a) 在所得到的空间中, 求导运算 $D(P(x)):=P'(x)$ 的算子 $D:\mathbb{P}[x]\to\mathbb{P}[x]$ 是否有界?

b) 求乘以 x 的算子 $F:\mathbb{P}[x]\to\mathbb{P}[x](F(P(x)):=x\cdot P(x))$ 的范数.

6. 以 $\mathbb{R}^2$ 中投影算子为例, 说明不等式 $\|B\cdot A\|\leqslant\|B\|\cdot\|A\|$ 可以是严格的.

§3 映射的微分

1. 在一点可微的映射

定义 1 设 X, Y 是赋范空间. 称从集合 $E \subset X$ 到 Y 的映射 $f: E \to Y$ 在 E 的内点 $x \in E$ **可微**, 如果存在线性连续映射 $L(x): X \to Y$, 使得

$$f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x; h), \tag{1}$$

其中 $\alpha(x; h) = o(h)$ 当 $h \to 0, x + h \in E$[①]

定义 2 称满足关系式 (1) 的关于 h 的线性函数 $L(x) \in \mathfrak{L}(X; Y)$ 为映射 $f: E \to Y$ 在点 x 的**微分, 切映射或导数**.

像以前那样, 我们将用记号 $df(x), Df(x)$ 或 $f'(x)$ 之一表示 $L(x)$.

这样一来, 我们看到, 这里引进的映射在一点可微性的更一般的定义几乎是第 8 章 §2 中我们已知的定义的逐字逐句的重复, 那里研究的是 $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ 的情况. 因此, 今后我们将不加说明地使用那里引进的概念, 例如函数的增量, 自变量的增量, 在一点的切空间, 并保留它们相应的记号.

但是, 我们要验证以下一般形式的

命题 1 *如果映射 $f: E \to Y$ 在集合 $E \subset X$ 的内点 x 可微, 那么它在这点的微分 $L(x)$ 是唯一的.*

◀ 我们验证微分的唯一性.

设 $L_1(x)$ 和 $L_2(x)$ 都是满足关系式 (1) 的线性映射, 即

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - L_1(x)h &= \alpha_1(x; h), \\ f(x+h) - f(x) - L_2(x)h &= \alpha_2(x; h), \end{aligned} \tag{2}$$

其中当 $h \to 0, x + h \in E$ 时, $\alpha_i(x; h) = o(h), i = 1, 2$.

那么, 假定 $L(x) = L_2(x) - L_1(x)$ 和 $\alpha(x) = \alpha_2(x; h) - \alpha_1(x; h)$, 从 (2) 的第一个等式减去第二个等式后, 我们得到

$$L(x)h = \alpha(x; h).$$

这里 $L(x)$ 是关于 h 的线性映射, 而 $\alpha(x; h) = o(h)$ 当 $h \to 0, x + h \in E$ 时. 取辅助的数值参数 λ, 可得

$$|L(x)h| = \frac{|L(x)(\lambda h)|}{|\lambda|} = \frac{|\alpha(x; \lambda h)|}{|\lambda h|}|h| \to 0, \text{ 当 } \lambda \to 0.$$

---

①写法 "$\alpha(x; h) = o(h)$ 当 $h \to 0, x + h \in E$" 自然是指

$$\lim_{h \to 0, x+h \in E} |\alpha(x; h)|_Y \cdot |h|_X^{-1} = 0.$$

因此, 对任意的 $h \neq 0$ (请注意, x 是 E 的内点), $L(x)h = 0$. 由于 $L(x)0 = 0$, 这就证明了对任意值 h, 有等式 $L_1(x)h = L_2(x)h$ 成立. ►

如果 E 是 X 的开子集, 而 $f: E \to Y$ 是在每个点 $x \in E$ 都可微的映射, 即 f 在 E 上可微, 那么由所证的映射在点 x 的微分的唯一性, 在集合 E 上产生一个函数 $E \ni x \mapsto f'(x) \in \mathfrak{L}(X;Y)$, 记作 $f': E \to \mathfrak{L}(X;Y)$, 叫做 f 的**导数**或**原映射** $f: E \to Y$ **的导映射**. 这个函数在一点 $x \in E$ 的值 $f'(x)$ 是一个线性连续映射 $f'(x) \in \mathfrak{L}(X;Y)$, 它是函数 f 在具体给定一点 $x \in E$ 处的**微分或导数**.

我们指出, 由于定义 1 中所说的线性映射 $L(x)$ 的连续性的要求, 从等式 (1) 推出, 在一点可微的映射必定在这点连续.

其逆自然是不对的, 我们已经见过数值函数的例子.

我们还要作以下重要的

注 如果把映射在一点 a 可微性的条件写成如下形式:

$$f(x) - f(a) = L(a)(x - a) + \alpha(a; x),$$

其中 $\alpha(a; x) = o(x - a)$ 当 $x \to a$ 时, 那么下面的事情就变成显然的了: 定义 1 实际上是对任意仿射空间 $(A, X), (B, Y)$ 的映射 $f: A \to B$ 下的, 其中 X 和 Y 是线性赋范空间. 这样的仿射空间经常会遇到, 称为**仿射赋范空间**. 因此, 当使用微分演算时, 记住这个注是有益的.

以后, 如果没有特别的说明, 无论是线性空间, 还是仿射赋范空间都同样对待, 只是为了简化书写, 我们都使用向量空间的记号.

2. 微分法的一般法则

从定义 1 得出以下微分法运算的一般性质. 在下面引用的公式里, X, Y, Z 是赋范空间, 而 U 和 V 分别是 X 和 Y 中的开集.

a. 微分法的线性性

如果映射 $f_i: U \to Y, i = 1, 2$, 在点 $x \in U$ 可微, 那么它们的线性组合 $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2): U \to Y$ 在点 x 也可微, 而且

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(x) = \lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x).$$

因此, 映射的线性组合的微分是这些映射的微分的相应线性组合.

b. 复合映射的微分法

如果映射 $f: U \to V$ 在点 $x \in U \subset X$ 可微, 而映射 $g: V \to Z$ 在点 $f(x) = y \in V \subset Y$ 可微, 那么这两个映射的复合 $g \circ f$ 在点 x 可微, 而且

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

因此, 复合的微分等于微分的复合.

c. 逆映射的微分法

设 $f: U \to Y$ 是在点 $x \in U \subset X$ 连续的映射, 它在点 $y = f(x)$ 的邻域有逆映射 $f^{-1}: V \to X$, 并且逆映射在点 $y = f(x)$ 连续.

如果映射 f 在点 x 可微, 并且它在这点的切映射 $f'(x) \in \mathfrak{L}(X; Y)$ 有连续逆 $[f'(x)]^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X)$, 那么映射 f^{-1} 在点 $y = f(x)$ 可微, 而且

$$[f^{-1}]'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}.$$

因此, 逆映射的微分是一个线性映射, 它是原映射在相应点的微分的逆.

我们略去命题 a, b, c 的证明, 因为它们类似于第 8 章 §3 里在 $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$ 的情况下所给出的那些证明.

3. 一些例子

例 1 如果 $f: U \to Y$ 是点 x 的邻域 $U = U(x) \subset X$ 上的常值映射, 即对任何 $u \in U$ 有 $f(u) = y_0 \in Y$, 那么 $f'(x) = 0 \in \mathfrak{L}(X; Y)$.

◀ 实际上, 在这种情况下, 显有

$$f(x+h) - f(x) - 0h = y_0 - y_0 - 0 = 0 = o(h). \ ▶$$

例 2 如果映射 $f: X \to Y$ 是线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的线性连续映射, 那么在任意点 $x \in X, f'(x) = f \in \mathfrak{L}(X; Y)$.

◀ 事实上,

$$f(x+h) - f(x) - fh = fx + fh - fx - fh = 0. \ ▶$$

我们指出, 实际上, 这里倒是应有 $f'(x) \in \mathfrak{L}(TX_x; TY_{f(x)})$, 且 h 是切空间 TX_x 的向量. 然而在线性空间里, 向量到任意点 $x \in X$ 的位移是确定的, 这使我们可以把切空间 TX_x 和线性空间 X 本身视为同一. (类似地, 在仿射空间 (A, X) 的情况, "附着" 在点 $a \in A$ 上的向量的空间 TA_a, 可以与该仿射空间的向量空间 X 视为同一.) 因此, 在 X 中选取基底后, 可把它分别送到所有的切空间 TX_x. 这意味着, 譬如, 如果 $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^n$, 并且映射 $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ 由矩阵 (a_i^j) 给出, 那么在任意点 $x \in \mathbb{R}^m, f$ 的切映射 $f'(x): T\mathbb{R}_x^m \to T\mathbb{R}_{f(x)}^n$ 也将由同一个矩阵给出.

特别地, 对于从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射 $x \overset{f}{\longmapsto} ax = y$, 当 $x \in \mathbb{R}$ 且 $h \in T\mathbb{R}_x \sim \mathbb{R}$ 时, 我们得到相应的映射

$$T\mathbb{R}_x \ni h \overset{f'}{\longmapsto} ah \in T\mathbb{R}_{f(x)}.$$

根据所作的说明, 我们约定把例 2 的结果叙述为: 线性赋范空间的线性映射 $f: X \to Y$ 的导映射 $f': X \to Y$ 是常值映射, 而且在任意点 $x \in X, f'(x) = f$.

例 3　从复合映射的微分法则和例 2 的结果可以推出, 如果 $f: U \to Y$ 是定义在点 $x \in X$ 的邻域 $U = U(x) \subset X$ 中的映射, 在 x 处可微, 而 $A \in \mathfrak{L}(Y; Z)$, 那么

$$(A \circ f)'(x) = A \circ f'(x).$$

对于数值函数, 当 $Y = Z = \mathbb{R}$ 时, 这正好是熟知的把常数因子提到微分号外的运算法则.

例 4　还是设 $U = U(x)$ 为赋范空间 X 的点 x 的邻域, 而

$$f: U \to Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$$

是从 U 到空间 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的直积中的映射.

给定这样一个映射相当于给定了 n 个映射 $f_i: U \to Y_i, i = 1, \cdots, n$, 它们与 f 在 U 的每一个点 x 处都满足关系式

$$x \mapsto f(x) = y = (y_1, \cdots, y_n) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)).$$

现在, 如果在公式 (1) 中考虑到

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \cdots, f_n(x+h) - f_n(x)),$$
$$L(x)h = (L_1(x)h, \cdots, L_n(x)h),$$
$$\alpha(x; h) = (\alpha_1(x; h), \cdots, \alpha_n(x; h)),$$

那么引用 §1 中例 6 和 §2 中例 10 的结果可以推出, 所研究的映射 f 在点 x 可微, 当且仅当它的所有分量 $f_i: U \to Y_i (i = 1, \cdots, n)$ 可微, 而且在映射 f 可微的情况下, 成立等式

$$f'(x) = (f_1'(x), \cdots, f_n'(x)).$$

例 5　现在设 $A \in \mathfrak{L}(X_1, \cdots, X_n; Y)$, 即 A 是从线性赋范空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的乘积空间 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 到线性赋范空间 Y 中的连续的 n–线性算子.

我们证明映射

$$A: X_1 \times \cdots \times X_n = X \to Y$$

的可微性并求它的微分.

◀ 利用 A 的多重线性性, 我们得到

$$\begin{aligned}
&A(x+h) - A(x) \\
&= A(x_1 + h_1, \cdots, x_n + h_n) - A(x_1, \cdots, x_n) \\
&= A(x_1, \cdots, x_n) + A(h_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots \\
&\quad + A(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n) + A(h_1, h_2, x_3, \cdots, x_n) + \cdots \\
&\quad + A(x_1, \cdots, x_{n-2}, h_{n-1}, h_n) + \cdots \\
&\quad + A(h_1, \cdots, h_n) - A(x_1, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

因为在 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ 中范数满足不等式

$$|x_i|_{X_i} \leqslant |x|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|_{X_i},$$

而算子 A 的范数 $\| A \|$ 有限, 并且

$$|A(\xi_1, \cdots, \xi_n)| \leqslant \| A \| \, |\xi_1| \cdot \cdots \cdot |\xi_n|,$$

可以推出

$$\begin{aligned}
& A(x+h) - A(x) \\
= {} & A(x_1 + h_1, \cdots, x_n + h_n) - A(x_1, \cdots, x_n) \\
= {} & A(h_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + A(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n) + \alpha(x; h),
\end{aligned}$$

其中 $\alpha(x; h) = o(h)$ 当 $h \to 0$ 时.

但是算子

$$L(x)h = A(h_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + A(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n)$$

是关于 $h = (h_1, \cdots, h_n)$ 的线性连续 (因为 A 连续) 算子.

因此有

$$\begin{aligned}
A'(x)h &= A'(x_1, \cdots, x_n)(h_1, \cdots, h_n) \\
&= A(h_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + A(x_1, \cdots, x_{n-1}, h_n)
\end{aligned}$$

或者

$$dA(x_1, \cdots, x_n) = A(dx_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + A(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n). \quad ◀$$

特别地, 如果:

a) $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ 是 n 个数值变量的乘积, 那么

$$d(x_1 \cdot \cdots \cdot x_n) = dx_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n + \cdots + x_1 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot dx_n;$$

b) $\langle x_1, x_2 \rangle$ 是 E^3 中的数量积, 那么

$$d\langle x_1, x_2 \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle;$$

c) $[x_1, x_2]$ 是 E^3 中的向量积, 那么

$$d[x_1, x_2] = [dx_1, x_2] + [x_1, dx_2];$$

d) (x_1, x_2, x_3) 是 E^3 中的混合积, 那么

$$d(x_1, x_2, x_3) = (dx_1, x_2, x_3) + (x_1, dx_2, x_3) + (x_1, x_2, dx_3);$$

e) $\det(x_1, \cdots, x_n)$ 是由具确定基底的 n 维线性空间 X 的 n 个向量 $x_1, \cdots, x_n$ 的坐标组成的矩阵的行列式, 那么

$$d(\det(x_1, \cdots, x_n)) = \det(dx_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \det(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n).$$

例 6 设 U 是 $\mathfrak{L}(X;Y)$ 的子集, 它由那样一些线性连续算子 $A: X \to Y$ 组成, A 有连续的 (即属于 $\mathfrak{L}(Y;X)$ 的) 逆算子 $A^{-1}: Y \to X$. 考察使每个算子 $A \in U$ 对应于它的逆算子 $A^{-1} \in \mathfrak{L}(Y;X)$ 的映射

$$U \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathfrak{L}(Y;X).$$

下面要证明的命题 2 使我们能够回答关于这个映射的可微性问题.

命题 2 *如果 X 是完备的空间且 $A \in U$, 那么对于满足条件*

$$\| h \| < \| A^{-1} \|^{-1}$$

的任意 $h \in \mathfrak{L}(X;Y)$, 算子 $A + h$ 也属于 U, 并且成立关系式

$$(A + h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} h A^{-1} + o(h) \tag{3}$$

当 $h \to 0$ 时.

◀ 因为

$$(A + h)^{-1} = (A(E + A^{-1}h))^{-1} = (E + A^{-1}h)^{-1} A^{-1}, \tag{4}$$

所以只需求算子 $(E + A^{-1}h) \in \mathfrak{L}(X;X)$ 的逆算子

$$(E + A^{-1}h)^{-1},$$

其中 E 是空间 X 到自身的恒等 (单位) 映射.*

---

* 译者注. 这一段实际上是对问题的分析, 在确认 $A+h$ 或 $E + A^{-1}h$ 可逆前, 我们不能断言 (4) 成立. 这一段作如下改写可能更合适:

"由于 A 可逆, 可得 $A + h = A(E + A^{-1}h)$, 其中 E 是空间 X 中的恒等映射. 由此, 并注意 A 可逆, 可知, 为了证明 $A + h$ 可逆, 只要证明 $E + A^{-1}h$ 可逆即可. 倘如是, 有

$$(A + h)^{-1} = (A(E + A^{-1}h))^{-1} = (E + A^{-1}h)^{-1} A^{-1} \tag{4}$$

现在来证算子 $(E + A^{-1}h) \in \mathfrak{L}(X;X)$ 有属于 $\mathfrak{L}(X;X)$ 的逆算子."

设 $\Delta := -A^{-1}h$. 考虑到 §2 中对命题 2 所作的附注, 可以看出 $\| \Delta \| \leqslant \| A^{-1} \| \cdot \| h \|$, 因此, 由对算子 h 所作的假定, 可以认为 $\| \Delta \| \leqslant q < 1$.

现在验证

$$(E - \Delta)^{-1} = E + \Delta + \Delta^2 + \cdots + \Delta^n + \cdots, \tag{5}$$

其中位于右边的级数是由线性算子 $\Delta^n = (\Delta \circ \cdots \circ \Delta) \in \mathfrak{L}(X; X)$ 组成的.

由于 X 完备,(由 §2 中命题 3) 线性赋范空间 $\mathfrak{L}(X; X)$ 是完备的. 那么, 从 $\| \Delta^n \| \leqslant \| \Delta \|^n \leqslant q^n, |q| < 1$, 从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛, 立即得到上述由空间 $\mathfrak{L}(X; X)$ 的向量组成的 (5) 式右端的级数的收敛性.

直接验证

$$\begin{aligned}&(E + \Delta + \Delta^2 + \cdots)(E - \Delta)\\ &= (E + \Delta + \Delta^2 + \cdots) - (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \cdots) = E\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(E - \Delta)(E + \Delta + \Delta^2 + \cdots)\\ &= (E + \Delta + \Delta^2 + \cdots) - (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \cdots) = E\end{aligned}$$

表明, 存在 $(E - \Delta)^{-1} \in \mathfrak{L}(X, X)$ 且 (5) 成立.

值得指出的是, 在所给情况下, 所研究级数的绝对收敛性 (这里的收敛性指依范收敛性) 保证了对级数可自由地进行算术运算 (交换级数的项!).

比较关系式 (4) 和 (5) 推出, 当 $\| h \| \leqslant \| A^{-1} \|^{-1}$ 时,

$$(A + h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + (A^{-1}h)^2A^{-1} - \cdots + (-1)^n(A^{-1}h)^nA^{-1} + \cdots \tag{6}$$

因为

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}h)^n A^{-1} \right\| &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \| A^{-1}h \|^n \| A^{-1} \|\\ &\leqslant \| A^{-1} \|^3 \| h \|^2 \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{\| A^{-1} \|^3}{1 - q} \| h \|^2,\end{aligned}$$

所以从 (6), 便得等式 (3). ►

现在回到例 6, 在空间 Y 完备的情形, 所研究的映射 $A \stackrel{f}{\longmapsto} A^{-1}$ 显然可微, 而且

$$df(A)h = d(A^{-1})h = -A^{-1}hA^{-1}.$$

特别地, 这意味着如果 A 是非退化的方阵, A^{-1} 是它的逆矩阵, 则当以元素接近于零的矩阵 h 对矩阵 A 扰动时, 扰动后的矩阵 $A + h$ 的逆矩阵 $(A + h)^{-1}$ 的一阶近似可按公式

$$(A + h)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}hA^{-1}$$

求出.

显然, 更精确的公式可以从等式 (6) 得到.

例 7 设 X 是完备的线性赋范空间, 如果 $A \in \mathfrak{L}(X;X)$, 则由

$$\exp A := E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \tag{7}$$

定义一个重要映射

$$\exp : \mathfrak{L}(X;X) \to \mathfrak{L}(X;X).$$

位于 (7) 中的级数是收敛的, 因为 $\mathfrak{L}(X;X)$ 是完备空间, 并且 $\left\|\frac{1}{n!}A^n\right\| \leqslant \frac{\| A \|^n}{n!}$, 而数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\| A \|^n}{n!}$ 收敛.

不难验证

$$\exp(A+h) = \exp A + L(A)h + o(h) \text{ 当 } h \to 0 \text{ 时}, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} L(A)h = h &+ \frac{1}{2!}(Ah + hA) + \frac{1}{3!}(A^2h + AhA + hA^2) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}(A^{n-1}h + A^{n-2}hA + \cdots + AhA^{n-2} + hA^{n-1}) + \cdots \end{aligned}$$

从而 $\| L(A) \| \leqslant \exp \| A \| = e^{\|A\|}$, 因此,

$$L(A) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{L}(X;X); \mathfrak{L}(X;X)).$$

这样一来, 映射 $\mathfrak{L}(X;X) \ni A \mapsto \exp A \in \mathfrak{L}(X;X)$ 对于任意值 A 可微.

我们指出, 如果算子 A 和 h 可交换, 即 $Ah = hA$, 那么从 $L(A)h$ 的表达式看出, 这时有 $L(A)h = (\exp A)h$. 特别地, 对于 $X = \mathbb{R}$ 或者 $X = \mathbb{C}$, 代替 (8) 重新得到

$$\exp(A+h) = \exp A + (\exp A)h + o(h) \text{ 当 } h \to 0. \tag{9}$$

例 8 我们试图给出有一个不动点 O 的旋转刚体 (陀螺) 的瞬时速度的数学描述. 在点 O 处, 我们考察与物体固连的标准正交架 $\{e_1, e_2, e_3\}$. 很明显, 物体的位置完全由这个标准架的位置来描述, 而标架的向量运动的瞬时速度组 $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3\}$ 显然完全刻画出旋转物体的瞬时速度. 标架 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 本身在时刻 t 的位置可以用正交矩阵 $(\alpha_i^j), i, j = 1, 2, 3$, 给出, 这个矩阵由向量 e_1, e_2, e_3 关于空间的某个不动的标准正交架的坐标组成. 因此, 从 $\mathbb{R}$ (时间轴) 到特殊的三阶正交矩阵群 $SO(3)$ 的映射 $t \to O(t)$ 对应于一个陀螺运动. 因此, 按约定用 $\{\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3\}$ 来描述的物体的旋转速度可由矩阵 $\dot{O}(t) =: (\omega_i^j)(t) = (\dot{\alpha}_i^j)(t)$ 给出, 它是矩阵 $O(t) = (\alpha_i^j)(t)$ 关于时间的导数.

因为 $O(t)$ 是正交矩阵, 所以在任何时刻 t 它都满足关系式

$$O(t)O^*(t) = E, \tag{10}$$

其中 $O^*(t)$ 是 $O(t)$ 的转置矩阵, 而 E 是单位矩阵.

我们指出, 矩阵的乘积 $A \cdot B$ 是 A 和 B 的双线性函数. 而转置矩阵的导数显然等于已知矩阵导数的转置. 考虑到这些, 对等式 (10) 求微分, 我们得到

$$\dot{O}(t)O^*(t) + O(t)\dot{O}^*(t) = 0$$

或者

$$\dot{O}(t) = -O(t)\dot{O}^*(t)O(t), \tag{11}$$

因为 $O^*(t)O(t) = E$.

特别地, 如果认为在时刻 t, 标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 与空间标架重合,* 那么 $O(t) = E$, 并且从 (11) 得到

$$\dot{O}(t) = -\dot{O}^*(t), \tag{12}$$

也就是说, 在基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 下 $\{\dot{\boldsymbol{e}}_1, \dot{\boldsymbol{e}}_2, \dot{\boldsymbol{e}}_3\}$ 的向量的坐标矩阵 $\dot{O}(t) =: \Omega(t) = (\omega_i^j)$ 是反对称矩阵;

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 陀螺的瞬时速度实际上由三个独立参量描述, 它在我们的讨论中是由关系式 (10) 推出来的, 从物理的观点这也是自然的, 因为标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的位置, 从而物体本身的位置, 由三个独立参量来描述 (譬如在力学中常取欧拉角).

如果把附着于点 O 的每个空间向量

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2 + \omega^3\boldsymbol{e}_3$$

与相对于由这个向量确定的轴具有角速度 $|\boldsymbol{\omega}|$ 的空间右旋联系起来, 那么从所得的结果不难断定, 在每一瞬间 t 物体都有自己的瞬时转动轴, 并且物体在给定时刻的速度可以用旋转速度的瞬时向量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 描述 (见练习 5).

4. 映射的偏导数

设 $U = U(a)$ 是赋范空间 $X_1, \cdots, X_m$ 的直积中点 $a \in X = X_1 \times \cdots \times X_m$ 的邻域, $f : U \to Y$ 是 U 到赋范空间 Y 中的映射. 这时

$$y = f(x) = f(x_1, \cdots, x_m), \tag{13}$$

---

* 译者注. 这里是把所考察的时刻 t 时的标架 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 取作不动的标准正交架来研究陀螺在时刻 t 的瞬时运动. 力学和几何学中经常使用这种方法, 叫活动标架法.

在 (13) 中固定除变量 x_i 以外的所有变量, 设

$$x_k = a_k,\quad k \in \{1, \cdots, m\} \setminus \{i\},$$

我们得到定义在空间 X_i 的点 a_i 的某个邻域中 U_i 的函数

$$f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_m) =: f_i(x) =: \varphi_i(x_i), \tag{14}$$

定义 3 称映射 $\varphi_i : U_i \to Y$ 为已知映射 (13) 在点 $a \in X$ 处关于变量 x_i 的局部映射.

定义 4 如果映射 (14) 在点 $x_i = a_i$ 处可微, 那么称它在这一点的导数或微分为 f 在点 a 关于变量 x_i 的偏导数或偏微分.

通常用下面的符号来表示偏导数

$$\partial_i f(a), D_i f(a), \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), f'_{x_i}(a).$$

根据这两个定义, $D_i f(a) \in \mathfrak{L}(X_i, Y)$, 更确切地说是

$$D_i f(a) \in \mathfrak{L}(TX_i(a_i); TY(f(a))).$$

在这种情况下, 映射 (13) 在点 a 的微分 $df(a)$ (如果 f 在点 a 可微的话), 为了把它和关于个别变量的偏微分区分开来, 通常称之为全微分.

所有这些概念以前在 m 个实变量的实值函数的情况我们都已经遇到过, 因此我们在这里不去详细讨论它们. 只是指出, 重复以往的讨论, 并注意 §2 中研究过的例 9, 容易证明在一般的情况下成立以下的

命题 3 如果映射 (13) 在点 $a = (a_1, \cdots, a_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m = X$ 可微, 那么它在这点有关于每个变量的偏微分, 而且全微分和偏微分由关系式

$$df(a)h = \partial_1 f(a)h_1 + \cdots + \partial_m f(a)h_m, \tag{15}$$

相联系, 其中

$$h = (h_1, \cdots, h_m) \in TX_1(a_1) \times \cdots \times TX_m(a_m) = TX(a).$$

在数值函数的例子中我们已经知道, 一般来说, 函数 (13) 的偏微分存在不能保证它有可微性.

练 习

1. a) 设 $A \in \mathfrak{L}(X; X)$ 是幂零算子, 即存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $A^k = 0$. 试证在这种情况下, 算子 $(E - A)$ 有逆, 而且 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$.

b) 设 $D : \mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ 是多项式线性空间上的微分算子. 注意 D 是幂零算子, 写出算子 $\exp(aD)$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 并证明

$$\exp(aD)(P(x)) = P(x+a) =: T_a(P(x)).$$

c) 对于单变量的 n 阶实多项式空间 $\mathbb{P}_n[x]$, 写出 (习题 b) 中的) 算子

$$D : \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x] \quad 和 \quad T_a : \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x]$$

在基底 $e_i = \dfrac{x^{n-i}}{(n-i)!}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 下的矩阵.

2. a) 如果 $A, B \in \mathfrak{L}(X;X)$ 且 $\exists B^{-1} \in \mathfrak{L}(X;X)$, 那么

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}(\exp A)B.$$

b) 如果 $AB = BA$, 那么 $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

c) 验证 $\exp 0 = E$ 以及 $\exp A$ 总有逆算子, 而且

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

3. 设 $A \in \mathfrak{L}(X;X)$. 考察由对应 $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in \mathfrak{L}(X;X)$ 所定义的映射 $\varphi_A : \mathbb{R} \to \mathfrak{L}(X;X)$. 试证:

a) 映射 φ_A 连续.

b) φ_A 是从作为加群的 $\mathbb{R}$ 到由 $\mathfrak{L}(X;X)$ 中的一切可逆算子构成的乘群的同态.

4. 验证:

a) 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是算子 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{C}^n;\mathbb{C}^n)$ 的特征值, 那么 $\exp\lambda_1, \cdots, \exp\lambda_n$ 是算子 $\exp A$ 的特征值.

b) $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{tr}A)$, 其中 $\mathrm{tr}A$ 是算子 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{C}^n;\mathbb{C}^n)$ 的迹.

c) 如果 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, 那么 $\det(\exp A) > 0$.

d) 如果 A^* 是矩阵 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{C}^n;\mathbb{C}^n)$ 的转置矩阵, 而 $\overline{A}$ 是由 A 的元的复共轭构成的矩阵, 那么 $(\exp A)^* = \exp A^*, \overline{\exp A} = \exp \overline{A}$.

e) 无论 A 是怎样的二阶方阵, 矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 都不是形如 $\exp A$ 的矩阵.

5. 我们回忆, 一个同时装备群结构和拓扑空间结构的集合, 如果群的运算在所给的拓扑下连续, 则称它为*拓扑群*或*连续群*; 如果群的运算在某种意义下还是解析的, 那么, 这个拓扑群叫做*李群*[①].

李代数是具有反交换双线性运算 $[,] : X \times X \to X$ 的线性空间 X. 其中 $[,]$ 满足雅可比恒等式: 对于任意向量 $a, b, c \in X$, 有

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0.$$

[①] 李群的精确定义见第 15 章 §2 练习 8 的相应脚注.

李群和李代数有紧密的联系, 在实现这个联系中映射 exp(见练习 1) 起着重要的作用.

具有向量积运算的有向欧氏空间 E^3 可以作为李代数的例子. 我们暂时用 LA_1 表示这个李代数.

a) 证明, 三阶实的反对称矩阵构成李代数 (用 LA_2 表示), 如果矩阵 A 和 B 的乘积用关系式 $[A,B]=AB-BA$ 定义.

b) 证明, 对应

$$\Omega=\begin{pmatrix}0 & -\omega^3 & \omega^2\\ \omega^3 & 0 & -\omega^1\\ -\omega^2 & \omega^1 & 0\end{pmatrix}\leftrightarrow(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\boldsymbol{\omega}$$

是代数 LA_2 和 LA_1 的同构.

c) 验证, 如果像 b) 中所指出的那样, 反对称矩阵 Ω 和向量 $\boldsymbol{\omega}$ 彼此对应, 那么对于任意向量 $\boldsymbol{r}\in E^3$, 成立等式 $\Omega\boldsymbol{r}=[\omega,\boldsymbol{r}]$, 而对于任意矩阵 $\boldsymbol{P}\in SO(3)$ 成立对应 $P\Omega P^{-1}\leftrightarrow P\omega$.

d) 验证, 如果 $\mathbb{R}\ni t\mapsto O(t)\in SO(3)$ 是光滑映射, 那么矩阵

$$\Omega(t)=O^{-1}(t)\dot{O}(t)$$

是反对称的.

e) 证明, 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 是旋转陀螺的某个点的矢径, 而 $\Omega(t)$ 是 d) 中求出的矩阵 $(O^{-1}\dot{O})(t)$, 那么 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)=(\Omega\boldsymbol{r})(t)$.

f) 设 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 是两个附着在空间 E^3 的坐标原点上的向量. 设在 E^3 中选择右手系, 并且空间以角速度 $|\boldsymbol{\omega}|$ 围绕由向量 $\boldsymbol{\omega}$ 确定的轴右旋. 证明这时 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)=[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}(t)]$.

g) 比较练习 d), e), f) 的结果并指出例 8 中所说的旋转陀螺的瞬时速度向量.

h) 利用练习 c) 的结果验证, 速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 E^3 中不动的正交架的选择无关, 也就是说, 与坐标系无关.

6. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(x^1(s),x^2(s),x^3(s))$ 是 E^3 中光滑曲线的参数方程, 而且沿着曲线取弧长为参数 (曲线的自然参数化).

a) 证明, 在这种情况下, 曲线的切向量 $\boldsymbol{e}_1(s)=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}(s)$ 有单位长.

b) 向量 $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s)=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}(s)$ 垂直于向量 $\boldsymbol{e}_1$. 设 $\boldsymbol{e}_2(s)$ 是 $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s)$ 方向上的单位向量, 在等式 $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s)=k(s)\boldsymbol{e}_2(s)$ 中的系数 $k(s)$ 称为曲线在相应点的*曲率*.

c) 取向量 $\boldsymbol{e}_3(s)=[\boldsymbol{e}_1(s),\boldsymbol{e}_2(s)]$, 就在曲线的每一点得到一个标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}(s)$, 称之为曲线的*弗莱涅*①*标形或者相伴三棱形*. 验证以下的弗莱涅公式:

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s)&=\qquad\qquad k(s)\boldsymbol{e}_2(s),\\ \frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}(s)&=-k(s)\boldsymbol{e}_1(s)\qquad\qquad\qquad+\kappa(s)\boldsymbol{e}_3(s),\\ \frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds}(s)&=\qquad\qquad -\kappa(s)\boldsymbol{e}_2(s).\end{aligned}$$

说明系数 $\kappa(s)$ 的几何意义, 它叫做曲线在相应点的*挠率*.

---

① 弗莱涅 (F. Frenet) (1816—1900)—— 法国数学家.

§4 有限增量定理和它的应用的一些例子

1. 有限增量定理

在研究多元数值函数时, 我们在第 5 章 §3 第 1 段证明了它们的有限增量定理, 并且详细讨论了这个重要分析定理的各个方面. 这里将在一般形式下证明有限增量定理. 为了使读者能清清楚楚地理解它的论断, 我们建议回忆一下上述章节中所进行的讨论, 并注意线性算子范数的几何意义 (见 §2 第 2 段).

定理 1 (有限增量定理) *设 $f: U \to Y$ 是从赋范空间 X 的开集 U 到赋范空间 Y 的连续映射.*

如果闭区间 $[x, x+h] = \{\xi \in X | \xi = x + \theta h, 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ 完全含在 U 中, 且映射 f 在开区间 $]x, x+h[= \{\xi \in X | \xi = x + \theta h, 0 < \theta < 1\}$ 中的每一点可微, 那么成立以下估计式:

$$|f(x+h) - f(x)|_Y \leqslant \sup_{\xi \in]x, x+h[} \| f'(\xi) \|_{\mathcal{L}(X,Y)} |h|_X. \tag{1}$$

◀ 首先我们指出, 如果对于任意的闭区间 $[x', x''] \subset]x, x+h[$ 都能验证不等式

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant \sup_{\xi \in [x', x'']} \| f'(\xi) \| \, |x'' - x'|, \tag{2}$$

其中上确界是对整个闭区间 $[x', x'']$ 取的, 那么利用 f 和范数的连续性以及

$$\sup_{\xi \in [x', x'']} \| f'(\xi) \| \leqslant \sup_{\xi \in]x, x+h[} \| f'(\xi) \|,$$

对 $x' \to x$ 和 $x'' \to x+h$ 取极限, 便得到不等式 (1).

于是, 我们只要证明, 当 f 在整个闭区间 $[x, x+h]$ 上可微时恒成立

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant M|h| \tag{3}$$

即可, 其中 $M = \sup\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \| f'(x+\theta h) \|$.

利用三角不等式和闭区间的性质, 简单的计算

$$\begin{aligned} |f(x_3) - f(x_1)| &\leqslant |f(x_3) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_1)| \\ &\leqslant M|x_3 - x_2| + M|x_2 - x_1| = M(|x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|) \\ &= M|x_3 - x_1| \end{aligned}$$

表明, 如果形如 (3) 的不等式在区间 $[x_1, x_3]$ 的部分区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上都成立, 那么, 它在闭区间 $[x_1, x_3]$ 上也成立.*

因此, 倘若估计式 (3) 对闭区间 $[x, x+h]$ 不成立, 则用逐次平分的方法可以得到一列收缩到某个点 $x_0 \in [x, x+h]$ 的闭区间 $[a_k, b_k] \subset [x, x+h]$, 在每一个闭区间 $[a_k, b_k]$ 上 (3) 都不成立. 由于 $x_0 \in [a_k, b_k]$, 所以, 对闭区间 $[a_k, x_0], [x_0, b_k]$, 根据同样道理, 可以认为存在形如 $[x_0, x_0 + h_k] \subset [x, x+h]$ 的闭区间序列, 这里当 $k \to \infty$ 时有 $h_k \to 0$, 在这些区间上有

$$|f(x_0 + h_k) - f(x_0)| > M|h_k|. \tag{4}$$

如果 (3) 是在把 M 换成 $M + \varepsilon$ 后得证的, 其中 ε 是任意正数, 那么令 $\varepsilon \to 0$ 就能得到 (3), 因此,(4) 可换成

$$|f(x_0 + h_k) - f(x_0)| > (M + \varepsilon)|h_k|. \tag{4'}$$

现在来证明, 这与 f 在点 x_0 的可微性是矛盾的.**

实际上, 根据 f 在点 x_0 的可微性得

$$\begin{aligned}|f(x_0 + h_k) - f(x_0)| &= |f'(x_0)h_k + o(h_k)| \\ &\leqslant \| f'(x_0) \| \, |h_k| + o(|h_k|) \leqslant (M + \varepsilon)|h_k|,\end{aligned}$$

---

* 译者注. 详细地讲, 这一段说的是: 考察任意的闭区间 $[x_1, x_3] = \{\xi \in X | \xi = x + \theta h, \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_3\} \subset [x, x+h]$, 这里 $x_1 = x + \theta_1 h, x_3 = x + \theta_3 h, 0 \leqslant \theta_1 < \theta_3 \leqslant 1$. 设它分成了两个部分区间 $[x_i, x_{i+1}] = \{\xi \in X | \xi = x + \theta h, \theta_i \leqslant \theta \leqslant \theta_{i+1}\}, i = 1, 2$, 这里 $x_2 = x + \theta_2 h, \theta_1 < \theta_2 < \theta_3$. 如果在 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上均成立形如 (3) 的不等式, 即

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leqslant M|x_{i+1} - x_i|, \quad i = 1, 2,$$

那么, 利用三角不等式, 得

$$\begin{aligned}|f(x_3) - f(x_1)| &\leqslant |f(x_3) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_1)| \\ &\leqslant M|x_3 - x_2| + M|x_2 - x_1| \\ &= M|x + \theta_3 h - (x + \theta_2 h)| + M|x + \theta_2 h - (x + \theta_1 h)| \\ &= M|(\theta_3 - \theta_2)h| + M|(\theta_2 - \theta_1)h| \\ &= M(\theta_3 - \theta_2)|h| + M(\theta_2 - \theta_1)|h| = M(\theta_3 - \theta_1)|h| \\ &= M|x_3 - x_1|.\end{aligned}$$

亦即, 在 $[x_1, x_3]$ 上也成立形如 (3) 的不等式.

** 译者注. 这一小段主要是讲要证的不等式 (3) 与

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant (M + \varepsilon)|h| \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{3'}$$

等价 (由于不等式左边与 ε 无关, 这个结论是显然的), 因此, 上一小段对 (3) 所作的反证可同样地对 (3′) 进行, 那么代替 (4) 就会得到 (4′).

当 $h_k \to 0$. ►

关于有限增量定理, 有下列在技术上经常用到的

推论 如果 $A \in \mathfrak{L}(X;Y)$, 即 A 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的线性连续映射, 而 $f: U \to Y$ 是满足有限增量定理条件的映射, 那么

$$|f(x+h) - f(x) - Ah| \leqslant \sup_{\xi \in]x,x+h[} \| f'(\xi) - A \| \, |h|.$$

◄ 为了证明推论, 只需把有限增量定理用于单位区间 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 到 Y 的映射.

$$t \mapsto F(t) = f(x+th) - Ath,$$

因为

$$F(1) - F(0) = f(x+h) - f(x) - Ah,$$

$$F'(\theta) = f'(x+\theta h)h - Ah, \text{ 对于 } 0 < \theta < 1,$$

$$\| F'(\theta) \| \leqslant \| f'(x+\theta h) - A \| \, |h|,$$

$$\sup_{0<\theta<1} \| F'(\theta) \| \leqslant \sup_{\xi \in]x,x+h[} \| f'(\xi) - A \| \, |h|. \text{ ►}$$

注 从定理 1 的证明中可以看出, 定理条件中不必要求映射 $f: U \to Y$ 可微, 只需 f 是区间 $[x, x+h]$ 上的有界连续映射, 并且在区间 $]x, x+h[$ 的每一点可微.

这个注同样适用于刚才证明的有限增量定理的推论.

2. 有限增量定理应用的一些例子

a. 连续可微映射

设

$$f: U \to Y \tag{5}$$

是赋范空间 X 的开子集 U 到赋范空间 Y 的映射. 如果 f 在每个点 $x \in U$ 处可微, 那么, 把点 x 与在这点切于 f 的映射 $f'(x) \in \mathfrak{L}(X;Y)$ 相对应, 就得到导映射

$$f': U \to \mathfrak{L}(X;Y). \tag{6}$$

我们知道, 从 X 到 Y 的线性连续算子的空间 $\mathfrak{L}(X;Y)$ 是赋范 (算子范数) 空间, 因此, 可以谈论映射 (6) 的连续性问题.

定义 当导映射 (6) 在 U 中连续时, 完全按照以前的术语, 称映射 (5) 为连续可微映射.

形如 (5) 的连续可微映射的集合, 如前一样, 用记号 $C^{(1)}(U;Y)$ 表示, 或简单地表为 $C^{(1)}(U)$, 如果映射的到达集在上下文中是很清楚的话.

因此, 按照定义

$$f \in C^{(1)}(U;Y) \Leftrightarrow f' \in C(U;\mathfrak{L}(X;Y)).$$

我们来看看, 映射的连续可微性在各种具体情况下的具体含义.

例 1 考察我们熟知的 $X = Y = \mathbb{R}$ 的情况, 这时 $f : U \to \mathbb{R}$ 是实变量的实值函数. 因为任意线性映射 $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 归结为乘以某个数 $a \in \mathbb{R}$, 即 $Ah = ah$, 而且显然有 $\| A \| = |a|$, 所以在任意点 $x \in U$ 对任意向量 $h \in T\mathbb{R}_x \sim \mathbb{R}$, 我们得到 $f'(x)h = a(x)h$, 其中 $a(x)$ 是函数 f 在点 x 的数值导数.

其次, 因为

$$\begin{aligned}(f'(x+\delta) - f'(x))h &= f'(x+\delta)h - f'(x)h \\ &= a(x+\delta)h - a(x)h \\ &= (a(x+\delta) - a(x))h, \end{aligned} \tag{7}$$

所以

$$\| f'(x+\delta) - f'(x) \| = |a(x+\delta) - a(x)|.$$

也就是说, 在现在的情况下, 映射 f 的连续可微性等价于以前所研究的函数类 $C^{(1)}(U;\mathbb{R})$ 中的数值函数的连续可微概念.

例 2 现设 X 是赋范空间的直积 $X_1 \times \cdots \times X_m$. 这时映射 (5) 是 m 个变量 $x_i \in X_i (i = 1, \cdots, m)$ 的取值于空间 Y 的函数 $f(x) = f(x_1, \cdots, x_m)$.

如果映射 f 在点 $x \in U$ 可微, 那么它在这个点的微分 $df(x)$ 是空间 $\mathfrak{L}(X_1 \times \cdots \times X_m = X; Y)$ 的元素.

$df(x)$ 作用在向量 $h = (h_1, \cdots, h_m)$ 上按照 §3 中公式 (15) 可表为

$$df(x)h = \partial_1 f(x)h_1 + \cdots + \partial_m f(x)h_m,$$

其中 $\partial_i f(x) : X_i \to Y (i = 1, \cdots, m)$ 是映射 f 在所说的点 x 处的偏导映射.

其次,

$$(df(x+\delta) - df(x))h = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x))h_i. \tag{8}$$

然而由赋范空间的直积中标准范数的性质 (见 §1 第 2 段例 6) 和算子范数的定义, 我们得到

$$\begin{aligned}\| \partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x) \|_{\mathfrak{L}(X_i;Y)} &\leqslant \| df(x+\delta) - df(x) \|_{\mathfrak{L}(X;Y)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \| \partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x) \|_{\mathfrak{L}(X_i;Y)} . \end{aligned} \tag{9}$$

因此, 可微映射 (5) 在给定情况下在 U 中连续可微, 当且仅当它对所有变量的偏导映射在 U 中连续.

特别地, 如果 $X=\mathbb{R}^m, Y=\mathbb{R}$, 我们重新得到已经熟知的 (函数类 $C^{(1)}(U,\mathbb{R})$ 的, 这里 $U\subset\mathbb{R}^m$) m 个实变量的数值函数的连续可微概念.

注 值得指出的是, 在等式 (7) 和 (8) 的写法中, 我们实质上用到了典则等同 $TX_X\sim X$, 它使不同切空间中的向量可以进行比较或者视为相等.

现在证明, 对于连续可微映射成立

命题 1 *如果 K 是赋范空间 X 中的凸紧集, 并且 $f\in C^{(1)}(K;Y)$, 其中 Y 也是赋范空间, 那么映射 $f:K\to Y$ 在 K 上满足利普希茨条件, 即存在常数 $M>0$, 使得对于任意点 $x_1,x_2\in K$ 成立不等式*

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|. \tag{10}$$

◀ 根据条件, $f':K\to\mathfrak{L}(X;Y)$ 是紧集 K 到度量空间 $\mathfrak{L}(X;Y)$ 的连续映射. 因为范数是取自然度量的赋范空间上的连续函数, 所以映射 $x\mapsto\|f'(x)\|$, 作连续映射的复合映射, 是紧集 K 到 $\mathbb{R}$ 的连续映射. 而这样的映射一定是有界的. 设 M 是这样的常数, 对任意的点 $x\in K$ 成立不等式 $\|f'(x)\|\leqslant M$. 由于 K 的凸性, 对任意两个点 $x_1\in K, x_2\in K$, 紧集 K 包含整个区间 $[x_1,x_2]$. 把有限增量定理用到这个区间上, 立即得到关系式 (10). ▶

命题 2 *在命题 1 的条件下, 存在非负的, 当 $\delta\to+0$ 时趋于零的函数 $\omega(\delta)$, 使关系式*

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|\leqslant\omega(\delta)|h| \tag{11}$$

在任意的, 满足条件 $|h|<\delta, x+h\in K$ 的点 $x\in K$ 处成立.

◀ 由有限增量定理的推论可得

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|\leqslant\sup_{0<\theta<1}\|f'(x+\theta h)-f'(x)\|\,|h|,$$

置

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in K\\|x_1-x_2|<\delta}}\|f'(x_2)-f'(x_1)\|,$$

由紧集 K 上连续函数 $x\mapsto f'(x)$ 的一致连续性便得 (11). ▶

b. 可微性的充分条件

现在来研究, 在有了一般的有限增量定理以后, 在一般形式下怎样得到用偏导数术语叙述的映射可微性的充分条件.

定理 2 设 U 是赋范空间 $X_1,\cdots,X_m$ 的直积 $X=X_1\times\cdots\times X_m$ 中点 x 的邻域, $f:U\to Y$ 是 U 到赋范空间 Y 的映射. 如果映射 f 在 U 中有对所有变量的偏导映射, 那么, 当这些偏导映射在点 x 处连续时, 映射 f 在这个点可微.

◀ 为了书写简单起见, 我们对 $m=2$ 的情况进行证明. 我们直接验证关于 $h=(h_1,h_2)$ 线性的映射

$$Lh=\partial_1 f(x)h_1+\partial_2 f(x)h_2$$

是 f 在点 x 处的全微分.

作过初等变换

$$\begin{aligned}&f(x+h)-f(x)-Lh\\=&f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_1 f(x)h_1-\partial_2 f(x)h_2\\=&f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x_1,x_2)h_1\\&+f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_2 f(x_1,x_2)h_2,\end{aligned}$$

根据定理 1 的推论得到

$$\begin{aligned}&|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_1 f(x_1,x_2)h_1-\partial_2 f(x_1,x_2)h_2|\\\leqslant&\sup_{0<\theta_1<1}\|\partial_1 f(x_1+\theta h_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x_1,x_2)\|\,|h_1|\\&+\sup_{0<\theta_2<1}\|\partial_2 f(x_1,x_2+\theta_2 h_2)-\partial_2 f(x_1,x_2)\|\,|h_2|.\end{aligned}\tag{12}$$

因为 $\max\{|h_1|,|h_2|\}\leqslant|h|$, 显然, 从偏导数 $\partial_1 f,\partial_2 f$ 在点 $x=(x_1,x_2)$ 的连续性能推出不等式 (15) 的右边当 $h=(h_1,h_2)\to 0$ 时是 $o(h)$. ▶

推论 从赋范空间 $X=X_1\times\cdots\times X_m$ 的开子集 U 到赋范空间 Y 的映射 $f:U\to Y$ 连续可微, 当且仅当映射 f 对所有变量的偏导数在 U 中连续.

◀ 在例 2 中我们证明了在映射 $f:U\to Y$ 可微的条件下, 它的连续可微性等价于它的偏导数的连续性.

现在我们又看到, 如果偏导数连续, 那么映射 f 就可微, 因而 (根据例 2) 是连续可微的. ▶

练 习

1. 设 $f:I\to Y$ 是区间 $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ 到赋范空间 Y 的连续映射, 而 $g:I\to\mathbb{R}$ 是 I 上的连续实值函数. 试证, 如果 f 和 g 在区间 $]0,1[$ 可微, 并且在这个区间的每一点成立关系式 $\|f'(x)\|\leqslant g'(x)$, 那么也有不等式

$$|f(1)-f(0)|\leqslant g(1)-g(0)$$

成立.

2. a) 设 $f: I \to Y$ 是区间 $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ 到赋范空间 Y 的连续可微映射. 它给出了 Y 中的光滑道路. 试确定这条道路的长度.

b) 回忆切映射范数的几何意义, 并作出 a) 中所研究的道路长度的上方估计.

c) 给出有限增量定理的几何解释.

3. 设 $f: U \to Y$ 是从赋范空间 X 的点 a 的邻域 U 到赋范空间 Y 中的连续映射. 试证, 如果 f 在 $U \setminus a$ 可微, 且当 $x \to a$ 时 $f'(x)$ 有极限 $L \in \mathfrak{L}(X;Y)$, 那么映射 f 在点 a 可微且 $f'(a) = L$.

4. a) 设 U 是赋范空间 X 的开凸子集, 而 $f: U \to Y$ 是 U 到赋范空间 Y 的映射. 试证, 如果在 U 上 $f'(x) \equiv 0$, 那么映射 f 是常值的.

b) 把命题 a) 推广到任意区域 U 的情况 (亦即当 U 是 X 中的开的连通子集的情况).

c) 设 $f: D \to \mathbb{R}$ 是在平面区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 中定义的变量 (x,y) 的光滑函数, 且它的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 恒等于零. 这时, 在这个区域中 f 是不依赖于 y 吗? 对怎样的区域 D 它不依赖于 y?

§5 高阶导映射

1. n 阶微分的定义

设 U 是赋范空间 X 中的开集, 而

$$f: U \to Y \tag{1}$$

是 U 到赋范空间 Y 的映射.

如果映射 (1) 在 U 中可微, 那么在 U 中定义一个 f 的导映射

$$f': U \to \mathfrak{L}(X;Y). \tag{2}$$

空间 $\mathfrak{L}(X;Y) =: Y_1$ 是赋范空间, 关于它, 映射 (2) 也有 (1) 的形式, 即 $f': U \to Y_1$, 从而可以提出关于 f' 的可微性问题.

如果映射 (2) 可微, 那么, 称它的导映射

$$(f')': U \to \mathfrak{L}(X;Y_1) = \mathfrak{L}(X;\mathfrak{L}(X;Y))$$

为 f 的*二阶导映射*或者*二阶微分*, 并用符号 f'' 或者 $f^{(2)}$ 表示. 一般地, 我们采用以下归纳定义

定义 1 称与映射 (1) 的 $n-1$ 阶导映射在点 $x \in U$ 的切映射为它在这个点的 $n(n \in \mathbb{N})$ *阶导映射*或者 *n 阶微分*.

如果在点 $x \in U$ 的 $k \in \mathbb{N}$ 阶导映射用符号 $f^{(k)}(x)$ 表示, 那么定义 1 说的是

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x). \tag{3}$$

这样一来, 如果 $f^{(n)}(x)$ 有定义, 那么

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) \in \mathfrak{L}(X; Y_n) &= \mathfrak{L}(X; \mathfrak{L}(X; Y_{n-1})) = \cdots \\ &= \mathfrak{L}(X; \mathfrak{L}(X; \cdots; \mathfrak{L}(X; Y)) \cdots). \end{aligned}$$

因此, 根据 §2 中命题 4, 可把映射 (1) 在点 x 的 n 阶微分 $f^{(n)}(x)$ 理解为 n - 线性连续算子空间 $\mathfrak{L}(\underbrace{X, \cdots, X}_{n\text{ 个}}; Y)$ 的元素.

我们再次指出, 切映射 $f'(x): TX_x \to TY_{f(x)}$ 是切空间的映射. 由于映射的空间有仿射结构或线性结构, 我们把每一个切空间与相应的线性空间视为同一, 并根据这个理由认为

$$f'(x) \in \mathfrak{L}(X; Y).$$

正是把不同空间的元素 $f'(x_1) \in \mathfrak{L}(TX_{x_1}; TY_{f(x_1)}), f'(x_2) \in \mathfrak{L}(TX_{x_2}; TY_{f(x_2)})$ 看作同一空间 $\mathfrak{L}(X; Y)$ 的向量这样一种看法奠定了赋范空间映射的高阶微分定义的基础. 在仿射空间或线性空间的情况下, 空间不同点处的切空间的向量之间有自然的联系. 最终, 这种联系使我们能在这种情况下讨论映射 (1) 的连续可微性和它的高阶微分.

2. 沿向量的导数和 n 阶微分的计算

在把抽象的定义 1 具体化时, 利用沿向量的导数概念可能是方便的. 对于一般映射 (1) 这个概念可像 $X = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}$ 的情况一样地引进.

定义 2 如果 X 和 Y 是域 $\mathbb{R}$ 上的线性赋范空间, 那么我们称极限

$$D_h f(x) := \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t},$$

为映射 (1) 在点 $x \in U$ 沿向量 $h \in TX_x \sim X$ 的导数, 如果这个极限在 Y 中存在的话.

可直接验证

$$D_{\lambda h} f(x) = \lambda D_h f(x) \tag{4}$$

以及, 如果映射 f 在点 $x \in U$ 可微, 那么它在这个点有沿任何向量的导数, 而且

$$D_h f(x) = f'(x)h. \tag{5}$$

另外, 由切映射的线性性, 得

$$D_{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2} f(x) = \lambda_1 D_{h_1} f(x) + \lambda_2 D_{h_2} f(x). \tag{6}$$

从定义 2 亦看到, 映射 $f: U \to Y$ 沿向量的导数值 $D_h f(x)$ 是线性空间 $TY_{f(x)} \sim Y$ 的元素, 并且如果 L 是 Y 到某赋范空间 Z 的线性连续映射, 那么

$$D_h(L \circ f)(x) = L \circ D_h f(x). \tag{7}$$

现在我们力图解释映射 f 在点 x 处的 n 阶微分在向量组 $(h_1,\cdots,h_n)$ 上的值 $f^{(n)}(x)(h_1,\cdots,h_n)$ 的意义, 其中 $h_i\in TX_x\sim X, i=1,\cdots,n$.

我们从 $n=1$ 开始. 这时, 按照公式 (5)

$$f'(x)(h)=f'(x)h=D_hf(x)$$

现在研究 $n=2$ 的情况. 因为 $f^{(2)}(x)=\mathfrak{L}(X;\mathfrak{L}(X;Y))$, 所以固定向量 $h_1\in X$, 我们按照以下法则

$$h_1\mapsto f^{(2)}(x)h_1$$

使 h_1 与线性算子 $(f^{(2)}(x)h_1)\in\mathfrak{L}(X;Y)$ 对应, 然后计算出这个算子在向量 $h_2\in X$ 上的值, 得到空间 Y 的元素

$$f^{(2)}(x)(h_1,h_2):=(f^{(2)}(x)h_1)h_2\in Y. \tag{8}$$

但是

$$f^{(2)}(x)h=(f')'(x)h=D_hf'(x),$$

所以

$$f^{(2)}(x)(h_1,h_2)=(D_{h_1}f'(x))h_2. \tag{9}$$

如果 $A\in\mathfrak{L}(X;Y)$, 而 $h\in X$, 那么 A 和 h 的搭配 Ah 不仅可以看作是从 X 到 Y 的映射 $h\mapsto Ah$, 而且可以看作是从 $\mathfrak{L}(X;Y)$ 到 Y 的映射 $A\mapsto Ah$, 且后一个映射与前一个一样是线性的.

现在比较关系式 (5),(7) 和 (9), 即可得到

$$(D_{h_1}f'(x))h_2=D_{h_1}(f'(x)h_2)=D_{h_1}D_{h_2}f(x).$$

这样一来, 最终得到了

$$f^{(2)}(x)(h_1,h_2)=D_{h_1}D_{h_2}f(x).$$

可以类似地证明, 对于任何 $n\in\mathbb{N}$ 成立关系式

$$f^{(n)}(x)(h_1,\cdots,h_n):=\cdots((f^{(n)}(x)h_1)\cdots h_n)=D_{h_1}D_{h_2}\cdots D_{h_n}f(x), \tag{10}$$

而且在向量组上的微分是从在 h_n 上的微分开始到最后的在 h_1 上的微分依次完成的.

3. 高阶微分的对称性

关于公式 (10) (对于计算它已完全适用) 自然产生这样的问题: 计算结果对指定的微分次序的依赖程度如何.

命题 *对于映射 (1), 如果 $f^{(n)}(x)$ 在点 x 有定义, 那么它关于任何一对自变量对称.*

◀ 验证这个论断在 $n=2$ 时的正确性是证明的主要部分.

设 h_1, h_2 是空间 $TX_x \sim X$ 的两个任意固定的向量. 因为 U 是 X 中的开集, 对于所有充分接近于零的值 $t \in \mathbb{R}$, 能定义以下关于 t 的辅助函数:

$$F_t(h_1,h_2) = f(x+t(h_1+h_2)) - f(x+th_1) - f(x+th_2) + f(x)$$

我们再考察一个关于向量 v 的辅助函数

$$g(v) = f(x+t(h_1+v)) - f(x+tv),$$

显然它对与 h_2 共线且满足 $|v| \leqslant |h_2|$ 的向量 v 有定义.

我们指出

$$F_t(h_1,h_2) = g(h_2) - g(0).$$

同时指出, 如果函数 $f: U \to Y$ 在点 $x \in U$ 有二阶微分 $f''(x)$, 它就一定至少在点 x 的某个邻域内可微, 我们将认为参数 t 足够小, 使得定义函数 $F_t(h_1,h_2)$ 的等式右端的自变量属于点 x 的所指邻域.

把这些结果和有限增量定理的推论用于以下计算:

$$\begin{aligned}
&|F_t(h_1,h_2) - t^2 f''(x)(h_1,h_2)|\\
=& |g(h_2) - g(0) - t^2 f''(x)(h_1,h_2)|\\
\leqslant& \sup_{0<\theta_2<1} \| g'(\theta_2 h_2) - t^2 f''(x)h_1 \| \, |h_2|\\
=& \sup_{0<\theta_2<1} \| (f'(x+t(h_1+\theta_2 h_2)) - f'(x+t\theta_2 h_2))t - t^2 f''(x)h_1 \| \, |h_2|.
\end{aligned}$$

按照导映射的定义, 当 $t \to 0$ 时可得

$$f'(x+t(h_1+\theta_2 h_2)) = f'(x) + f''(x)(t(h_1+\theta_2 h_2)) + o(t)$$

和

$$f'(x+t\theta_2 h_2) = f'(x) + f''(x)(t\theta_2 h_2) + o(t).$$

利用这两个等式, 可以继续上述计算, 化简后便可得到, 当 $t \to 0$ 有

$$|F_t(h_1,h_2) - t^2 f''(x)(h_1,h_2)| = o(t^2),$$

而这个等式也就是

$$f''(x)(h_1,h_2)=\lim_{t\to 0}\frac{F_t(h_1,h_2)}{t^2}.$$

因为显然有 $F_t(h_1,h_2)=F_t(h_2,h_1)$, 所以

$$f''(x)(h_1,h_2)=f''(x)(h_2,h_1).$$

现在可以用归纳法逐字逐句地像在证明混合偏导数的值与进行微分的次序无关时所作的那样完成命题的证明. ►

因而, 映射 (1) 在点 $x\in U$ 的 n 阶微分是 n–线性对称算子

$$f^{(n)}(x)\in\mathfrak{L}(TX_x,\cdots,TX_x;TY_{f(x)})\sim\mathfrak{L}(X,\cdots,X;Y),$$

它在由 $h_i\in TX_x\sim X$ 构成的向量组 $(h_1,\cdots,h_n)$ 上的值可按公式 (10) 计算.

如果 X 是有限维空间, $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 是 X 中的基底, 而 $h_j=h_j^ie_i$ 是向量 $h_j(j=1,\cdots,n)$ 按这个基底的展开式, 那么由 $f^{(n)}(x)$ 的多重线性性, 可得

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)(h_1,\cdots,h_n)&=f^{(n)}(x)(h_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,h_n^{i_n}e_{i_n})\\&=f^{(n)}(x)(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})h_1^{i_1}\cdot\cdots\cdot h_n^{i_n},\end{aligned}$$

或者对于 $D_{e_1}\cdots D_{e_n}f(x)$ 利用前面的记号 $\partial_{i_1\cdots i_n}f(x)$, 最后可以得到

$$f^{(n)}(x)(h_1,\cdots,h_n)=\partial_{i_1\cdots i_n}f(x)h_1^{i_1}\cdots h_n^{i_n}.$$

这里, 像通常一样, 等式右端关于重复指标在它们的变化范围内 (即从 1 到 k) 求和.

我们约定以下的简化记号:

$$f^{(n)}(x)(h,\cdots,h)=:f^{(n)}(x)h^n. \tag{11}$$

特别地, 如果所说的是有限维空间 X 和 $h=h^ie_i$, 那么

$$f^{(n)}(x)h^n=\partial_{i_1\cdots i_n}f(x)h^{i_1}\cdot\cdots\cdot h^{i_n},$$

这是我们在多元数值函数的理论中已经熟知的结果.

4. 若干评注

由于有记号 (11), 我们研究一个有意义的例子, 下一节将用到它.

例 设 $A\in\mathfrak{L}(X_1,\cdots,X_n;Y)$, 即 $y=A(x_1,\cdots,x_n)$ 是从线性赋范空间 $X_1,\cdots,X_n$ 的直积到线性赋范空间 Y 的 n–线性连续算子.

在上一段例 5 中证明了 A 是可微映射 $A:X_1\times\cdots\times X_n\to Y$, 而且

$$\begin{aligned}&A'(x_1,\cdots,x_n)(h_1,\cdots,h_n)\\&=A(h_1,x_2,\cdots,x_n)+\cdots+A(x_1,\cdots,x_{n-1},h_n).\end{aligned}$$

这样一来, 如果 $X_1 = \cdots = X_n = X$, 并且设 A 是对称算子, 那么

$$A'(x, \cdots, x)(h, \cdots, h) = nA(\underbrace{x, \cdots, x}_{n-1}, h) =: (nAx^{n-1})h.$$

这意味着, 如果研究由条件

$$X \ni x \mapsto F(x) = A(x, \cdots, x) =: Ax^n$$

定义的函数 $F: X \to Y$, 那么它是可微的, 并且

$$F'(x)h = (nAx^{n-1})h,$$

也就是说, 这时有

$$F'(x) = nAx^{n-1},$$

其中 $Ax^{n-1} := A(\underbrace{x, \cdots, x}_{n-1}, \cdot)$.

特别地, 如果映射 (1) 在点 $x \in U$ 有微分 $f^{(n)}(x)$, 那么函数 $F(h) = f^{(n)}(x)h^n$ 可微, 并且

$$F'(h) = nf^{(n)}(x)h^{n-1}. \tag{12}$$

在结束 n 阶导映射概念的讨论时, 再作如下说明是有益的. 如果原来的函数 (1) 定义在赋范空间 $X_1, \cdots, X_m$ 的直积 X 的集合 U 上, 那么可以谈论函数 f 关于变量 $x_i \in X_i, i = 1, \cdots, m$ 的一阶偏导映射 $\partial_1 f(x), \cdots, \partial_m f(x)$ 和更高阶的偏导映射 $\partial_{i_1 \cdots i_n} f(x)$.

根据 §4 中的定理 2, 在这种情况下, 按归纳法得到, *如果在某个点 $x \in U \subset X = X_1 \times \cdots \times X_m$, 映射 $f: U \to Y$ 的所有偏导数 $\partial_{i_1 \cdots i_n} f(x)$ 连续, 那么映射 f 在这个点有 n 阶微分 $f^{(n)}(x)$.*

如果还考虑到那一节例 2 的结果, 则可推出, 映射

$$U \ni x \mapsto f^{(n)}(x) \in \mathfrak{L}(\underbrace{X, \cdots, X}_{n \text{ 次}}; Y)$$

连续的充要条件是映射 $f: U \to Y$ 的所有 n 阶 (或等价地, 直到 n 阶) 偏导映射 $U \ni x \mapsto \partial_{i_1 \cdots i_n} f(x) \in \mathfrak{L}(X_{i_1}, \cdots, X_{i_n}; Y)$ 连续.

在 U 中有直到 n 阶连续导映射的映射 (1) 组成的类用记号 $C^{(n)}(U; Y)$ 表示, 或者, 当不致产生误会时, 简记为 $C^{(n)}(U)$ 或 $C^{(n)}$.

特别地, 如果 $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, 那么上述结论可以简单地表为

$$(f \in C^{(n)}) \Leftrightarrow (\partial_{i_1 \cdots i_n} f \in C, i_1, \cdots, i_n = 1, \cdots, m),$$

这里和往常一样, C 是相应的连续函数集的记号.

练 习

1. 给出等式 (7) 的完整证明.

2. 详细作出 $f^{(n)}(x)$ 的对称性论断证明的最后部分.

3. a) 试证, 如果对于一对向量 h_1, h_2 和区域 U 中的映射 (1), 定义函数 $D_{h_1}D_{h_2}f, D_{h_2}D_{h_1}f$, 且它们在某个点 $x \in U$ 连续, 那么在这个点成立等式 $D_{h_1}D_{h_2}f(x) = D_{h_2}D_{h_1}f(x)$.

   b) 举数值函数 $f(x, y)$ 的例子说明, 使得混合导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

   在某个点连续, 尽管由此根据 a) 能推出 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 在这个点相等, 但一般来说, 不能推出函数在这个点的二阶微分存在性.

   c) 试证, $f^{(2)}(x, y)$ 的存在性虽然保证在相应点混合导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

   存在且相等, 但一般来说, 不能推出它们在这个点连续.

4. 设 $A \in \mathfrak{L}(X, \cdots, X; Y)$, 而且 A 是对称的 n–线性算子. 试求函数 $x \mapsto Ax^n := A(x, \cdots, x)$ 的直到 $n+1$ 阶 (包括 $n+1$ 在内) 的逐次导数.

§6 泰勒公式和极值的研究

1. 映射的泰勒公式

定理 1 如果从赋范空间 X 的点 x 的邻域 $U = U(x)$ 到赋范空间 Y 的映射 $f: U \to Y$ 在 U 中有直到 $n-1$ 阶 (包括 $n-1$ 在内) 的导数, 而在点 x 处有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$, 那么当 $h \to 0$ 时有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + o(|h|^n). \tag{1}$$

等式 (1) 是各种形式的泰勒公式中的一种, 这一次它确实是对非常一般的函数类写出来的公式了.

◂ 我们用归纳法证明泰勒公式 (1).

当 $n = 1$ 时, 由 $f'(x)$ 的定义, (1) 式成立.

假设 (1) 对 $n-1 \in \mathbb{N}$ 成立.

于是根据有限增量定理, §5 中公式 (12) 和所作的归纳假设, 我们得到, 当 $h \to 0$ 时成立

$$|f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n)|$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta<1} \left\| f'(x+\theta h) - (f'(x) + f''(x)(\theta h) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(x)(\theta h)^{n-1}) \right\| |h|$$
$$= o(|\theta h|^{n-1})|h| = o(|h|^n)$$ ►

这里我们不再继续讨论其他的, 有时甚至是十分有用的泰勒公式形式. 当时, 在研究数值函数时, 曾详细地讨论过它们. 现在我们把它们的结论提供给读者 (例如, 可参看练习 1).

2. 内部极值的研究

我们将利用泰勒公式指出定义在赋范空间的开集上的实值函数在定义域内部取得局部极值的必要微分条件和充分微分条件. 我们将看到, 这些条件类似于我们熟知的实变量的实值函数的极值的微分条件.

定理 2 设 $f: U \to \mathbb{R}$ 是定义在赋范空间 X 的开集 U 上的实值函数, 且 f 在某个点 $x \in U$ 的邻域有直到 $k-1 \geqslant 1$ 阶 (包括 $k-1$ 阶在内的) 导映射, 在点 x 本身有 k 阶导映射 $f^{(k)}(x)$.

如果 $f'(x) = 0, \cdots, f^{(k-1)}(x) = 0$ 且 $f^{(k)}(x) \neq 0$, 那么为使 x 是函数 f 的极值点

必要条件是: k 是偶数, $f^{(k)}(x)h^k$ 是半定的①.

充分条件是: $f^{(k)}(x)h^k$ 在单位球面 $|h| = 1$ 上的值不为零; 这时, 如果在这个球面上

$$f^{(k)}(x)h^k \geqslant \delta > 0,$$

那么 x 是严格局部极小点; 如果

$$f^{(k)}(x)h^k \leqslant \delta < 0,$$

那么 x 是严格局部极大点*.

◄ 为了证明定理, 我们考察函数 f 在点 x 邻域内的泰勒展开式. 由所作的假设可得

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + \alpha(h)|h|^k,$$

其中 $\alpha(h)$ 是实值函数, 而且当 $h \to 0$ 时 $\alpha(h) \to 0$

①这意味着形式 $f^{(k)}(x)h^k$ 不能取有不同符号的值, 虽然可以存在某个 $h \neq 0$ 使它变为零. 通常把等式 $f^{(i)}(x) = 0$ 理解为对任意向量 h 有 $f^{(i)}(x)h = 0$.

* 译者注. 这里 "严格" 一词是译者加的.

我们先证必要条件.

因为 $f^{(k)}(x) \neq 0$, 所以有向量 $h_0 \neq 0$, 使 $f^{(k)}(x)h_0^k \neq 0$. 于是, 对于充分接近于零的实参量 t,

$$
\begin{aligned}
f(x+th_0) - f(x) &= \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(th_0)^k + \alpha(th_0)|th_0|^k \\
&= \left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h_0^k + \alpha(th_0)|h_0|^k\right)t^k.
\end{aligned}
$$

括号内的表达式与 $f^{(k)}(x)h_0^k$ 同号.

为使 x 是极值点, 当 t 变号时最后一个等式的左边 (从而右边) 必须不改变符号. 这只有当 k 为偶数时才可能.

上述讨论表明, 如果 x 是极值点, 那么对于充分小的 t, 差 $f(x+th_0)-f(x)$ 的符号与 $f^{(k)}(x)h_0^k$ 相同, 因而在这种情况下不可能有两个向量 h_0, h_1, 使 $f^{(k)}(x)$ 在它们上的取值有不同的符号.

我们转到极值充分条件的证明. 为了确定起见, 我们研究

$$
f^{(k)}(x)h^k \geqslant \delta > 0, \text{ 当 } |h| = 1
$$

的情况. 这时

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + \alpha(h)|h|^k \\
&= \left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\left(\frac{h}{|h|}\right)^k + \alpha(h)\right)|h|^k \\
&\geqslant \left(\frac{1}{k!}\delta + \alpha(h)\right)|h|^k,
\end{aligned}
$$

又因 $h \to 0$ 时 $\alpha(h) \to 0$, 所以不等式的右端对于所有充分接近于零的向量 $h \neq 0$ 均为正. 因而对所有这些向量 h

$$
f(x+h) - f(x) > 0,
$$

即 x 是严格局部极小点.

严格局部极大点的充分条件可类似地验证. ▶

注 1 如果空间 X 是有限维的, 那么以点 $x \in X$ 为中心的单位球面 $S(x;1)$ 是 X 中的有界闭集, 因而是紧集. 这时, 连续函数 $f^{(k)}(x)h^k = \partial_{i_1\cdots i_k}f(x)h^{i_1}\cdot\cdots\cdot h^{i_k}$ (k- 形式) 在 $S(x;1)$ 上有最大值和最小值. 如果最大值和最小值异号, 那么函数 f 在点 x 没有极值. 如果它们同号, 那么像定理 2 所指出的, f 在点 x 有极值. 在后一种情况下, 显然极值的充分条件可叙述为与它等价的形式: 形式 $f^{(k)}(x)h^k$ 是定的 (正定的或负定的).

我们在研究 $\mathbb{R}^n$ 中的实值函数时所遇到的正是这种形式的极值条件.

注 2　像我们在函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的例子所看到的那样, 在极值的必要条件中所说的形式 $f^{(k)}(x)h^k$ 的半定性还不是极值的充分条件.

注 3　实际上, 在研究可微函数的极值时, 通常只利用一阶微分或一阶和二阶微分. 如果根据所研究问题的意义, 极值点的唯一性及极值的特性是显然的, 那么在求极值点时就可只用一阶微分: 求满足 $f'(x)=0$ 的点 x.

3. 一些例子

例 1　设 $L\in C^{(1)}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$, 而 $f\in C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$, 换句话说,

$$(u^1,u^2,u^3)\mapsto L(u^1,u^2,u^3)$$

是定义在 $\mathbb{R}^3$ 中的连续可微的实值函数, 而 $x\mapsto f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的光滑实值函数.

我们研究函数

$$F:C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})\to\mathbb{R} \tag{2}$$

它由以下关系式给出

$$\begin{aligned}&C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})\ni f\mapsto F(f)\\&=\int_a^b L(x,f(x),f'(x))dx\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3}$$

因此, (2) 是定义在函数集 $C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ 上的实泛函.

在物理学和力学中, 与运动密切相关的基本变分原理是众所周知的. 根据这些原理, 在所有可能的运动中真实运动的特点是, 它们总是沿着使某些泛函有极值的轨道进行. 与泛函的极值有关的问题是最优控制理论中的中心问题. 因此, 寻求和研究泛函的极值是重要的独立课题, 分析中以大量篇幅讨论这个课题的理论, 这就是变分学. 为使读者对从数值函数的极值分析到寻求和研究泛函的极值的转变不感到突然的, 我们已做了某些工作. 但是我们不准备深入讨论变分法的专门问题, 仅以泛函 (3) 为例说明上面讲过的微分法和局部极值研究的一般思想.

我们要证明泛函 (3) 是可微映射并求出它的微分.

首先指出, 函数 (3) 可以看作由公式

$$F_1(f)(x)=L(x,f(x),f'(x)). \tag{4}$$

给出的映射

$$F_1:C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})\to C([a,b];\mathbb{R}) \tag{5}$$

和映射

$$C([a,b];\mathbb{R})\ni g\mapsto F_2(g)=\int_a^b g(x)dx\in\mathbb{R} \tag{6}$$

的复合.

由积分的性质, 映射 F_2 显然是线性连续映射, 因而它的可微性问题是明显的.

我们来证明 F_1 也是可微的, 而且

$$F_1'(f)h(x) = \partial_2 L(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 L(x, f(x), f'(x))h'(x) \tag{7}$$

其中 $h \in C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$.

事实上, 由有限增量定理的推论, 在我们的情况下可得

$$\begin{aligned}
&|L(u^1+\Delta^1, u^2+\Delta^2, u^3+\Delta^3) - L(u^1,u^2,u^3) - \sum_{i=1}^{3}\partial_i L(u^1,u^2,u^3)\Delta^i| \\
&\leqslant \sup_{0<\theta<1} \| \partial_1 L(u+\theta\Delta) - \partial_1 L(u), \partial_2 L(u+\theta\Delta) \\
&\quad -\partial_2 L(u), \partial_3 L(u+\theta\Delta) - \partial_3 L(u) \| \cdot |\Delta| \\
&\leqslant 3 \max_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant1\\ i=1,2,3}} |\partial_i L(u+\theta u) - \partial_i L(u)| \cdot \max_{i=1,2,3} |\Delta^i|,
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $u = (u^1,u^2,u^3), \Delta = (\Delta^1,\Delta^2,\Delta^3)$.

如果记起 $C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ 中函数 f 的范数 $|f|_{C^{(1)}}$ 是 $\max\{|f|_c, |f'|_c\}$ (其中 $|f|_c$ 是函数在区间 $[a,b]$ 上的最大模), 那么设 $u^1 = x, u^2 = f(x), u^3 = f'(x), \Delta^1 = 0, \Delta^2 = h(x)$ 和 $\Delta^3 = h'(x)$, 考虑到函数 $\partial_i L(u^1,u^2,u^3), i = 1,2,3$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的有界子集上的一致连续性, 从不等式 (8) 得到

$$\begin{aligned}
&\max_{a\leqslant x\leqslant b} |L(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x)) \\
&-L(x,f(x),f'(x)) - \partial_2 L(x,f(x),f'(x))h(x) - \partial_3 L(x,f(x),f'(x))h'(x)| \\
&= o(|h|_{C^{(1)}}) \text{ 当 } |h|_{C^{(1)}} \to 0 \text{ 时}.
\end{aligned}$$

而这意味着等式 (7) 成立.

现在, 根据复合映射的微分定理断定, 泛函 (3) 确实可微, 并且

$$F'(f)h = \int_a^b (\partial_2 L(x,f(x),f'(x))h(x) + \partial_3 L(x,f(x),f'(x))h'(x))dx \tag{9}$$

经常把泛函 (3) 限制在那样一些函数 $f \in C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ 的仿射空间上, 它们在区间 $[a,b]$ 的端点取固定的值 $f(a) = A, f(b) = B$. 在这种情况下, 切空间 $TC_f^{(1)}$ 中的函数 h 在区间 $[a,b]$ 的端点应该有零值. 考虑到这一点, 在这种情况下, 利用分部积分, 显然可把等式 (9) 化为

$$F'(f)h = \int_a^b \left(\partial_2 L(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x,f(x),f'(x))\right)h(x)dx \tag{10}$$

当然要预先假设 L 和 f 属于相应的函数类 $C^{(2)}$.

特别地, 如果 f 是这个泛函的极值点 (极值曲线), 那么根据定理 2, 对于任意使得 $h(a)=h(b)=0$ 的函数 $h\in C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ 均有 $F'(f)h=0$. 由此, 由 (10) 不难推出 (见练习 3), 函数 f 应该满足**欧拉 – 拉格朗日方程**

$$\partial_2 L(x,f(x),f'(x))-\frac{d}{dx}\partial_3 L(x,f(x),f'(x))=0. \tag{11}$$

这是在变分学中被称为欧拉 – 拉格朗日方程的特殊的形式, 现在研究具体的例子.

例 2 **短程线问题.**

在平面内连接两个固定点的曲线中, 求长度最小的那条曲线.

在这种情况下, 答案是显然的, 宁愿把它作为对以下推理的一个检验.

我们将认为, 在平面上给出了笛卡儿坐标系, 在该坐标系中不妨认为点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 是给定的点. 我们只限于研究那些曲线, 它们是在区间 $[0,1]$ 的端点取零值的函数 $f\in C^{(1)}([0,1];\mathbb{R})$ 的图像. 这种曲线的长度

$$F(f)=\int_0^1\sqrt{1+(f')^2(x)}dx \tag{12}$$

依赖于函数 f 且是例 1 中所研究的那种类型的泛函. 在所给的情况下, 函数 L 有形式

$$L(u^1,u^2,u^3)=\sqrt{1+(u^3)^2},$$

因此, 在这里极值的必要条件 (11) 归结为方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f')^2(x)}}\right)=0,$$

由它推出, 在区间 $[0,1]$ 上

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f')^2(x)}}\equiv\text{常数}. \tag{13}$$

因为函数 $\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ 是严格单调增的增函数*, 所以 (13) 只有在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\equiv$ 常数时才能成立. 这样一来, 要求的光滑极值函数应是线性函数, 其图形通过点 $(0,0),(1,0)$. 由此推出 $f(x)\equiv 0$, 于是我们得到, 连接两个已知点的直线段为所求的曲线.

* 译者注. 原文为函数 $\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ 无处是常函数.

例 3 最速降线 (或捷线) 问题.

这个于 1696 年由约翰 · 伯努利首先提出的关于捷线的经典问题乃是寻求那样的沟槽形式, 质点沿着该沟槽在重力作用下在最短的时间内从已知点 P_0 滑落到另一更低的固定点 P_1.

当然, 我们忽略摩擦力. 此外, 在以后的研究中我们不考虑两个点位于同一铅垂线上的平凡情况.

在通过点 P_0, P_1 的铅垂平面内, 引进直角坐标系, 使得点 P_0 是它的原点, 横轴垂直向下, 而点 P_1 有正的坐标 (x_1, y_1). 我们将只在定义在区间 $[0, x_1]$ 上满足条件 $f(0) = 0, f(x_1) = y_1$ 的光滑函数的图形中寻求沟槽的形式. 我们暂且不讨论这个绝非无可争议的假定 (见习题 4).

如果质点从点 P_0 以零速度开始自己的运动, 那么在所选择的坐标系中它的速度的变化规律为

$$v = \sqrt{2gx}. \tag{14}$$

回忆弧长微分的计算公式,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx, \tag{15}$$

求出沿着由定义在区间 $[0, x_1]$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图形确定的轨道运动的时间

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (f')^2(x)}{x}}dx. \tag{16}$$

对于泛函 (16),

$$L(u^1, u^2, u^3) = \sqrt{\frac{1 + (u^3)^2}{u^1}},$$

因此, 极值的必要条件 (11) 在所给情况下归结为方程

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x(1 + (f')^2(x))}}\right) = 0,$$

从它推出

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f')^2(x)}} = c\sqrt{x}, \tag{17}$$

其中 c 是不为零的常数. (因为 P_0, P_1 不在同一铅垂线上!)

考虑到 (15), 方程 (17) 可以改写为

$$\frac{dy}{ds} = c\sqrt{x}. \tag{18}$$

但从几何的观点有

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \frac{dy}{ds} = \sin\varphi, \tag{19}$$

其中 φ 是曲线的切线与横轴正方向间的夹角.

比较方程 (18) 和 (19) 的第二个方程, 我们求出

$$x = \frac{1}{c^2}\sin^2\varphi. \tag{20}$$

但从 (19) 和 (20) 得到

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\varphi} &= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\frac{dx}{d\varphi}\\ &= \operatorname{tg}\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{c^2}\right) = 2\frac{\sin^2\varphi}{c^2},\end{aligned}$$

由此求出

$$y = \frac{1}{2c^2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + b. \tag{21}$$

设 $\frac{1}{2c^2} =: a$ 和 $2\varphi =: t$, 可把关系式 (20) 和 (21) 改写为

$$\begin{aligned} x &= a(1-\cos t),\\ y &= a(t-\sin t) + b. \end{aligned} \tag{22}$$

因为 $a \neq 0$, 所以只在 $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时 $x = 0$. 从函数 (22) 的形式推出, 不失一般性, 可以认为点 $P_0 = (0, 0)$ 对应于参量 $t = 0$. 这时 $b = 0$, 我们得到所求曲线的更简单的参数形式

$$\begin{aligned} x &= a(1-\cos t),\\ y &= a(t-\sin t). \end{aligned} \tag{23}$$

这样, 捷线是摆线, 它在起始点 P_0 是具有铅垂切线的尖点. 常数 a, 即同位相似系数, 应当这样选择, 它使曲线 (23) 也通过点 P_1. 画出曲线 (23) 后, 可以发现, 这样的选择不总是唯一的, 这也证实了极值的必要条件 (11) 一般来说不是充分的. 然而从物理意义考虑, 在参数 a 的可能的值中应该选取怎样的值是显然的 (其实也可以用直接计算来证实).

练　习

1. 设 $f: U \to Y$ 是赋范空间 X 的开子集 U 到赋范空间 Y 的 $C^{(n)}(U; Y)$ 类映射, 闭区间 $[x, x+h]$ 整个含于 U 中, 函数 f 在开区间 $]x, x+h[$ 的点有 $n+1$ 阶微分, 而且在任意点 $\xi \in]x, x+h[$ 有 $\| f^{(n+1)}(\xi) \| \leqslant M$.

a) 证明, 函数

$$g(t) = f(x+th) - \left(f(x) + f'(x)(th) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(th)^n\right)$$

在闭区间 $[0,1]\subset\mathbb{R}$ 上定义在开区间 $]0,1[$ 上可微, 且对任何 $t\in]0,1[$ 成立估计式

$$\| g'(t) \| \leqslant \frac{1}{n!}M|th|^n|h|.$$

b) 证明, $|g(1)-g(0)|\leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}M|h|^{n+1}$.

c) 证明以下的泰勒公式:

$$\left|f(x+h)-\left(f(x)+f'(x)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n\right)\right|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|h|^{n+1}.$$

d) 如果已知在 U 内 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, 问映射 $f:U\to Y$ 有什么性质?

2. a) 如果 $n-$ 线性对称算子 A 对任意向量 $x\in X$ 均有 $Ax^n=0$, 那么 $A(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0$, 即在 X 中任意一组向量 $x_1,\cdots,x_n$ 上算子 A 等于零.

b) 如果映射 $f:U\to Y$ 在点 $x\in U$ 有 n 阶微分 $f^{(n)}(x)$, 且满足条件

$$f(x+h)=L_0+L_1h+\cdots+\frac{1}{n!}L_nh^n+\alpha(h)|h|^n,$$

其中 $L_i, i=0,1,\cdots,n$ 是 $i-$ 线性算子, 而当 $h\to 0$ 时 $\alpha(h)\to 0$, 那么 $L_i=f^{(i)}(x), i=0,1,\cdots,n$.

c) 试证, 一般来说, 在上面的问题中, 从所导出的函数 f 展开式的存在还不能得出这个函数在点 x 的 n 阶微分 $f^{(n)}(x)$(当 $n>1$) 的存在性.

d) 证明, 映射 $\mathfrak{L}(X;Y)\ni A\mapsto A^{-1}\in\mathfrak{L}(Y;X)$ 在自己的定义域内是无穷可微的, 而且

$$(A^{-1})^{(n)}(A)(h_1,\cdots,h_n)=(-1)^nA^{-1}h_1A^{-1}h_2\cdot\cdots\cdot A^{-1}h_nA^{-1}.$$

3. a) 设 $\varphi\in C([a,b];\mathbb{R})$. 试证, 如果对于任意使 $h(a)=h(b)=0$ 的函数 $h\in C^{(2)}([a,b];\mathbb{R})$ 满足条件

$$\int_a^b\varphi(x)h(x)dx=0,$$

那么在 $[a,b]$ 上 $\varphi(x)\equiv 0$.

b) 证明欧拉 – 拉格朗日方程 (11) 是泛函 (3) 在由 $C^{(2)}([a,b];\mathbb{R})$ 中一切在闭区间 $[a,b]$ 的端点取给定值的函数构成的集合上的极值必要条件.

4. 设绕 x 轴旋转的旋转曲面用平面 $x=a, x=b$ 所截的截线分别是给定半径 r_a, r_b 的圆周, 在所有这些旋转曲面中, 求有最小面积的旋转曲面的经线公式 $y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$.

5. a) 在最速降线问题中, 函数 L 并不满足例 1 的条件, 因此在这种情况下直接利用例 1 的结果是不合适的. 试证, 经过必要的修改, 能重新导出公式 (10), 它和方程 (11) 这时仍然有效.

b) 如果质点是从 P_0 点以不为零的初始速度出发, 问捷线的方程是否改变 (运动在闭管中无摩擦地进行)?

c) 试证, 如果 P 是从 P_0 到 P_1 的捷线上的任意一点, 那么这条捷线的从 P_0 到 P 的弧是连接点对 P_0, P 的捷线.

d) 像最后的公式 (23) 所表明的那样, 连接 P_0, P_1 的捷线不一定都能写为 $y = f(x)$ 的形式. 试利用习题 c) 的结果推导公式 (23), 而不作关于捷线整体构造的类似假设.

e) 试给出点 P_1 的位置, 使得对应于点对 P_0, P_1 的捷线在例 3 中引进的坐标系下不能写成 $y = f(x)$ 的形式.

f) 试给出点 P_1 的位置, 使对应于点对 P_0, P_1 的捷线在例 3 的坐标系下有形式 $y = f(x)$, 而且 $f \notin C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$. 因而得到, 这时使我们感兴趣的泛函 (16) 在集合 $C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ 上有下界, 但没有最小值.

g) 试证, 连接空间的点对 P_0, P_1 的捷线是平面曲线.

6. 在均匀重力场中, 我们用质点沿着点对 P_0, P_1 的捷线运动的时间来度量空间的点 P_0 到点 P_1 的距离 $d(P_0, P_1)$.

a) 在这个意义下求出点 P_0 到固定铅垂线的距离.

b) 试求当点 P_1 垂直向上逼近过点 P_0 的水平线时, 函数 $d(P_0, P_1)$ 的渐近值.

c) 说明函数 $d(P_0, P_1)$ 是不是距离.

§7 一般的隐函数定理

在本章最后的这一节中, 几乎所有的在这一章中发展起来的工具都将在作为示范的隐函数研究工作中展示出来. 读者已从第 8 章得到了有关隐函数定理的内容和它在分析中的地位以及它的应用的基本知识, 因此在这里我们不先正式地去解释事情的本质, 仅仅指出, 这一次, 将用基于压缩映像原理的完全不同的方法构造隐函数. 这个方法在分析中经常使用, 并且, 在计算中是很有效的.

定理 设 X, Y, Z 是赋范空间, 而且 Y 是完备的空间;

$$W = \{(x,y) \in X \times Y \,|\, |x - x_0| < \alpha \wedge |y - y_0| < \beta\}$$

是空间 X, Y 的乘积 $X \times Y$ 中点 (x_0, y_0) 的邻域.

如果映射 $F: W \to Z$ 满足条件.

1. $F(x_0, y_0) = 0$.

2. $F(x,y)$在点 (x_0, y_0) 连续.

3. $F'_y(x,y)$在 W 有定义, 且在点 (x_0, y_0) 连续.

4. $F'_y(x_0, y_0)$ 是可逆[1]映射.

那么存在 X 中点 x_0 的邻域 $U = U(x_0)$, Y 中点 y_0 的邻域 $V = V(y)$ 以及映射 $f: U \to V$ 使得

1′. $U \times V \subset W$.

2′. (在 $U \times V$ 中 $F(x,y) = 0$) $\Leftrightarrow$ ($y = f(x)$, 其中 $x \in U$, 而 $f(x) \in V$).

[1] 即 $\exists [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \in \mathfrak{L}(Z; Y)$.

3′. $y_0 = f(x_0)$.

4′. f在点 x_0 连续.

◀ 1° 为了书写简单起见, 不失一般性, 可以认为 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 因而

$$W = \{(x,y) \in X \times Y \| x| < \alpha \wedge |y| < \beta\}.$$

2° 在定理的证明中, 依赖于参数 $x \in X, |x| < \alpha$, 定义在集 $\{y \in Y \| y| < \beta\}$ 上的辅助映射族

$$g_x(y) := y - (F'_y(0,0))^{-1} \circ F(x,y), \tag{1}$$

起着重要的作用.

我们先来讨论公式 (1). 首先说明映射 g_x 的定义是否合理以及 g_x 的值域在什么地方.

对于 $(x,y) \in W$ 映射 F 有定义, F 在点对 (x,y) 的值 $F(x,y)$ 属于空间 Z. 我们知道, 在任意点 $(x,y) \in W$ 的偏导映射 $F'_y(x,y)$ 是空间 Y 到空间 Z 的线性连续映射.

根据条件 4, 映射 $F'_y(0,0) : Y \to Z$ 有连续的逆映射 $(F'_y(0,0))^{-1} : Z \to Y$. 这说明确实能定义复合映射 $(F'_y(0,0))^{-1} \circ F(x,y)$, 且它的值属于空间 Y.

因此, 对于点 $O \in X$ 的 $\alpha-$ 邻域 $B_x(0;\alpha) := \{x \in X \| x| < \alpha\}$ 中的任意点 x, g_x 是从点 $O \in Y$ 的 $\beta-$ 邻域

$$B_Y(0;\beta) := \{y \in Y \| y| < \beta\}$$

到空间 Y 的映射 $g_x : B_Y(0;\beta) \to Y$.

显然, 映射 (1) 与方程 $F(x,y) = 0$ 关于变量 y 的可解性的问题的联系乃是: 点 y_x 是映射 g_x 的不动点, 当且仅当 $F(x,y_x) = 0$.

我们记下看到的这个重要结果:

$$g_x(y_x) = y_x \Leftrightarrow F(x,y_x) = 0. \tag{2}$$

这样一来, 寻求和研究隐函数 $y = y_x = f(x)$, 归结为寻求映射 (1) 的不动点并研究它与变量 x 的相关性.

3° 我们证明, 存在正数 $\gamma < \min\{\alpha,\beta\}$, 使得对于任意满足条件 $|x| < \gamma < \alpha$ 的点 $x \in X$, 从球 $B_Y(0;\gamma) := \{y \in Y \| y| < \gamma < \beta\}$ 到 Y 的映射 $g_x : B_Y(0;\gamma) \to Y$ 是具有压缩系数不超过 1/2 的压缩映射. 事实上, 对于任意固定的 $x \in B_X(0;\alpha)$, 从条件 (3) 和复合映射的可微性定理推出映射 $g_x : B_Y(0;\beta) \to Y$ 是可微的, 而且

$$\begin{aligned} g'_x(y) &= e_Y - (F'_y(0,0))^{-1} \circ (F'_y(x,y)) \\ &= (F'_y(0,0))^{-1}(F'_y(0,0) - F'_y(x,y)). \end{aligned} \tag{3}$$

由于 $F'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的连续性 (条件 (3)), 可以找到点 $(0,0) \in X \times Y$ 的邻域

$$\{(x,y) \in X \times Y \| x| < \gamma < \alpha \wedge |y| < \gamma < \beta\},$$

使在其中成立

$$\| g'_x(y) \| \leqslant \| (F'_y(0,0))^{-1} \| \cdot \| F'_y(0,0) - F'_y(x,y) \| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

这里我们用到了 $(F'_y(0,0))^{-1} \in \mathfrak{L}(Z;Y)$, 即 $\| (F'_y(0,0))^{-1} \| < \infty$.

以下我们将认为 $|x| < \gamma$ 和 $|y| < \gamma$, 因此估计 (4) 成立.

于是, 对于任意的 $x \in B_X(0;\gamma)$ 和任意的 $y_1, y_2 \in B_Y(0;\gamma)$, 根据有限增量定理我们得

$$|g_x(y_1) - g_x(y_2)| \leqslant \sup_{\xi \in]y_1,y_2[} \| g'(\xi) \| \, |y_1 - y_2| < \frac{1}{2}|y_1 - y_2|. \tag{5}$$

4° 为了断定存在映射 g_x 的不动点 y_x, 需要有那样的完备度量空间, 映射 g_x 把它映入自身中 (可能不到上).

我们来验证, 对于任意满足条件 $0 < \varepsilon < \gamma$ 的数 ε, 有开区间 $]0,\gamma[$ 中的数 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使对于任意的 $x \in B_X(0;\delta)$, 映射 g_x 把闭球 $\overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 映入自身, 即 $g_x(\overline{B}_Y(0;\varepsilon)) \subset \overline{B}_Y(0;\varepsilon)$.

事实上, 首先根据 ε 选取数 $\delta \in]0,\gamma[$ 使对 $|x| < \delta$ 有

$$\begin{aligned} |g_x(0)| &= |(F'_y(0,0))^{-1} \circ F(x,0)| \\ &\leqslant \| (F'_y(0,0))^{-1} \| \, |F(x,0)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned} \tag{6}$$

由条件 1 和 2, 根据它们有 $F(0,0) = 0$ 且 $F(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续, 上述事情是可以做到的.

现若 $|x| < \delta(\varepsilon) < \gamma$ 且 $|y| \leqslant \varepsilon < \gamma$, 那么从 (5) 和 (6) 我们得到

$$|g_x(y)| \leqslant |g_x(y) - g_x(0)| + |g_x(0)| < \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

而这意味着当 $|x| < \delta(\varepsilon)$ 时, 有

$$g_x(\overline{B}_Y(0;\varepsilon)) \subset B_Y(0,\varepsilon). \tag{7}$$

作为完备度量空间 Y 的闭子集, 闭球 $\overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 本身是完备的度量空间.

5° 比较关系式 (5) 和 (7), 根据不动点原理 (见第 9 章 §7) 可以推出, 对于每个点 $x \in B_X(0;\delta(\varepsilon)) =: U$, 存在唯一的点

$$y = y_x =: f(x) \in B_Y(0;\varepsilon) =: V,$$

它是映射 $g_x : \overline{B}_Y(0;\varepsilon) \to \overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 的不动点.

由基本关系式 (2) 知道所构造的函数 $f: U \to V$ 具有性质 $2'$, 而由条件 (1) $F(0,0)=0$ 得到性质 $3'$.

根据 $U \times V \subset B_X(0;\alpha) \times B_Y(0;\beta) = W$ 的构造推出邻域 U 和 V 的性质 $1'$.

最后, 从 $2'$ 和在证明的第 $4°$ 段中所指出的: 对于任意的 $\varepsilon > 0 (\varepsilon < \gamma)$ 有 $\delta(\varepsilon) > 0 (\delta(\varepsilon) < \gamma)$, 使对任意的 $x \in B_X(0;\delta(\varepsilon))$ 成立

$$g_x(\overline{B}_Y(0;\varepsilon)) \subset B_Y(0;\varepsilon),$$

即当 $|x| < \delta(\varepsilon)$ 时映射 $g_x: \overline{B}_Y(0;\varepsilon) \to \overline{B}_Y(0;\varepsilon)$ 的唯一不动点 $y_x = f(x)$ 满足条件 $|f(x)| < \varepsilon$, 可推出函数 $y = f(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性, 即性质 $4'$. ►

我们证明了隐函数存在定理. 现在, 对这个函数由给定的函数 F 的性质所产生的性质作一些补充.

补充 1 (关于隐函数的连续性) 如果除定理的条件外, 还设映射 $F: W \to Z$ 不仅在点 (x_0, y_0) 连续, 而且在它的某个邻域中连续, 那么求得的函数 $f: U \to V$ 不仅在点 $x_0 \in U$ 连续, 而且在它的某个邻域中连续.

◄ 从定理的条件 3 和 4, 根据映射

$$\mathfrak{L}(Y;Z) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathfrak{L}(Z;Y)$$

的性质 (见 §3 中例 6) 推出, 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域的每一点 (x, y), 算子 $F'_y(x,y) \in \mathfrak{L}(Y;Z)$ 是可逆的, 因此, 当 F 的连续性具有所作的补充假设时, 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域中形如 $(x, f(x))$ 的所有的点 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 都满足条件 1—4, 而以前只在点 (x_0, y_0) 满足.

在这些点 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ 中任意点的邻域内的重复构造隐函数的过程，我们就能得到在点 $\tilde{x}$ 连续的函数 $y = \tilde{f}(x)$，又由于 $2'$，它与函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某个邻域完全一样. 而这正说明函数 f 在点 $\tilde{x}$ 连续. ►

补充 2 (关于隐函数的可微性) 如果除了定理中的条件外, 还设在点 (x_0, y_0) 的邻域 W 中也存在偏导数 $F'_x(x,y)$, 且 $F'_x(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续, 那么函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微, 而且

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} \circ (F'_x(x_0, y_0)). \tag{8}$$

◄ 我们来直接验证公式 (8) 右边的线性算子 $L \in \mathfrak{L}(X;Y)$, 实际上是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的微分.

像以前那样, 为了书写简单起见, 不妨认为 $x_0 = 0, y_0 = 0$, 因此, $f(0) = 0$.

我们先进行初步的计算

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f(0) - Lx| = |f(x) - Lx| \\
&= |f(x) - (F'_y(0,0))^{-1} \circ (F'_x(0,0))x| \\
&= |(F'_y(0,0))^{-1}(F'_x(0,0)x - F'_y(0,0)f(x))| \\
&= |(F'_y(0,0))^{-1}(F(x,f(x)) - F(0,0) + F'_x(0,0)x - F'_y(0,0)f(x))| \\
&\leqslant \| (F'_y(0,0))^{-1} \| \, |F(x,f(x)) - F(0,0) + F'_x(0,0)x - F'_y(0,0)f(x)| \\
&\leqslant \| (F'_y(0,0))^{-1} \| \cdot \alpha(x,f(x))(|x| + |f(x)|),
\end{aligned}
$$

其中当 $(x,y) \to (0,0)$ 时 $\alpha(x,y) \to 0$.

在推导这些关系时考虑到了 $F(x,f(x)) \equiv 0$ 以及由偏导映射 F'_x, F'_y 在点 (0,0) 处的连续性导出的函数 $F(x,y)$ 在这点的可微性.

为了方便起见, 我们记 $a := \| L \|$ 和 $b := \| (F'_y(0,0))^{-1} \|$.

考虑到

$$
|f(x)| = |f(x) - Lx + Lx| \leqslant |f(x) - Lx| + |Lx| \leqslant |f(x) - Lx| + a|x|,
$$

可以继续上面所作的初步计算并得到

$$
|f(x) - Lx| \leqslant b|\alpha(x,f(x))|(|a+1||x| + |f(x) - Lx|),
$$

或者

$$
|f(x) - Lx| \leqslant \frac{(a+1)b}{1 - b|\alpha(x,f(x))|}\alpha(x,f(x))|x|.
$$

由 f 在点 $x=0$ 的连续性和 $f(0)=0$, 当 $x \to 0$ 时也有 $f(x) \to 0$, 因此当 $x \to 0$ 时 $\alpha(x,f(x)) \to 0$.

所以, 从最后的不等式推出: 当 $x \to 0$ 时有

$$
|f(x) - f(0) - Lx| = |f(x) - Lx| = o(|x|). \ \blacktriangleright
$$

补充 3 (关于隐函数的连续可微性) 如果除了定理的条件外, 还设偏导映射 F'_x, F'_y 在点 (x_0, y_0) 的邻域 W 中存在且连续, 那么在点 x_0 的某个邻域内函数 $y = f(x)$ 连续可微, 并且它的导映射按公式

$$
f'(x) = -(F'_y(x,f(x)))^{-1} \circ (F'_x(x,f(x))) \tag{9}
$$

计算.

◀ 从公式 (8) 我们已知知道, 在使算子 $F'_y(x,f(x))$ 可逆的那个点 x, 导映射 $f'(x)$ 存在, 并可表为 (9).

剩下的是验证在所作的假设条件下, 函数 $f'(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某个邻域内连续.

双线性函数 $(A, B) \mapsto A \cdot B$, 即线性算子 A, B 的乘积, 是连续函数.

算子 $B = -F'_x(x, f(x))$, 作为连续函数的复合

$$x \mapsto (x, f(x)) \mapsto -F'_x(x, f(x)),$$

连续地依赖于 x.

关于线性算子 $A^{-1} = F'_y(x, f(x))$ 可以同样地叙述.

还要注意 (见 §3 中例 6) 映射 $A^{-1} \mapsto A$ 在它的定义域内也是连续的.

这样一来, 由公式 (9) 给出的函数 $f'(x)$, 作为连续函数的复合, 在点 $x = x_0$ 的某个邻域内连续. ►

现在可以作一个总结, 并把它叙述为以下的一般

命题 如果除了隐函数定理的条件外, 还设函数 F 属于 $C^{(k)}(W; Z)$, 那么由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数

$$y = f(x)$$

在点 x_0 的某个邻域 U 内属于 $C^{(k)}(U; Y)$.

◄ 当 $k = 0$ 和 $k = 1$ 时命题已经得证. 如果注意到映射

$$\mathfrak{L}(Y; Z) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathfrak{L}(Z; Y)$$

(无穷次) 可微, 以及当微分等式 (9) 时, 右边总含有 f 的比左边低一阶的导数, 那么从公式 (9) 用归纳法即可证明一般情况. 这样一来, 函数 F 有几阶光滑性, 等式 (9) 就可逐次微分多少次. ►

特别地, 如果

$$f'(x)h_1 = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \circ (F'_x(x, f(x)))h_1,$$

那么

$$\begin{aligned}
&f''(x)(h_1, h_2) \\
&= -d(F'_y(x, f(x)))^{-1}h_2 F_x(x, f(x))h_1 - (F'_y(x, f(x)))^{-1} d(F'_x(x, f(x))h_1)h_2 \\
&= (F'_y(x, f(x)))^{-1} dF'_y(x, f(x))h_2 (F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))h_1 \\
&\quad -(F'_y(x, f(x)))^{-1}((F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x))h_1)h_2 \\
&= (F'_y(x, f(x)))^{-1}((F''_{yx}(x, f(x)) + F''_{yy}(x, f(x))f'(x))h_2) \\
&\quad \times (F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))h_1 - (F'_y(x, f(x)))^{-1} \\
&\quad \times ((F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x))h_1)h_2.
\end{aligned}$$

用不那么详细但是更能一眼看清全貌的写法, 这就是

$$f''(x)(h_1,h_2)=(F'_y)^{-1}[((F''_{yx}+F''_{yy}f')h_2)(F'_y)^{-1}F'_xh_1-((F''_{xx}+F''_{xy}f')h_1)h_2]. \quad (10)$$

这样, 原则上可以得到隐函数任意阶导数的表达式, 但是正像我们从公式 (10) 已看到的那样, 在一般情况下这些表达式是十分繁琐的, 用起来都很不方便. 我们现在来研究一下怎样把所得结果具体用于最重要的特殊情况, 即 $X=\mathbb{R}^m, Y=\mathbb{R}^n, Z=\mathbb{R}^n$ 的情况.

在这种情况下, 映射 $z=F(x,y)$ 有坐标表示

$$\begin{aligned} z^1 &= F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n).\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z^n &= F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n). \end{aligned} \quad (11)$$

偏导映射 $F'_x\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n), F'_y\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 由在对应点 (x,y) 算出的矩阵

$$F'_x=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial x^m}\end{pmatrix},\quad F'_y=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}$$

给出.

我们知道, F'_x 和 F'_y 的连续性等价于这些矩阵的所有元素的连续性.

线性映射 $F'_y(x_0,y_0)\in\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 的可逆性等价于这个映射所给出的矩阵的非退化性.

因此, 在所研究的情况下, 由隐函数定理推出: 设

1)
$$\begin{aligned} &F^1(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &F^n(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)=0; \end{aligned}$$

2) $F^i(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)(i=1,\cdots,n)$ 在点

$$(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$$

连续;

3) 所有偏导数 $\dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n), i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m$, 在点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 的邻域有定义, 且在这点连续;

4) 矩阵 F'_y 在点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 的行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

不为零.

那么存在 $\mathbb{R}^m$ 中点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m)$ 的邻域 U, $\mathbb{R}^n$ 中点 $(y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 的邻域 V, 和坐标表示为

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1,\cdots,x^m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= f^n(x^1,\cdots,x^m), \end{aligned} \tag{12}$$

的映射 $f:U\to V$ 使得

1′) 在点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ 的邻域 $U\times V$ 内, 方程组

$$\begin{cases} F^1(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^n(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)=0 \end{cases}$$

等价于用等式组 (12) 表示的函数依赖关系 $f:U\to V$;

2′) $y_0^1=f^1(x_0^1,\cdots,x_0^m)$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$y_0^n=f^n(x_0^1,\cdots,x_0^m)$;

3′) 映射 (12) 在点 $(x_0^1,\cdots,x_0^m,y_0^1,\cdots,y_0^n)$ 连续.

此外, 如果还知道映射 (11) 属于光滑函数类 $C^{(k)}$, 那么从上述命题可以看出, 映射 (12) 也属于类 $C^{(k)}$, 当然是在它的定义域内.

在所研究的情况下, 公式 (9) 被具体化为矩阵等式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix},$$

等式中的左边是在点 $(x^1,\cdots,x^m)$ 取值, 而右边在相应点

$$(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^n)$$

取值, 其中 $y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m), i=1,\cdots,n$.

如果 $n=1$, 也就是在关于 y 求解方程

$$F(x^1,\cdots,x^m,y)=0$$

时, F'_y 的矩阵由一个元素, 也就是一个数 $\frac{\partial F}{\partial y}(x^1,\cdots,x^m,y)$ 组成. 在这种情况下, $y=f(x^1,\cdots,x^m)$ 且

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^m}\right)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x^m}\right). \tag{13}$$

这时公式 (10) 也稍有简化, 更准确地说, 是可以改写为以下更对称的形式:

$$f''(x)(h_1,h_2)=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}f')h_1F'_yh_2+(F''_{yx}+F''_{yy}f')h_2F'_xh_1}{(F'_y)^2}. \tag{14}$$

如果 $n=1$ 且 $m=1$, 那么 $y=f(x)$ 是单变量的实值函数, 这时公式 (13),(14) 大大简化, 变成了熟知的由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数的前两阶导数的数值等式

$$f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}(x,y),$$
$$f''(x)=-\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}f')F'_y-(F''_{yx}+F''_{yy}f')F'_x}{(F'_y)^2}(x,y).$$

练　习

1. a) 假定除了定理中所说的函数 $f:U\to Y$ 外, 还有定义在点 x_0 的某个邻域 $\widetilde{U}$ 中且在 $\widetilde{U}$ 中满足条件 $y_0=f(x_0)$ 和 $F(x,f(x))\equiv 0$ 的函数 $\tilde{f}:\widetilde{U}\to Y$. 试证, 如果 $\tilde{f}$ 在点 x_0 连续, 那么 f 和 $\tilde{f}$ 在点 x_0 的某个邻域中相同.

b) 证明, 如果没有关于 $\tilde{f}$ 在 x_0 连续性的假设, 断言 a) 一般不成立.

2. 再次分析隐函数定理及其补充的证明, 并证明:

a) 如果 $z=F(x,y)$ 是复变量 x,y 的连续可微的复值函数, 那么由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 关于复变量 x 是可微的.

b) 在定理的条件中, 空间 X 不一定要求是赋范空间, 可以是任意的拓扑空间.

3. a) 说明由关系式 (10) 给出的 $f''(x)(h_1,h_2)$ 是否对称?

b) 对于数值函数 $F(x^1,x^2,y)$ 和 $F(x,y^1,y^2)$ 写出公式 (9) 和 (10) 的矩阵形式.

c) 证明, 如果 $\mathbb{R}\ni t\mapsto A(t)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 是无穷光滑地依赖于参量 t 的一族非退化矩阵 $A(t)$, 那么

$$\frac{d^2A^{-1}}{dt^2}=2A^{-1}\left(\frac{dA}{dt}A^{-1}\right)^2-A^{-1}\frac{d^2A}{dt^2}A^{-1},$$

其中 $A^{-1}=A^{-1}(t)$ 是矩阵 $A=A(t)$ 的逆矩阵的记号.

4. a) 试证, 定理的补充 1 是第 9 章 §7 中所研究的压缩映射族的不动点稳定性条件的直接推论.

b) 设 $\{A_t : X \to X\}$ 是完备赋范空间 X 到 X 的依赖于参量 t 的压缩映射族,t 在赋范空间 T 的区域 Ω 内变化. 试证, 如果 $A(x) = \varphi(t, x)$ 是 $C^{(n)}(\Omega \times X; X)$ 中的函数, 那么映射 A_t 的不动点 $x(t)$ 作为 t 的函数属于 $C^{(n)}(\Omega; X)$.

5. a) 借助于隐函数定理证明以下*逆映射定理*.

设 $g : G \to X$ 是完备赋范空间 Y 的点 y_0 的邻域 G 到赋空间 X 的映射.

如果映射 $x = g(y)$

1° 在 G 中可微,

2° $g'(y)$ 在 y_0 处连续,

3° $g'(y_0)$ 是可逆的算子;

那么有 Y 中点 y_0 的邻域 $V \subset Y$ 和 X 中点 x_0 的邻域 $U \subset X$ 使得 $g : V \to U$ 是满单射, 而它的逆映射 $f : U \to V$ 在 U 中连续, 在 x_0 可微且

$$f'(x_0) = (g'(y_0))^{-1}.$$

b) 证明, 如果除了 a) 中的已知条件, 还知道映射 g 属于 $C^{(n)}(V; U)$ 那么逆映射 f 属于 $C^{(n)}(U; V)$.

c) 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射, 在任意点 $x \in \mathbb{R}^n, f'(x)$ 的矩阵满秩且满足不等式 $\| (f')^{-1}(x) \| > C > 0, C$ 为不依赖于 x 的常数. 证明 f 是满单射.

d) 利用解练习 c) 的经验, 试给出点 x_0 的那样的球形邻域 $U = B(x_0, r)$ 的半径的估计, 在其中反函数定理中所研究的映射 $f : U \to V$ 明显是有定义的.

6. a) 证明, 如果线性映射 $A \in \mathfrak{L}(X; Y)$ 和 $B \in \mathfrak{L}(X; R)$ 使得 $\ker A \subset \ker B$ (通常, 记号 ker 表示算子的核), 那么有线性映射 $\lambda \in \mathfrak{L}(Y; R)$, 使得 $B = \lambda \cdot A$.

b) 设 X 和 Y 是赋范空间, 而 $f : X \to R$ 和 $g : X \to Y$ 分别是定义在 X 上取值于 R 和 Y 中的光滑函数. 设 S 是 X 中由方程 $g(x) = y_0$ 给定的光滑曲面. 证明, 如果 $x_0 \in S$ 是函数 $f|_S$ 的极值点, 那么与 S 在点 x_0 相切的任何向量 h 同时会满足两个条件: $f'(x_0)h = 0$ 和 $g'(x_0)h = 0$.

c) 证明, 如果 $x_0 \in S$ 是函数 $f|_S$ 的极值点, 那么 $f'(x_0) = \lambda \cdot g'(x_0)$, 其中 $\lambda \in \mathfrak{L}(Y; R)$.

d) 试指出, 对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 中光滑曲面上的函数, 如何从上述结果求出条件极值的经典的拉格朗日必要条件 (*拉格朗日乘子法*).

7. 众所周知, 具复系数的方程 $z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$, 一般说来, 有 n 个不同的复根. 试证, 至少在所有根不同时, 方程的根光滑地依赖于方程的系数.

第十一章　重　积　分

§1　n 维区间上的黎曼积分

1. 积分定义

a. $\mathbb{R}^n$ 中的区间和它的测度

定义 1　集合 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i, i=1,\cdots,n\}$ 叫做 $\mathbb{R}^n$ 中的区间或坐标平行多面体.

如果希望指出区间是由点 $a=(a^1,\cdots,a^n)$ 和 $b=(b^1,\cdots,b^n)$ 确定的, 那么经常用记号 $I_{a,b}$ 表示它, 或者与一维情况类似, 记作 $a\leqslant x\leqslant b$.

定义 2　称与区间 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|a^i\leqslant x^i\leqslant b^i, i=1,\cdots,n\}$ 对应的数 $|I|:=\prod\limits_{i=1}^{n}(b^i-a^i)$ 为该区间的体积或者测度.

区间 I 的体积 (测度) 也用记号 $\nu(I)$ 或者 $\mu(I)$ 表示.

引理 1　$\mathbb{R}^n$ 中区间的测度

a) 是齐次的, 即如果 $\lambda I_{a,b}:=I_{\lambda a,\lambda b}$, 其中 $\lambda\geqslant 0$, 那么

$$|\lambda I_{a,b}|=\lambda^n|I_{a,b}|;$$

b) 是可加的, 即如果区间 $I,I_1,\cdots,I_k$ 满足 $I=\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$ 且区间 $I_1,\cdots,I_k$ 两两没有公共内点, 那么 $|I|=\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|$;

c) 如果区间 I 被有限的一组区间 $I_1, \cdots, I_k$ 覆盖, 即 $I \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, 那么 $|I| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |I_i|$.

所有这些断言容易从定义 1 和 2 推出.

b. 区间的分划和分划集的基

设给定区间 $I = \{x \in \mathbb{R}^n | a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, i = 1, \cdots, n\}$. 由坐标线段 $[a^i, b^i](i = 1, \cdots, n)$ 的分划能导出把区间 I 分割成一些较小区间的分划, 这些小区间是由上述坐标线段的分划间隔的直积得出的.

定义 3 我们称区间 I 的上述 (表成更小区间 I_j 的并集 $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ 的) 表达式为区间 I 的分划, 并用记号 P 表示.

定义 4 称量 $\lambda(P) := \max_{1 \leqslant j \leqslant k} d(I_j)$ (分划 P 的区间直径之最大者) 为分划 P 的参数.

定义 5 如果在分划 P 的每个区间 I_j 中确定了一个点 $\xi_j \in I_j$, 则说给出了一个带"标志点"的分划.

像以前一样, 点组 $(\xi_1, \cdots, \xi_k)$ 用一个符号 ξ 表示, 而带有标志点的分划用记号 (P, ξ) 表示.

在区间 I 的一切带标志点的分划之集 $\mathfrak{P} = \{(P, \xi)\}$ 中引进基 $\lambda(P) \to 0$, 像一元的情况那样, 它的元素 $B_d(d > 0)$ 由关系式 $B_d := \{(P, \xi) \in \mathfrak{P} | \lambda(P) < d\}$ 确定.

从参数 $\lambda(P)$ 任意接近于零的分划的存在性推出, $\mathfrak{B} = \{B_d\}$ 确实是基.

c. 积分和与积分

设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是区间 I 上的实值[1]函数, 而 $P = \{I_1, \cdots, I_k\}$ 是该区间带标志点 $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ 的分划.

定义 6 称和

$$\sigma(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)|I_i|$$

为函数 f 对应于区间 I 带标志点的分划 (P, ξ) 的积分和(黎曼).

定义 7 称量

$$\int_I f(x)dx := \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi)$$

为函数 f 在区间 I 上的积分 (黎曼), 如果这里的极限存在的话.

[1] 注意, 在以后的定义里, 可以认为 f 取值于任意线性赋范空间, 例如, 可以是复数空间 $\mathbb{C}$, 空间 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 等等.

我们看到, 这个定义, 乃至构造区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上积分的全部过程, 都逐字逐句地重复着已为我们熟知的在 $\mathbb{R}$ 中的区间上定义黎曼积分的过程. 为了更相似些, 我们甚至保留了以前的被积表达式的形式 $f(x)dx$. 与它等价但更加舒展的积分符号是

$$\int_I f(x^1, \cdots, x^n)dx^1 \cdot \cdots \cdot dx^n$$

或者

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{I}^{n} f(x^1, \cdots, x^n)dx^1 \cdot \cdots \cdot dx^n.$$

为了强调这里所说的是在多维区域 I 上的积分, 称它是*重积分* (与 I 的维数相应称作二重积分, 三重积分等等)

d. 可积性的必要条件

定义 8 对于函数 $f : I \to \mathbb{R}$, 如果定义 7 中所指的有限极限存在，就称 f 为区间 I 上的(*黎曼*) *可积函数*.

所有这样的函数组成的集用记号 $\mathfrak{R}(I)$ 表示.

我们引进以下可积性的最简单的必要条件.

命题 1 $f \in \mathfrak{R}(I) \Rightarrow f$ *在* I *上有界*.

◀ 设 P 是区间 I 的任一分划. 如果函数 f 在 I 上无界, 那么它在分划 P 的某个区间 I_{i_0} 上无界. 如果 $(P, \xi'), (P, \xi'')$ 是带有标志点 ξ' 和 ξ'' 的分划, 其中 ξ' 和 ξ'' 只在区间 I_{i_0} 中取不同点 ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0}, 那么

$$\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'') = |f(\xi'_{i_0}) - f(\xi''_{i_0})||I_{i_0}|.$$

由 f 在 I_{i_0} 中的无界性, 我们可以变动点 ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0} 中的一个, 使最后一个等式的右边任意大. 由柯西准则推出, 当 $\lambda(P) \to 0$ 时, 函数 f 的积分和没有极限. ▶

2. 函数黎曼可积的勒贝格准则

在研究一维情况的黎曼积分时, 我们已经 (不加证明地) 向读者介绍了积分存在的勒贝格准则. 这里, 我们来回忆某些概念并证明这个准则.

a. $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集

定义 9 称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$(在勒贝格意义下) 有 (n 维)*零测度*或称之为*零测度集*, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在集合 E 的至多可数个 n 维区间组成的覆盖 $\{I_i\}$, 且这些区间的体积之和 $\sum\limits_i |I_i|$ 不超过 ε.

引理 2 a) 单点集和有限个点组成的集都是零测度集.

b) 有限个或可数个零测度集的并是零测度集.

c) 零测度集的子集也是零测度集.

d) 非退化[①]区间 $I_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ 不是零测度集.

引理 2 的证明与第 6 章 §1 第 3 段中所研究的一维形式的证明没有什么区别, 因此我们将它略去.

例 1 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点 (所有坐标为有理数的点) 集是可数集, 因而是零测度集.

例 2 设 $f: I \to \mathbb{R}$ 是定义在 $n-1$ 维区间 $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的连续实值函数. 证明它在 $\mathbb{R}^n$ 中的图形是 n 维零测度集.

◀ 因为 f 在 I 上一致连续, 所以对 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 使对任意点 $x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 现在, 若取区间 I 带参数 $\lambda(P) < \delta$ 的分划 P, 那么在这个分划的每个区间 I_i 上, 函数的振幅小于 ε. 所以, 如果 x_i 是区间 I_i 的任一确定点, 那么 n 维区间 $\tilde{I}_i = I_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon]$ 显然包含函数 f 在区间 I_i 上的图形, 从而区间 $\tilde{I}_i$ 的并集 $\bigcup\limits_i \tilde{I}_i$ 覆盖函数 f 在 I 上的整个图形. 但

$$\sum_i |\tilde{I}_i| = \sum_i |I_i| \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon |I|$$

(这里 $|I_i|$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中 I_i 的体积,$|\tilde{I}_i|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 $\tilde{I}_i$ 的体积) 因此, 覆盖的总体积确实可以任意接近于零. ▶

注 1 比较引理 2 的论断 b) 和例 2 可以推出, 一般地, 连续函数 $f: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ 或连续函数 $f: M \to \mathbb{R}$, (其中 $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$) 的图形是 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维零测度集.

引理 3 a) 在定义 9 中把用区间族 $\{I_i\}$ 覆盖集合 E 理解为通常意义的覆盖, 即 $E \subset \bigcup\limits_i I_i$, 也可以理解为更严格意义下的覆盖, 即要求 E 的每一点至少是 $\{I_i\}$ 中某一区间的内点. 零测度集类不会因两种不同的理解有所改变[②].

b) $\mathbb{R}^n$ 中的紧集 K 是零测度集, 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$, K 能用有限多个区间覆盖, 而且这些区间的体积之和小于 ε.

◀ a) 如果 $\{I_i\}$ 是 E 的覆盖, 即 $E \subset \bigcup\limits_i I_i$, 且 $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$, 那么取 I_i 的同心相似区间 $\tilde{I}_i$ 代替每个 I_i, 得到区间族 $\{\tilde{I}_i\}$, 它满足条件 $\sum\limits_i |\tilde{I}_i| < \lambda^n \varepsilon$, 其中 λ 是所有区间共同的相似系数. 如果 $\lambda > 1$, 那么显然有 $\{\tilde{I}_i\}$ 也覆盖 E 并使 E 的任一点至少是 $\{\tilde{I}_i\}$ 中某一区间的内点.

---

①是指这样的区间 $I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n | a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, i = 1, \cdots, n\}$, 对任意 $i \in \{1, \cdots, n\}$, 都成立严格不等式 $a^i < b^i$.

②换句话说, 在定义 9 中的区间是闭的还是开的, 是无关紧要的.

b) 可从 a) 和紧集 K 的任一开覆盖都包含它的有限覆盖推出 (可取 $\{\tilde{I}_i \setminus \partial \tilde{I}_i\}$ 作为这样的开覆盖, 其中 $\{\tilde{I}_i\}$ 为在 a) 中所考察的区间组.) ►

b. 康托尔定理的一个推广

我们记得, 函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在集合 E 上的振幅是

$$\omega(f; E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

而函数在点 $x \in E$ 的振幅是

$$\omega(f, x) := \lim_{\delta \to 0} \omega(f; U_E^\delta(x)),$$

其中 $U_E^\delta(x)$ 是点 x 在集合 E 中的 $\delta-$ 邻域.

引理 4 *如果对于函数 $f : K \to \mathbb{R}$ 在紧集 K 的每一点都成立关系式 $\omega(f : x) \leqslant \omega_0$, 那么任给 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$, 对于任一点 $x \in K$ 满足不等式 $\omega(f; U_E^\delta(x)) < \omega_0 + \varepsilon$.*

当 $\omega_0 = 0$ 时, 这个断言变为紧集上连续函数必一致连续的康托尔定理. 引理 4 的证明可逐字地重复康托尔定理 (第 4 章 §2 第二段) 证明的模式, 因此我们不再赘述.

c. 勒贝格准则

像以前那样, 我们说某个性质几乎在集合 M 的所有点成立, 或者说在 M 上几乎处处成立, 如果使得这个性质不成立的 M 的子集有零测度.

定理 1 (勒贝格准则) $f \in \mathfrak{R}(I) \Leftrightarrow$($f$ *在* I *上有界*)$\wedge$(f *在* I *上几乎处处连续*).

◄ 必要性. 如果 $f \in \mathfrak{R}(I)$, 则由命题 1, 函数 f 在 I 上有界. 设在 I 上 $|f| \leqslant M$

现在验证 f 几乎在 I 的所有点连续. 为此, 我们来证明如果函数的间断点集 E 不是零测度集, 那么 $f \notin \mathfrak{R}(I)$.

事实上, 把 E 表为 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 其中 $E_n = \left\{x \in I | \omega(f; x) \geqslant \dfrac{1}{n}\right\}$, 由引理 2 推出, 如果 E 不是零测度集, 则有号码 n_0 使得集合 E_{n_0} 也不是零测度集. 设 P 是把区间 I 分为区间组 $\{I_i\}$ 的任一分划. 把分划 P 的区间组分为两类 A 和 B, 其中

$$A = \left\{I_i \in P | I_i \bigcap E_{n_0} \neq \varnothing \wedge \omega(f; I_i) \geqslant \frac{1}{2n_0}\right\},$$

而

$$B = P \setminus A.$$

区间集 A 构成集合 E_{n_0} 的一个覆盖. 事实上,E_{n_0} 的每个点或者位于某个区间 $I_i \in P$ 的内部, 这时显有 $I_i \in A$, 或者在分划 P 的某些区间的边界上. 在后一种情况下, 至

少在这些区间中的一个区间上, 函数的振幅 (由三角不等式) 不小于 $\frac{1}{2n_0}$, 从而该区间属于 A.

现在证明, 在分划 P 的区间中用不同的方式选择标志点组 ξ, 便可明显地改变积分和的值.

我们选择这样的点组 ξ', ξ'', 在属于 B 的区间里两个点组的标志点相同, 而在属于 A 的区间 I_i 中选择 ξ'_i, ξ''_i 使得 $|f(\xi'_i) - f(\xi''_i)| > \frac{1}{3n_0}$. 那么

$$|\sigma(f,P,\xi') - \sigma(f,P,\xi'')| = \left|\sum_{I_i \in A}(f(\xi'_i) - f(\xi''_i))|I_i|\right| > \frac{1}{3n_0}\sum_{I_i \in A}|I_i| > c > 0.$$

这样的常数 c 的存在性是从区间组 A 覆盖 E_{n_0} 和假设 E_{n_0} 不是零测度集得到的.

因为 P 是区间 I 的任一分划, 由柯西基本原理推出当 $\lambda(P) \to 0$ 时, 积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 不可能有极限, 即 $f \notin \mathfrak{R}(I)$.

充分性. 设 ε 是任意正数, 而 $E_\varepsilon = \{x \in I | \omega(f;x) \geqslant \varepsilon\}$. 按条件,$E_\varepsilon$ 是零测度集.

此外, 显然 E_ε 是 I 中的闭集, 因此 E_ε 是紧集. 由引理 3, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的有限区间组 $I_1, \cdots, I_k$ 使得 $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i| < \varepsilon$. 记 $C_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, 而用 C_2 和 C_3 分别表示以 I_i 的中心为中心, 相似系数分别为 2 和 3 的区间之并. 显然,E_ε 严格地位于 C_2 的内部, 并且集合 C_2 和 C_3 的边界间的距离 d 是正数.

我们指出, 任意位于 C_3 中且两两没有公共内点的有限区间组的体积之和不大于 $3^n\varepsilon$, 其中 n 是空间 $\mathbb{R}^n$ 的维数. 这是从集合 C_3 的定义和区间测度的性质 (引理 1) 得到的.

同时指出, 区间 I 的任一直径小于 d 的子集或者含于集合 C_3, 或者含于紧集 $K = I \setminus (C_2 \setminus \partial C_2)$ 中, 这里 ∂C_2 是 C_2 的边界 (因而 $C_2 \setminus \partial C_2$ 是集合 C_2 的内点的集合).

根据构造 $E_\varepsilon \subset I \setminus K$, 在任意点 $x \in K$ 都有 $\omega(f;x) < \varepsilon$. 由引理 4, 有 $\delta > 0$ 使对任意的点对 $x_1, x_2 \in K$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$ 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\varepsilon$.

现可用以下方法进行可积条件充分性的证明. 任取区间 I 的两个分别有较 $\lambda = \min\{d, \delta\}$ 小的参数 $\lambda(P'), \lambda(P'')$ 的分划 P', P''. 设 P 是由分划 P', P'' 的区间之交所构成的分划, 即 $P = \{I_{ij} = I'_i \bigcap I''_j\}$. 比较积分和 $\sigma(f,P,\xi)$ 与 $\sigma(f,P',\xi')$, 注意到 $|I'_i| = \sum\limits_j |I_{ij}|$, 可得:

$$\begin{aligned}|\sigma(f,P',\xi') - \sigma(f,P,\xi)| &= \left|\sum_{ij}(f(\xi'_i) - f(\xi_{ij}))|I_{ij}|\right| \\ &\leqslant \Sigma_1|f(\xi'_i) - f(\xi_{ij})||I_{ij}| + \Sigma_2|f(\xi'_i) - f(\xi_{ij})||I_{ij}|.\end{aligned}$$

这里, 第一个和式 Σ_1 是对分划 P 的那些区间 I_{ij} 求和, 它位于分划 P' 的含于集合

C_3 的区间 I_i' 中. 而其余的分划 P 的区间都归到和式 Σ_2 中, 亦即, 它们全都包含在 K 中 (因为 $\lambda(P) < d$.)

因为在 I 上 $|f| \leqslant M$, 在第一个和式中用 $2M$ 代替 $|f(\xi_i') - f(\xi_{ij})|$ 就推出第一个和式不超过 $2M \cdot 3^n \varepsilon$.

在第二个和式中考虑到 $\xi_i', \xi_{ij} \in I_i' \subset K$, 而 $\lambda(P') < \delta$, 则有 $|f(\xi_i') - f(\xi_{ij})| < 2\varepsilon$, 从而第二个和式不超过 $2\varepsilon|I|$.

这样一来,$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P, \xi)| < (2M \cdot 3^n + 2|I|)\varepsilon$, 由此 (根据 P' 和 P'' 的平权性), 利用三角不等式, 我们就对参数充分小的任意分划 P', P'' 得到了

$$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| < 4(3^n M + |I|)\varepsilon.$$

现在, 由柯西准则便知 $f \in \mathfrak{R}(I)$. ►

注 2 因为函数极限存在的柯西准则在任意完备的度量空间中都成立. 所以, 从证明中可以看出, 对于在任意完备的线性赋范空间中取值的函数, 勒贝格准则的充分性部分 (但不包括必要性部分) 也成立.

3. 达布准则

我们还要研究只适用于实值函数的判断函数黎曼可积的一个有用的准则.

a. 下积分和与上积分和

设 f 是区间 I 上的实值函数, 而 $P = \{I_i\}$ 是区间 I 的分划. 设

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

定义 10 称量

$$s(f, P) = \sum_i m_i |I_i|, \quad S(f, P) = \sum_i M_i |I_i|$$

分别为函数 f 在区间 I 上关于这个区间的分划 P 的 (达布) 下积分和与上积分和.

引理 5 *函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 的积分和之间成立以下的关系:*

a) $s(f, P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi) \leqslant \sigma(f, P, \xi) \leqslant \sup\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi) = S(f, P)$;

b) *如果区间 I 的分划 P' 是由分割分划 P 的区间得到的, 那么*

$$s(f, P) \leqslant s(f, P') \leqslant S(f, P') \leqslant S(f, P);$$

c) *对于区间 I 的任意一对分划 P_1, P_2, 成立不等式 $s(f, P_1) \leqslant S(f, P_2)$.*

◄ a) 和 b) 中的关系式可直接从定义 6 和定义 10 得到, 当然还要用到数集的上确界和下确界的定义.

为证关系 c), 只需考察由分划 P_1 和 P_2 的区间之交构成的辅助分划 P. 分划 P 可以看作分划 P_1, P_2 中每一个分划的加细, 因此从 b) 中的关系式推出

$$s(f,P_1) \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) \leqslant S(f,P_2). \blacktriangleright$$

b. 下积分与上积分

定义 11 称量

$$\underline{\mathfrak{J}} = \sup_P s(f,P), \quad \overline{\mathfrak{J}} = \inf_P S(f,P)$$

分别为函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在区间 I 上的 (达布) *下积分与上积分*, 其中上确界和下确界是对区间 I 的所有分划 P 取的.

从这个定义和引理 5 指出的达布和的性质可知, 对于区间的任意分划 P 成立不等式

$$s(f,P) \leqslant \underline{\mathfrak{J}} \leqslant \overline{\mathfrak{J}} \leqslant S(f,P).$$

定理 2 (达布定理) *对于任意的有界函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 成立如下断言*

$$(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)) \wedge (\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \underline{\mathfrak{J}});$$

$$(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)) \wedge (\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \overline{\mathfrak{J}}).$$

◀ 如果把这两个断言与定义 11 相比较, 那么显然只需证明其中的极限的存在性. 我们验证下积分和的情况.

固定 $\varepsilon > 0$ 和区间 I 的分划 P_ε, 使对分划 P_ε 有 $s(f,P_\varepsilon) > \underline{\mathfrak{J}} - \varepsilon$. 设 Γ_ε 是区间 I 的位于分划 P_ε 的区间的边界上的那些点的集合. 如例 2 可得, Γ_ε 是零测度集. 由集合 Γ_ε 的简单结构, 显然还存在那样的数 λ_ε, 使对于任意满足条件 $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ 的分划 P, 它与 Γ_ε 有公共点的那些区间的体积之和都小于 ε.

现任取参数 $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ 的分划 P, 由分划 P 和 P_ε 的区间之交作成辅助分划 P'. 由分划 P_ε 的选择和达布和的性质 (引理 5), 我们得到

$$\underline{\mathfrak{J}} - \varepsilon < s(f,P_\varepsilon) < s(f,P') \leqslant \underline{\mathfrak{J}}.$$

现在注意, 在和 $s(f,P')$ 与 $s(f,P)$ 中, 对应于分划 P 中与 Γ_ε 不交的那些区间的项是共同的. 因此, 如果在 I 上 $|f(x)| \leqslant M$, 那么

$$|s(f,P') - s(f,P)| < 2M\varepsilon,$$

这样, 考虑到上边的不等式就得到: 当 $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ 时, 成立关系式

$$\underline{\mathfrak{J}} - s(f,P) < (2M+1)\varepsilon.$$

把所得的关系式与定义 11 相比较, 便推出极限 $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$ 确实存在且等于 $\underline{\mathfrak{J}}$.

对于上和也可进行类似的讨论. ▶

c. 实值函数可积性的达布准则

定理 3 (达布准则) 定义在区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 I 上可积, 当且仅当它在 I 上有界且它的达布下积分和达布上积分相等.

换句话说,

$$f \in \mathfrak{R}(I) \Leftrightarrow (f \text{ 在 } I \text{ 上有界}) \wedge (\underline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{J}}).$$

◀ 必要性. 如果 $f \in \mathfrak{R}(I)$, 那么按命题 1, 函数 f 在 I 上有界. 从积分的定义 7, 量 $\underline{\mathfrak{J}}$ 和 $\overline{\mathfrak{J}}$ 的定义 11 和 a) 段的引理 5 推出, 在这种情况下也有 $\underline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{J}}$.

充分性. 因为 $s(f,P) \leqslant \sigma(f,P,\xi) \leqslant S(f,P)$, 所以当 $\underline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{J}}$ 时, 由定理 2, 当 $\lambda(P) \to 0$ 时, 这些不等式两端的项趋于同一个极限. 因此, 当 $\lambda(P) \to 0$ 时,$\sigma(f,P,\xi)$ 有极限, 且极限值与上面的相同.

注 3 从达布准则的证明中看到, 如果函数可积, 那么它的达布下积分与达布上积分一致, 且等于这个函数的积分值.

练 习

1. a) 证明, 零测度集没有内点.

b) 证明, 说集合没有内点, 绝非意味着这个集合是零测度集.

c) 构造一个零测度集, 使它的闭包等于整个空间 $\mathbb{R}^n$.

d) 称集合 $E \subset I$ 有零体积, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 可以用满足

$$\sum_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$$

的有限区间组 $I_1, \cdots, I_k$ 覆盖它. 试问, 是否一切有界的零测度集都有零体积?

试证, 如果集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是直线 $\mathbb{R}$ 和 $(n-1)$ 维零测度集 $e \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 的直积 $\mathbb{R} \times e$, 那么 E 是 n 维零测度集.

2. a) 在 $\mathbb{R}^n$ 中构造与狄利克雷函数类似的函数, 并证明, 有界函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 几乎在区间 I 的所有点等于零, 这并不意味着 $f \in \mathfrak{R}(I)$.

b) 试证, 如果 $f \in \mathfrak{R}(I)$ 且几乎在区间 I 的所有点 $f(x) = 0$, 则

$$\int_I f(x)dx = 0.$$

3. 在前面所讲的区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的黎曼积分定义和任意维区间上的积分定义 7 之间有些微小的差别, 这与分划的定义及分划区间的测度的定义有关. 试把这个细微的区别解释清楚, 并验证

$$\int_a^b f(x)dx = \int_I f(x)dx, \quad \text{如果 } a < b.$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_I f(x)dx, \text{如果 } a > b.$$

其中 I 是直线 $\mathbb{R}$ 上以 a,b 为端点的区间.

4. a) 证明, 定义在区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 I 上可积, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在区间 I 的分划 P, 使得 $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

b) 利用 a) 的结果, 并假定研究的是实值函数 $f: I \to \mathbb{R}$, 那么勒贝格准则的充分性部分的证明可以作某些简化. 试独立地完成这些简化.

§2 集合上的积分

1. 容许集

以后, 我们面临的不仅有函数在区间上的积分, 而且有函数在 $\mathbb{R}^n$ 中另外的一些不太复杂的集合上的积分.

定义 1 称集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是*容许的*, 如果它在 $\mathbb{R}^n$ 中有界, 且它的边界 ∂E 是 (勒贝格意义下的) 零测度集.

例 1 $\mathbb{R}^3(\mathbb{R}^n)$ 中的立方体, 四面体和球都是容许集.

例 2 设定义在 $n-1$ 维区间 $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ 上的函数 $\varphi_i : I \to \mathbb{R}, i = 1, 2$, 在任意点 $x \in I$, 满足 $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. 如果这两个函数连续, 那么由 §1 中例 2 可以断定, $\mathbb{R}^n$ 中由这两个函数的图形和位于区间 I 的边界 ∂I 上的侧柱面所围的区域是 $\mathbb{R}^n$ 中的容许集.

我们知道, 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界 ∂E 由下列点组成, 这种点的任意邻域中既有集合 E 中的点, 又有 E 在 $\mathbb{R}^n$ 中的余集的点. 因此, 成立

引理 1 *对于任意集合*$E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$:

a) ∂E*是* $\mathbb{R}^n$ *中的闭集*;

b) $\partial(E_1 \bigcup E_2) \subset \partial E_1 \bigcup \partial E_2$;

c) $\partial(E_1 \bigcap E_2) \subset \partial E_1 \bigcup \partial E_2$;

d) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \bigcup \partial E_2$.

由此结合定义 1 可推出

引理 2 *有限个容许集的并或交是容许集; 容许集的差也是容许集.*

注 1 一般来说, 引理 2 对于无限个容许集不成立, 而且引理 1 中相应的断言 b) 和 c) 对无限个集也不成立.

注 2 容许集的边界不仅是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 而且是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集, 也就是说, 容许集的边界是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. 因此, 由 §1 中引理 3, 它可以用体积之和任意接近于零的有限区间组来覆盖.

现在我们研究容许集 E 的特征函数

$$\chi_{_E}(x)=\begin{cases}1, 若\ x\in E,\\ 0, 若\ x\notin E.\end{cases}$$

对于任意集合 E, 函数 $\chi_{_E}(x)$ 在集合 E 的边界点间断, 且只在 E 的边界点间断. 因此, 如果 E 是容许集, 那么函数 $\chi_{_E}(x)$ 就几乎在空间 $\mathbb{R}^n$ 的所有点连续.

2. 集合上的积分

设 f 是定义在集合 E 上的函数. 像前面那样, 约定用记号 $f\chi_{_E}(x)$ 表示在点 $x\in E$ 等于 $f(x)$, 而在 E 外等于零 (虽然 f 在 E 外没有定义) 的函数.

定义 2 *函数 f 在集合 E 上的积分*由关系式

$$\int_E f(x)dx := \int_I f\chi_{_E}(x)dx$$

定义, 其中 I 是任一包含集合 E 的区间.

如果等式右边的积分不存在, 则说 *f 在集合 E 上不 (黎曼) 可积*. 否则就说 *f 在集合 E 上 (黎曼) 可积*.

由在集合 E 上黎曼可积的一切函数组成的集合用记号 $\mathfrak{R}(E)$ 表示.

自然需要说明定义 2 的合理性, 为此只需证明

引理 3 *如果 I_1 和 I_2 是两个分别包含集合 E 的区间, 那么积分*

$$\int_{I_1} f\chi_{_E}(x)dx,\quad \int_{I_2} f\chi_{_E}(x)dx$$

同时存在或同时不存在, 而且在同时存在时它们的值相等.

◀ 我们考察区间 $I=I_1\bigcap I_2$, 由条件,$I\supset E$. 函数 $f\chi_{_E}$ 的间断点或者与 f 在 E 上的间断点相同, 或者是函数 $\chi_{_E}$ 的间断点, 从而属于 ∂E. 无论是哪种情况, 所有间断点均属于 $I\bigcap I_1\bigcap I_2$. 因此由勒贝格准则 (§1 定理 1) 推出, $f\chi_{_E}$ 在区间 I,I_1,I_2 上的积分同时存在或同时不存在. 如果它们存在, 那么我们可以根据自己的需要来选择 I,I_1,I_2 的分划, 因此, 我们只取区间 I_1,I_2 的那样的分划, 它们是区间 $I=I_1\bigcap I_2$ 的分划的延拓. 因为所研究的函数在 I 外等于零, 所以对应于 I_1 和 I_2 的上述分划的积分和就等于区间 I 的相应分划的积分和. 由此取极限后便知所研究的函数在 I_1 和 I_2 上的积分都等于它在区间 I 上的积分.

从区间上积分存在性的勒贝格准则 (§1 定理 1) 和定义 2 可推出

定理 1 *函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 在容许集上可积, 当且仅当它有界且几乎在集合 E 的所有点连续.*

◀ 函数 $f\chi_{_E}$ 与函数 f 相比, 只可能在集合 E 的边界 ∂E 上增加新的间断点, 而由条件, 这种间断点组成的集合是零测度集. ▶

3. 容许集的测度 (体积)

定义 3 称量

$$\mu(E) := \int_E 1 \cdot dx$$

为有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的(若尔当) 测度或体积, 如果这里的 (黎曼) 积分存在的话.

因为

$$\int_E 1 \cdot dx = \int_{I \supset E} \chi_E(x) dx,$$

而函数 χ_E 的间断点集与 ∂E 相同, 所以由勒贝格准则可知, 所引进的测度只对容许集有定义.

因而, 容许集且只有容许集才是定义 3 意义下的可测集.

现在解释量 $\mu(E)$ 的几何意义.

如果 E 是容许集, 那么

$$\mu(E) = \int_{I \supset E} \chi_E(x) dx = \underline{\int}_{I \supset E} \chi_E(x) dx = \overline{\int}_{I \supset E} \chi_E(x) dx,$$

其中后两个积分是相应的达布下积分与达布上积分. 由积分存在的达布准则 (§1 定理 3), 集合的测度 $\mu(E)$ 有定义, 当且仅当这里的下积分与上积分相等. 按达布定理 (§1 定理 2), 它们是函数 χ_E 对应于区间 I 的分划 P 的下积分和与上积分和的极限. 但由函数 χ_E 的定义, 下积分和等于分划 P 位于 E 内的区间的体积 (这是内接于 E 的多面体的体积) 之和, 而上积分和等于分划 P 的与集合 E 有公共点的那些区间的体积 (外切多面体的体积) 之和. 所以 $\mu(E)$ 是当 $\lambda(P) \to 0$ 时内接于 E 的多面体体积和外切于 E 的多面体体积的公共极限, 这与通常的关于简单区域 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的体积概念相吻合.

通常称 $n = 1$ 时的体积为长度, 而 $n = 2$ 时为面积.

注 3 现在我们来说明, 为什么有时称由定义 3 引进的集合的测度 $\mu(E)$ 为若尔当测度.

定义 4 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 称为**若尔当意义下的零测度集**, 或者**零体积集**, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 它可以用满足

$$\sum_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$$

的有限区间组 $I_1, \cdots, I_k$ 覆盖.

与勒贝格零测度相比较, 这里要求有限覆盖. 因此若尔当零测度集类比勒贝格零测度集类小. 比如有理点集是勒贝格零测度集但不是若尔当零测度集.

显然, 为使内接于有界集 E 的多面体体积的上确界与外切于 E 的多面体体积的下确界相等 (作为 E 的测度 $\mu(E)$ 或体积), 必须且只需集合 E 的边界 ∂E 有若尔当零测度. 正是由于这个原因, 我们采用

定义 5 集合 E 称为*若尔当可测的*, 如果 E 有界, 并且它的边界有若尔当零测度.

从注 2 可以看出, 若尔当可测集类就是由定义 1 所引进的容许集类. 这也就是上面定义的测度 $\mu(E)$ 为什么可以称为 (若尔当可测) 集 E 的若尔当测度的原因.

练 习

1. a) 试证, 如果集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 使得 $\mu(E) = 0$, 那么对于这个集的闭包 $\overline{E}$ 也成立等式 $\mu(\overline{E}) = 0$.

b) 试举出有界的勒贝格零测度集 E, 使 E 的闭包 $\overline{E}$ 不是勒贝格零测度集的例子.

c) 试说明, 是否应把 §1 中引理 3 的断言 b) 理解为: 对于紧集来说, 若尔当零测度集概念和勒贝格零测度集概念是一致的.

d) 证明, 如果有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的超平面上的射影有 $n-1$ 维零体积, 那么集合 E 本身有 n 维零体积.

e) 试证, 没有内点的若尔当可测集有零体积.

2. a) 如果 E 不是容许集 (若尔当可测的), 定义 2 所引进的函数 f 在有界集 E 上的积分是否存在?

b) 在有界但不若尔当可测的集 E 上的常值函数是否可积?

c) 断言 "如果函数 f 在集合 E 上可积, 那么这个函数在集合 E 的任一子集 $A \subset E$ 上的限制 $f|_A$ 是 A 上的可积函数" 是否正确?

d) 对于定义在有界 (但不一定若尔当可测) 集 E 上的函数 $f: E \to \mathbb{R}$, 指出它在 E 上的黎曼积分存在的必要条件和充分条件.

3. a) 设 E 是勒贝格零测度集, 而 $f: E \to \mathbb{R}$ 是 E 上的连续有界函数, f 是否总在 E 上可积?

b) 对若尔当零测度集 E 回答问题 a)

c) 如果 a) 中所指的函数 f 的积分存在, 积分值等于多少?

4. 布鲁恩–闵可夫斯基不等式

对于非空集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, 令 $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$, 叫做它们的 (闵可夫斯基意义下的向量) 和. 设 $V(E)$ 表示集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的体积.

a) 验证, 如果 A 和 B 是标准的 n 维区间 (平行多面体), 则

$$V^{\frac{1}{n}}(A + B) \geqslant V^{\frac{1}{n}}(A) + V^{\frac{1}{n}}(B).$$

b) 对任意可测紧集 A 和 B. 证明上述不等式 (它叫布鲁恩–闵可夫斯基不等式).

c) 试证, 布鲁恩-闵可夫斯基不等式仅在以下三种情况化作等式: 或 $V(A+B)=0$, 或 A 和 B 都是单点集, 或 A 和 B 是同位相似凸体.

§3 积分的一般性质

1. 作为线性泛函的积分

命题 1 a) *有界集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上黎曼可积函数集 $\mathfrak{R}(E)$ 关于通常的函数加法和函数与数的乘法运算是线性空间.*

b) *积分是空间 $\mathfrak{R}(E)$ 上的线性泛函*

$$\int_E:\mathfrak{R}(E)\to\mathbb{R}.$$

◀ 考虑到有限多个零测度集的并集也是零测度集, 则从函数在区间上积分存在性的勒贝格准则可直接推出论断 a).

考虑到积分和的线性性, 由极限过程得到积分的线性性. ▶

注 1 由于当 $\lambda(P)\to 0$ 时积分和的极限与标志点 ξ 的选择无关, 可以推出

$(f\in\mathfrak{R}(E))\wedge$(在 E 上几乎处处有 $f(x)=0$) $\Rightarrow(\int_E f(x)dx=0)$.

因此, 如果两个可积函数在集合 E 的几乎所有的点都相等, 那么它们在 E 上的积分也相等. 所以, 如果把在集 E 上几乎处处相等的函数作成一个等价类, 作线性空间 $\mathfrak{R}(E)$ 的商空间, 那么, 由这些等价类组成一个线性空间 $\widetilde{\mathfrak{R}}(E)$, 积分也将是 $\widetilde{\mathfrak{R}}(E)$ 上的线性泛函.

2. 积分的可加性

虽然我们遇到的总是容许集 $E\subset\mathbb{R}^n$, 而在第一段中也可以不作此假设 (我们就是这么做的), 但是, 以下将只涉及容许集.

命题 2 *设 E_1,E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的容许集, 而 f 是定义在 $E_1\bigcup E_2$ 上的函数*

a) *成立关系式*

$$\left(\exists\int_{E_1\bigcup E_2}f(x)dx\right)\Leftrightarrow\left(\exists\int_{E_1}f(x)dx\right)\wedge\left(\exists\int_{E_2}f(x)dx\right)$$
$$\Rightarrow\exists\int_{E_1\bigcap E_2}f(x)dx.$$

b) *如果还知道 $\mu(E_1\bigcap E_2)=0$, 那么在积分存在的条件下成立等式*

$$\int_{E_1\bigcup E_2}f(x)dx=\int_{E_1}f(x)dx+\int_{E_2}f(x)dx.$$

◀ 断言 a) 可从容许集上黎曼积分存在性的勒贝格准则 (§2 定理 1) 推出, 这时只需注意容许集的并集和交集也是容许集 (§2 引理 2) .

为了证明论断 b), 我们首先指出

$$\chi_{E_1\cup E_2}(x)=\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)-\chi_{E_1\cap E_2}(x).$$

因此, 取 $I\supset E_1\bigcup E_2$, 利用它可得

$$\begin{aligned}\int_{E_1\bigcup E_2} f(x)dx &= \int_I f\chi_{E_1\cup E_2}(x)dx=\int_I f\chi_{E_1}(x)dx\\ &\quad+\int_I f\chi_{E_2}(x)dx-\int_I f\chi_{E_1\cap E_2}(x)dx\\ &=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx.\end{aligned}$$

这是因为, 从 a) 知道积分

$$\int_I f\chi_{E_1\cap E_2}(x)dx=\int_{E_1\bigcap E_2} f(x)dx$$

存在, 而因 $\mu(E_1\bigcap E_2)=0$, 所以这个积分等于零. (见注 1) ▶

3. 积分的估计

a. 一般估计

我们从积分的一个一般估计开始, 这个估计对于取值于完备线性赋范空间的函数的积分也成立.

命题 3 *如果 $f\in\mathfrak{R}(E)$, 那么 $|f|\in\mathfrak{R}(E)$, 而且成立不等式*

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f|(x)dx.$$

◀ $|f|\in\mathfrak{R}(E)$ 从积分的定义和函数在区间上可积的勒贝格准则推出.
上述不等式从相应的积分和的不等式取极限即可得到. ▶

b. 非负函数的积分

以下断言仅涉及实值函数.

命题 4 *对于函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 以下命题成立:*

$$(f\in\mathfrak{R}(E))\wedge(\forall x\in E(f(x)\geqslant 0))\Rightarrow\int_E f(x)dx\geqslant 0.$$

◀ 事实上, 因为在 E 上 $f(x) \geqslant 0$, 所以在 $\mathbb{R}^n$ 中 $f\chi_E(x) \geqslant 0$. 其次, 由定义

$$\int_E f(x)dx = \int_{I \supset E} f\chi_E(x)dx,$$

按条件, 后一个积分存在, 而它是非负积分和的极限, 所以积分非负. ▶

从命题 4 依次得到

推论 1

$$(f, g \in \mathfrak{R}(E)) \wedge (f \leqslant g,\ \text{在 } E \text{ 上}) \Rightarrow \left(\int_E f(x)dx \leqslant \int_E g(x)dx\right).$$

推论 2 如果 $f \in \mathfrak{R}(E)$ 并在容许集 E 的每一点满足不等式 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 那么

$$m\mu(E) \leqslant \int_E f(x)dx \leqslant M\mu(E).$$

推论 3 如果 $f \in \mathfrak{R}(E), m = \inf\limits_{x\in E} f(x), M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$, 那么有数 $\theta \in [m, M]$ 使得

$$\int_E f(x)dx = \theta\mu(E).$$

推论 4 如果 E 是连通的容许集, 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 连续, 那么有点 $\xi \in E$ 使得

$$\int_E f(x)dx = f(\xi)\mu(E).$$

推论 5 如果对推论 2 补充假定: 有定义在 E 上的非负函数 $g \in \mathfrak{R}(E)$, 那么

$$m\int_E g(x)dx \leqslant \int_E fg(x)dx \leqslant M\int_E g(x)dx.$$

最后的论断是一维积分中的积分中值定理的推广, 通常也称它为积分中值定理.

◀ 它可以从不等式 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$, 并考虑到积分的线性性以及推论 1 推出. 也可以采用如下方法直接证明: 把集合 E 上的积分化成相应区间上的积分, 对积分和验证不等式, 然后取极限. 因为所有这些在一维的情况已详细地讨论过, 所以我们不再停留在细节上. 我们仅仅指出, 显然可从勒贝格准则推出函数 f 和 g 的乘积 fg 的可积性. ▶

现在我们利用所得到的关系式验证以下有用的引理, 以展示这些关系式的作用.

引理 a) 如果在区间 I 上非负函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 的积分等于零, 则在区间 I 的几乎所有的点 $f(x) = 0$,

b) 用任意容许 (即若尔当可测) 集 E 代替区间 I 时, 论断 a) 仍然成立.

◀ 由勒贝格准则, 函数 $f \in \mathfrak{R}(I)$ 在区间 I 上几乎处处连续, 因此, 如果我们能证明 f 在任意连续点 $a \in I$ 有 $f(a) = 0$, 那么论断 a) 便得到证明.

假设 $f(a) > 0$, 则在点 a 的某个邻域 $U_I(a)$(邻域 $U_I(a)$ 可以认为是区间) 有 $f(x) \geqslant c > 0$, 所以, 由已证的积分性质

$$\begin{aligned}\int_I f(x)dx &= \int_{U_I(a)} f(x)dx + \int_{I\setminus U_I(a)} f(x)dx \\ &\geqslant \int_{U_I(a)} f(x)dx \geqslant c\mu(U_I(a)) > 0.\end{aligned}$$

所得的矛盾说明论断 a) 成立. 如果把这个结论用于函数 f_{χ_E} 并考虑到 $\mu(\partial E) = 0$ 便得论断 b). ▶

注 2 从刚证明的引理推出, 如果 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测集, 而 $\widetilde{\mathfrak{R}}(E)$ 是注 1 中的等价函数类的线性空间 (每个等价类中的各个函数在集 E 上都可积, 且彼此只可能在勒贝格零测度集上有所不同), 那么量 $\| f \| = \int_E |f|(x)dx$ 是 $\widetilde{\mathfrak{R}}(E)$ 上的范数.

◀ 事实上, 因为现在从等式 $\int_E |f|(x)dx = 0$ 可以推出 f 和恒等于零的函数属于同一个等价类. ▶

练　习

1. 设 E 是具非零测度的若尔当可测集, 而 $f : E \to \mathbb{R}$ 是 E 上的连续非负可积函数, $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$. 试证,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_E f^n(x)dx\right)^{1/n} = M.$$

2. 证明, 如果 $f, g \in \mathfrak{R}(E)$, 那么成立

a) 赫尔德不等式

$$\left|\int_E (f\cdot g)(x)dx\right| \leqslant \left(\int_E |f|^p(x)dx\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q(x)dx\right)^{1/q},$$

其中 $p \geqslant 1, q \geqslant 1$, 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

b) 闵可夫斯基不等式

$$\left(\int_E |f+g|^p(x)dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p(x)dx\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p(x)dx\right)^{1/p},$$

其中 $p \geqslant 1$.

试证

c) 如果 $0 < p < 1$, 上面的不等式变为反向不等式,

d) 在闵可夫斯基不等式中等号成立, 当且仅当存在数 $\lambda \geqslant 0$, 使得在 E 上几乎处处成立 $f = \lambda g$ 或者 $g = \lambda f$.

e) 量 $\| f \|_p = \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f|^p(x)dx\right)^{1/p}$, 这里 $\mu(E) > 0$, 关于 $p \in \mathbb{R}$ 是单调的, 且当 $p \geqslant 1$ 时是空间 $\widetilde{\mathfrak{R}}(E)$ 的范数.

说明在怎样的条件下赫尔德不等式中的等号成立.

3. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测集, 而且 $\mu(E) > 0$. 验证, 如果 $\varphi \in C(E;\mathbb{R})$, 而 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是凸函数, 那么

$$f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi(x)dx\right) \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f \circ \varphi)(x)dx.$$

4. a) 试证, 若 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的若尔当可测集, 而 E 上的可积函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 在它的内点 $a \in E$ 连续, 则

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\mu(U_E^\delta(a))} \int_{U_E^\delta(a)} f(x)dx = f(a),$$

其中 $U_E^\delta(a)$ 表示点 a 在集 E 中的 $\delta-$ 邻域.

b) 验证, 如果把条件 "a 是 E 的内点" 用条件 "对任意的 $\delta > 0$ 有 $\mu(U_E^\delta(a)) > 0$" 来代替, 上面的关系仍然成立.

§4 化重积分为累次积分

1. 富比尼[①]定理

到目前为止, 我们讨论了积分的定义, 它的存在条件以及它的一般性质. 这里将证明这样一个定理, 它与变量替换定理一样是计算重积分的工具:

定理[②] *设 $X \times Y$ 是 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的区间, 它是区间 $X \subset \mathbb{R}^m$ 和区间 $Y \subset \mathbb{R}^n$ 的直积. 如果函数 $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ 在 $X \times Y$ 上可积, 那么积分*

$$\boxed{\int_{X \times Y} f(x,y)dxdy, \int_X dx \int_Y f(x,y)dy, \int_Y dy \int_X f(x,y)dx}$$

同时存在且彼此相等.

在着手证明定理以前, 我们先解释一下公式中所引进的记号的意义.

积分 $\int_{X \times Y} f(x,y)dxdy$ 表示我们熟知的关于变量 $x \in X, y \in Y$ 的函数 f 在区间 $X \times Y$ 上的积分.

①富比尼 (G. Fubini) (1879—1943) 是意大利数学家. 他的主要著作是关于函数和几何理论的.

②这个定理早在函数论中有名的富比尼定理出现以前就已经得到证明, 它是富比尼定理的特殊情况. 但通常把重积分的计算化为低维累次积分的定理称为富比尼型定理, 或为简单起见, 就称为富比尼定理.

记号 $\int_X dx \int_Y f(x,y)dy$ 应作如下理解: 对于固定的值 $x \in X$ 计算区间 Y 上的积分 $F(x) = \int_Y f(x,y)dy$, 再将所得的函数 $F: X \to \mathbb{R}$ 在区间 X 上积分. 这时, 如果对于某个点 $x \in X$ 积分

$$\int_Y f(x,y)dy$$

不存在, 那么令 $F(x)$ 等于包括下积分 $\underline{\mathcal{J}}(x) = \underline{\int}_Y f(x,y)dy$ 和上积分 $\overline{\mathcal{J}}(x) = \overline{\int}_Y f(x,y)dy$ 本身在内的 $\underline{\mathcal{J}}(x)$ 和 $\overline{\mathcal{J}}(x)$ 之间的任何一个数. 将证明 $F \in \mathfrak{R}(X)$.

记号 $\int_Y dy \int_X f(x,y)dx$ 有类似的意义.

在证明定理的过程中将会清楚, 使 $\underline{\mathcal{J}}(x) \neq \overline{\mathcal{J}}(x)$ 的点 $x \in X$ 的集合是 X 中的 m 维零测度集.

类似地, 使积分 $\int_X f(x,y)dx$ 不存在的那些 $y \in Y$ 的集合是 Y 中的 n 维零测度集.

最后我们指出, 与当时约定叫做*重积分*的 $m+n$ 维区间 $X \times Y$ 上的积分不同, 通常称先计算函数 $f(x,y)$ 在 Y 上后在 X 上或先在 X 上后在 Y 上的积分为这个函数的*累次积分*.

如果 X 和 Y 是直线上的区间, 那么所述定理原则上把区间 $X \times Y$ 上二重积分的计算归结为逐次计算两个一维的积分. 显然, 应用这个定理若干次, 可以把 k 维区间上积分的计算化为逐次计算 k 个一维积分.

所述定理的实质是很简单的, 它可以说明如下. 我们研究把区间 $X \times Y$ 分为区间 $X_i \times Y_i$ 的分划所对应的积分和

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j) \times |X_i| \cdot |Y_j|.$$

因为 f 在 $X \times Y$ 上的积分存在, 所以标志点 $\xi_{ij} \in X_i \times Y_j$ 可以随意选择, 我们把它取作选择 $x_i \in X_i \subset X$ 和选择 $y_j \in Y_j \subset Y$ 的 "直积". 这时可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} f(x_i, y_j)|X_i| \cdot |Y_j| &= \sum_i |X_i| \sum_j f(x_i, y_j)|Y_j| \\ &= \sum_j |Y_j| \sum_i f(x_i, y_j)|X_i|,\end{aligned}$$

这正是我们的定理取极限前的形式.

现在给出它的正式证明.

◀ 区间 $X \times Y$ 的任意分划 P 由区间 X 和 Y 的相应分划 P_X, P_Y 导出, 这时, 分划 P 的每个区间是形如 $X_i \times Y_j$ 的直积, 其中 X_i 和 Y_j 分别是分划 P_X, P_Y 的区间 X_i, Y_j. 由区间体积的性质, 有 $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$, 其中每个体积是相应的区间在它们自己所属的空间 $\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ 中体积.

现在, 利用下确界和上确界的性质, 下积分和与上积分和的定义以及积分的定义, 进行以下估计:

$$
\begin{aligned}
s(f,P) &= \sum_{i,j} \inf_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i\times Y_j| \\
&\leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} \left(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\right)|X_i| \\
&\leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} \left(\underline{\int}_Y f(x,y)dy\right)|X_i| \leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x)|X_i| \\
&\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)|X_i| \leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} \left(\overline{\int}_Y f(x,y)dy\right)|X_i| \\
&\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} \left(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\right)|X_i| \\
&\leqslant \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i\times Y_j| = S(f,P).
\end{aligned}
$$

因为 $f\in\mathfrak{R}(X\times Y)$, 所以当 $\lambda(P)\to 0$ 时, 这些不等式两端的项趋于函数 f 在区间 $X\times Y$ 上的积分值. 于是从所写的估计中推出 $F\in\mathfrak{R}(X)$ 且成立等式

$$
\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int_X F(x)dx.
$$

我们完成了先在 Y 后在 X 的累次积分的证明. 显然先在 X 后在 Y 的累次积分的情况可以类似地进行讨论. ►

2. 一些推论

推论 1 *若 $f\in\mathfrak{R}(X\times Y)$, 则 (在勒贝格意义下) 对几乎所有的 $x\in X$, 积分 $\int_Y f(x,y)dy$ 存在; 对几乎所有的 $y\in Y$, 积分 $\int_X f(x,y)dx$ 存在.*

◄ 根据所证的定理, 有

$$
\int_X \left(\overline{\int}_Y f(x,y)dy - \underline{\int}_Y f(x,y)dy\right)dx = 0.
$$

而括号中的上、下积分的差是非负的. 根据 §3 中的引理可以推出, 这个差在几乎所有的点 $x\in X$ 等于零. 于是, 由达布准则 (§1 定理 3), 对几乎所有的 $x\in X$ 积分 $\int_Y f(x,y)dy$ 存在.

所作断言的第二部分也可类似地证明. ►

推论 2 如果区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 是闭区间 $I_i = [a^i, b^i](i = 1, \cdots, n)$ 的直积, 那么

$$\int_I f(x)dx = \int_{a^n}^{b^n} dx^n \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \cdots \int_{a^1}^{b^1} f(x^1, x^2, \cdots, x^n)dx^1.$$

◀ 显然, 重复利用所证的定理便可得到这个公式. 右边的所有内层积分都像定理中那样理解. 例如, 处处可以置入上积分号或下积分号. ▶

例 1 设 $f(x, y, z) = z\sin(x+y)$. 求这个函数在区间 $I \subset \mathbb{R}^3$ 上的积分, 其中 I 由关系式 $0 \leqslant x \leqslant \pi, |y| \leqslant \pi/2, 0 \leqslant z \leqslant 1$ 确定.

根据推论 2, 有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_I f(x,y,z)dxdydz &= \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{\pi} z\sin(x+y)dx \\ &= \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-z\cos(x+y)|_{x=0}^{\pi})dy \\ &= \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z\cos y dy \\ &= \int_0^1 (2z\sin y|_{y=-\pi/2}^{\pi/2})dz = \int_0^1 4zdz = 2.\end{aligned}$$

可以把所证的定理用于十分一般的集合上的积分的计算.

推论 3 设 D 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有界集, 而

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n | (x \in D) \wedge (\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x))\}.$$

若 $f \in \mathfrak{R}(E)$, 则

$$\int_E f(x,y)dxdy = \int_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{1}$$

◀ 若 $x \in D$, 设 $E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n | \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$. 而当 $x \notin D$ 时, 令 $E_x = \varnothing$. 我们看到, $\chi_E(x,y) = \chi_D(x) \cdot \chi_{E_x}(y)$. 回忆集合上积分的定义并利用富比尼

定理, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)dxdy &= \int_{I\supset E} f\chi_E(x,y)dxdy \\ &= \int_{I_x\supset D} dx \int_{I_y\supset E_x} f\chi_E(x,y)dy \\ &= \int_{I_x}\left(\int_{I_y} f(x,y)\chi_{E_x}(y)dy\right)\chi_D(x)dx \\ &= \int_{I_x}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)\chi_D(x)dx \\ &= \int_D\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.\end{aligned}$$

这里, 内层积分也可能在点 $x\in D$ 组成的某个勒贝格零测度集上不存在, 这时它有像上边证明了的富比尼定理中一样的含义. ▶

注 在推论 3 的条件中, 如果集合 D 若尔当可测, 而函数 $\varphi_i: D\to\mathbb{R}(i=1,2)$ 连续, 那么集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 若尔当可测.

◀ 集合 E 的边界 ∂E 由两个连续函数 $\varphi_i: D\to\mathbb{R}(i=1,2)$ 的图形 (由 §1 例 2, 它们是零测度集) 以及集合 $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ 的边界与充分大的长为 l 的一维闭区间的直积的一部分 Z 组成. 按条件, ∂D 可以用 $n-1$ 维区间组覆盖, 且这些区间的 $n-1$ 维体积之和小于 ε/l. 这些区间与所选 (长为 l 的) 区间的直积给出了集合 Z 的覆盖, 它们的体积之和小于 ε. ▶

根据这个注可知, 这种结构的可测集 (像任意可测集一样)E 上的函数 $f: E\to 1\in\mathbb{R}$ 是可积的. 利用推论 3 和可测集的测度的定义可以推出

推论 4 *在推论 3 的条件中如果集合 D 若尔当可测, 而函数 $\varphi_i: D\to\mathbb{R}(i=1,2)$ 连续, 那么集合 E 可测, 且它的体积可以用公式*

$$\mu(E)=\int_D(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))dx \tag{2}$$

计算.

例 2 我们对圆 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant r^2\}$ 应用这个公式, 得到

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-y^2}-(-\sqrt{r^2-y^2}))dy = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}dy \\ &= 4\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}dy = 4\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi d(r\sin\varphi) \\ &= 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi = \pi r^2.\end{aligned}$$

推论 5 设 E 是区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 中的可测集. 把 I 表为 $n-1$ 维区间 I_x 和区间 I_y 的直积 $I = I_x \times I_y$. 则对几乎所有的值 $y_0 \in I_y$, 集合 E 用 $n-1$ 维超平面 $y = y_0$ 所截得的截面 $E_{y_0} = \{(x,y) \in E | y = y_0\}$ 是这个超平面的可测子集, 而且

$$\mu(E) = \int_{I_y} \tilde{\mu}(E_y) dy, \tag{3}$$

其中 $\tilde{\mu}(E_y)$ 当 E_y 可测时是集合 E_y 的 $n-1$ 维测度, 而当 E_y 不可测时, 它表示数 $\underline{\int}_{E_y} 1 \cdot dx$ 和 $\overline{\int}_{E_y} 1 \cdot dx$ 之间的任意一个数.

◀ 设 $f = \chi_E$ 并考虑到 $\chi_E(x,y) = \chi_{E_y}(x) \cdot \chi_{I_x}(y)$, 利用所证的定理和推论 1 即得. ▶

特别地, 由此得到

推论 6 (卡瓦列里[①]原理) 设 A 和 B 是空间 $\mathbb{R}^3$ 中两个有体积 (即若尔当可测) 的物体. 设

$$A_c = \{(x,y,z) \in A | z = c\}$$

和

$$B_c = \{(x,y,z) \in B | z = c\}$$

是用平面 $z = c$ 分别截物体 A 和 B 所得的截面. 如果对于每个 $c \in \mathbb{R}$, 集合 A_c, B_c 可测并有相同的面积, 那么物体 A 和 B 有相同的体积.

显然, 卡瓦列里原理可以推广到任意维空间 $\mathbb{R}^n$ 中.

例 3 利用公式 (3) 计算欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的球 $B = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leqslant r\}$ 的体积 V_n.

显然, $V_1 = 2r$. 在例 2 中求得 $V_2 = \pi r^2$. 我们将证明 $V_n = c_n r^n$, 其中 c_n 是常数 (下面我们再计算它). 取球的任一直径 $[-r, r]$ 并对每个点 $x \in [-r, r]$, 研究用垂直于所取直径的超平面截球 B 所得的截面 B_x. 因为 B_x 是 $n-1$ 维球, 由毕达哥拉斯定理其半径等于 $\sqrt{r^2 - x^2}$, 用归纳法并利用公式 (3), 可得

$$V_n = \int_{-r}^{r} c_{n-1} (r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \left(c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi \right) r^n.$$

(显然, 在导出后一个等式时作了变换 $x = r \sin \varphi$.)

于是证明了 $V_n = c_n r^n$, 而且

$$c_n = c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi. \tag{4}$$

---

①卡瓦列里 (B. Cavalieri) (1598—1647) 是意大利数学家, 是确定面积和体积的所谓不可分元方法的作者.

现在来求常数 c_n 的显式. 我们看到. 当 $m \geqslant 2$ 时,

$$
\begin{aligned}
I_m = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^m \varphi d\varphi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{m-2} \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi \\
&= I_{m-2} + \frac{1}{m-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi d \cos^{m-1} \varphi \\
&= I_{m-2} - \frac{1}{m-1} I_m,
\end{aligned}
$$

即有递推关系

$$
I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \tag{5}
$$

特别地 $I_2 = \pi/2$. 从量 I_m 的定义中直接看出 $I_1 = 2$. 考虑到 I_1 和 I_2 的这些值, 从递推公式 (5) 我们求得

$$
I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2, \quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi. \tag{6}
$$

回到公式 (4), 我们得到

$$
\begin{aligned}
c_{2k+1} &= c_{2k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2 \\
&= c_{2k-1} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2 \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi \\
&= \cdots = c_1 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \\
c_{2k} &= c_{2k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi \\
&= c_{2k-2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi \cdot \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot 2 \\
&= \cdots = c_2 \frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!} \cdot 2.
\end{aligned}
$$

但是, 如上所见, $c_1 = 2, c_2 = \pi$, 因此最终得到的体积 V_n 的公式为:

$$
V_{2k+1} = 2 \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} r^{2k+1}, \quad V_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} r^{2k}, \tag{7}
$$

其中 $k \in \mathbb{N}$, 而且这两个公式中第一个公式对 $k = 0$ 也成立.

练 习

1. a) 构造正方形 $I \subset \mathbb{R}^2$ 的这样的子集, 一方面它与任意铅垂线和任意水平线不超过一个交点, 而另一方面这个集的闭包与 I 相同.

b) 构造函数 $f: I \to \mathbb{R}$ 对于它, 富比尼定理中的两个累次积分存在且相等, 但 $f \notin \mathfrak{R}(I)$.

c) 举例说明, 如果在富比尼定理中, 函数 $F(x)$ 的值, 不限定它适合条件 $\underline{\mathfrak{J}}(x) \leqslant F(x) \leqslant \overline{\mathfrak{J}}(x)$, 而在使 $\underline{\mathfrak{J}}(x) < \overline{\mathfrak{J}}(x)$ 的点简单地令其等于 0, 那么 $F(x)$ 可能成为不可积的.(譬如, 考察 $\mathbb{R}^2$ 中的那样的函数 $f(x,y)$, 如果 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 不是有理点时, 函数 $f(x,y)$ 等于 1, 而当 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 是有理点 $(p/q, m/n)$ 时,$f(x,y)$ 等于 $1 - 1/q$ 其中两个分数 $p/q, m/n$ 均是不可约的.)

2. a) 由于有公式 (3), 试证, 如果有界集 E 用平行的超平面族截得的截面均可测, 那么还不能说明 E 是可测的.

b) 假定除了 a) 的条件外还知道公式 (3) 中的函数 $\mu(E_y)$ 在区间 I_y 上可积. 这时是否可以推出 E 是可测集?

3. 利用富比尼定理和正函数积分的正性, 在 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 是连续函数的假设下给出混合导数等式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 的简单证明.

4. 设 $f: I_{a,b} \to \mathbb{R}$ 是定义在区间

$$I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n | a^i \leqslant x^i \leqslant b^i, i = 1, \cdots, n\}$$

上的连续函数, 而函数 $F: I_{a,b} \to \mathbb{R}$ 由等式

$$F(x) = \int_{I_{a,x}} f(t) dt$$

所定义, 其中 $I_{a,x} \subset I_{a,b}$. 试求这个函数关于变量 $x^1, \cdots, x^2$ 的偏导数.

5. 定义在矩形 $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 在 I 有连续的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

a) 设 $F(y) = \int_a^b f(x,y) dx$. 从等式

$$F(y) = \int_a^b \left(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dt + f(x,c) \right) dx$$

出发, 验证莱布尼茨法则:

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx.$$

b) 设 $G(x,y) = \int_a^x f(t,y) dt$, 求 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial G}{\partial y}$.

c) 设 $H(y) = \int_a^{h(y)} f(x,y) dx$, 其中 $h \in C^{(1)}[a,b]$. 求 $H'(y)$.

6. 研究积分序列

$$F_0(x) = \int_0^x f(y) dy,$$

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y) dy, n \in \mathbb{N},$$

其中 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) 验证, $F_n'(x) = F_{n-1}(x); F_n^{(k)}(0) = 0$, 如果 $k \leqslant n; F_n^{(n+1)}(x) = f(x)$.

b) 试证,

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-y)^n f(y) dy.$$

7. a) 设 $f: E \to \mathbb{R}$ 是定义在集

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

上的连续函数. 试证

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y) dx.$$

b) 用累次积分 $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} 1 \cdot dy$ 为例说明为什么不能根据富比尼定理把每个累次积分写为二重积分.

§5 重积分中的变量替换

1. 问题的提出和变量替换公式的预期结论

在研究一维情况的积分时, 我们曾得到重要的积分变量替换公式. 我们现在的任务是找出一般情况下的变量替换公式. 让我们来把问题弄明确.

设 D_x 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合,f 是 D_x 上的可积函数, 而 $\varphi: D_t \to D_x$ 是集合 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到 D_x 上的映射 $t \longmapsto \varphi(t)$. 问题是, 按怎样的法则, 已知 f 和 φ, 可以求出 D_t 中的函数 ψ, 使成立等式

$$\int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_t} \psi(t) dt,$$

它把 D_x 上的积分计算化为 D_t 上积分的计算.

首先假设 D_t 是区间 $I \subset \mathbb{R}^n$, 而 $\varphi: I \to D_x$ 是这个区间到 D_x 上的微分同胚映射. 对应于把区间 I 分为区间 $I_1, I_2, \cdots, I_k$ 的分划 P, D_x 分解为集合 $\varphi(I_i), i = 1, \cdots, k$. 如果所有这些集合均可测, 并且任意两个集的交只是零测度集, 那么由积分的可加性, 得

$$\int_{D_x} f(x) dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(I_i)} f(x) dx. \tag{1}$$

如果 f 在 D_x 上连续, 则由中值定理, 得

$$\int_{\varphi(I_i)} f(x) dx = f(\xi_i) \mu(\varphi(I_i)),$$

其中 $\xi_i \in \varphi(I_i)$. 因为 $f(\xi_i) = f(\varphi(\tau_i))$, 其中 $\tau_i = \varphi^{-1}(\xi_i)$, 所以剩下的是把 $\mu(\varphi(I_i))$ 和 $\mu(I_i)$ 联系起来.

若 φ 是线性映射, 则 $\varphi(I_i)$ 是平行多面体, 从解析几何和代数知道, 它的体积等于 $|\det\varphi'|\mu(I_i)$. 而微分同胚在局部几乎就是线性映射, 因此, 如果区间 I_i 充分小, 那

么可以认为 $\mu(\varphi(I_i)) \approx |\det\varphi'(\tau_i)||I_i|$ 具有很小的相对误差 (可以证明, 适当选取点 $\tau_i \in I_i$ 精确等式亦能成立). 于是,

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(I_i)} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\tau_i))|\det\varphi'(\tau_i)||I_i|. \tag{2}$$

但这个近似等式的右方是函数 $f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|$ 在区间 I 上关于这个区间带标志点 τ 的分划 P 的积分和, 对 $\lambda(P) \to 0$ 取极限, 从 (1) 和 (2) 得到

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|dt.$$

这就是所求的公式和它的解释. 这个公式可以按以上思路严格地进行证明 (这也是值得做的). 但是, 为了学习一些新的有效的一般数学方法和有益的结果, 并避免纯技术性的烦琐工作, 在以后的证明中有些地方我们将偏离这种思路.

我们转向精确的陈述. 先回忆以下

定义 1　给定区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的函数 $f: D \to \mathbb{R}$, 称 D 中使 $f(x) \neq 0$ 的点组成的集合的闭包为 f 的**支集**.

在这一节里, 我们要研究这样的情况: 可积函数 $f: D_x \to \mathbb{R}$ 在区域 D_x 的边界近旁等于零, 更精确地就是, 函数 f 的支集 (用 $\mathrm{supp} f$ 表示)是 D_x 内的紧集[①] K. 如果 f 在 D_x 上的积分和在 K 上的积分存在, 那么它们显然是相等的, 因为在 $D_x \setminus K$ 上函数等于零. 从映射的观点来看, 条件 $\mathrm{supp} f = K \subset D_x$ 相当于替换 $x = \varphi(t)$ 不仅在集合 K 上 (f 的积分实际上是在 K 上做的), 而且在 K 的某个邻域 D_x 上有效.

现在叙述我们打算证明的

定理 1　*如果 $\varphi: D_t \to D_x$ 是有界开集 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到有界开集 $D_x = \varphi(D_t) \subset \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 而 $f \in \mathfrak{R}(D_x)$ 且 $\mathrm{supp} f$ 是 D_x 中的紧集, 那么 $f \circ \varphi|\det\varphi'| \in \mathfrak{R}(D_t)$ 且有公式 (积分中的变量替换公式)*

$$\boxed{\int_{D_x=\varphi(D_t)} f(x)dx = \int_{D_t} f \circ \varphi(t)|\det\varphi'(t)|dt} \tag{3}$$

成立.

2. 可测集和光滑映射

引理 1　*设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是开集 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到开集 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 的微分同胚, 则成立以下的断言:*

a) *若 $E_t \subset D_t$ 是 (勒贝格意义下) 零测度集, 则它的像 $\varphi(E_t) \subset D_x$ 也是零测度集.*

①通常称这样的函数为在被研究的区域中具有限支集.

b) *设集合 E_t 连同它的闭包 $\overline{E}_t$ 都包含在 D_t 中, 若 E_t(在若尔当意义下) 的体积为零, 则它的像 $\varphi(E_t) = E_x$ 及其闭包 $\overline{E}_x$ 含于 D_x 中, 且 E_x 也有零体积.*

c) *如果 (若尔当) 可测集 E_t 和它的闭包 $\overline{E}_t$ 含于区域 D_t 中, 那么它的像 $E_x = \varphi(E_t)$ 是可测集, 并且 $\overline{E}_x \subset D_x$.*

◀ 我们首先指出, 空间 $\mathbb{R}^n$ 的任一开子集 D 可以表为可列个闭区间的并集 (这些闭区间两两没有公共内点). 为此, 譬如, 可以把坐标轴分成长为 Δ 的区间, 并研究把空间 $\mathbb{R}^n$ 分成边长为 Δ 的小方体的相应分划. 固定 $\Delta = 1$, 取这个分划含于 D 的那些小方体, 用 F_1 表示它们的并. 进而取 $\Delta = 1/2$, 对 F_1 增加新的分划中含于 $D\backslash F_1$ 的那些小方体, 得到集合 F_2, 等等. 继续这样的过程, 我们将得到集列 $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$, 其中每个集均由有限个或可列个没有公共内点的区间组成, 从而, 从构造的过程看出,$\bigcup F_n = D$.

因为至多可列个零测度集的并是零测度. 所以, 断言 a) 只需对含于闭区间 $I \subset D_t$ 的集 E_t 验证.

因为 $\varphi \in C^{(1)}(I)$(即 $\varphi' \in C(I)$), 所以存在常数 M, 使得 $\| \varphi'(t) \| \leqslant M$ 在 I 上成立. 根据有限增量定理, 对任意一对点 $t_1, t_2 \in I$ 以及它们的像 $x_1 = \varphi(t_1), x_2 = \varphi(t_2)$ 应当满足关系 $|x_2 - x_1| \leqslant M|t_2 - t_1|$.

现设区间集 $\{I_i\}$ 是集合 E_t 的满足 $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$ 的覆盖. 不失一般性可以认为 $I_i = I_i \bigcap I \subset I$.

显然, 集 $\varphi(I_i)$ 组成的集类 $\{\varphi(I_i)\}$ 构成集合 $E_x = \varphi(E_t)$ 的覆盖. 如果 t_i 是区间 I_i 的中心, 那么由上边确立的在映射 φ 下距离的可能变化的估计得知, 所有集合 $\varphi(I_i)$ 可以用以 $x_i = \varphi(t_i)$ 为中心的那样的区间 $\widetilde{I}_i$ 覆盖, 其线元是区间 I_i 的相应线元的 M 倍. 因为 $|\widetilde{I}_i| = M^n|I_i|$, 而 $\varphi(E_t) \subset \bigcup\limits_i \widetilde{I}_i$, 所以我们得到了集合 $\varphi(E_t) = E_x$ 用区间组的覆盖, 这些区间的体积之和小于 $M^n\varepsilon$. 从而引理的主要断言 a) 得证.

断言 b) 可从 a) 推出. 如果考虑到 $\overline{E}_t$ 是勒贝格零测度集, 从而由 a), $\overline{E}_x = \varphi(\overline{E}_t)$ 也是勒贝格零测度集, 以及 $\overline{E}_t$ 是紧集, 从而 $\overline{E}_x$ 也是紧集. 根据 §1 的引理 3, 一切具勒贝格零测度的紧集本来都有零体积.

最后, 如果注意到可测集的定义, 以及微分同胚把集合 E_t 的内点变为它的像集 $E_x = \varphi(E_t)$ 的内点, 从而有 $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$. 则断言 c) 可直接从 b) 推出. ▶

推论 *在定理的条件下, 公式 (3) 右端的积分存在.*

◀ 因为在 D_t 中 $|\det\varphi'(t)| \neq 0$, 所以 $\operatorname{supp} f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| = \operatorname{supp} f \circ \varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{supp} f)$ 是 D_t 中的紧集. 因而函数 $f \circ \varphi \cdot |\det\varphi'|\chi_{D_t}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的间断点是函数 f 在 D_x 中间断点的原像而与函数 χ_{D_t} 完全无关. 但是 $f \in \mathfrak{R}(D_x)$, 因此函数 f 在 D_x 中的间断点集 E_x 是勒贝格零测度集. 于是, 根据引理的断言 a), 集合 $E_t = \varphi^{-1}(E_x)$ 有零测度. 现在, 由勒贝格准则可以推出, 函数 $f \circ \varphi |\det \varphi'| \chi_{D_t}$ 在任意区间 $I_t \supset D_t$ 上可

积. ►

3. 一维情形

引理 2 a) 如果 $\varphi: I_t \to I_x$ 是区间 $I_t \subset \mathbb{R}^1$ 到区间 $I_x \subset \mathbb{R}^1$ 上的微分同胚, 而 $f \in \mathfrak{R}(I_x)$, 那么 $f\circ\varphi\cdot|\varphi'| \in \mathfrak{R}(I_t)$ 且

$$\int_{I_x} f(x)dx = \int_{I_t}(f\circ\varphi\cdot|\varphi'|)(t)dt. \tag{4}$$

b) 公式 (3) 在 $\mathbb{R}^1$ 中成立.

◄ 引理 2 的断言 a) 虽然实际上是已经知道的, 这里, 我们将利用已经掌握的关于积分存在性的勒贝格准则, 独立于第 1 卷中对它的论述, 给出一个简短证明.

因为 $f \in \mathfrak{R}(I_x)$, 而 $\varphi: I_t \to I_x$ 是微分同胚, 知函数 $f\circ\varphi|\varphi'|$ 在 I_t 上有界, 这个函数的间断点只能是函数 f 在 I_x 上间断点的原像. 由勒贝格准则, 后者构成零测度集. 像我们在证明引理 1 时所看到的, 这个集在微分同胚 $\varphi^{-1}: I_x \to I_t$ 下的像也有零测度, 所以 $f\circ\varphi\cdot|\varphi'| \in \mathfrak{R}(I_t)$.

设 P_x 是区间 I_x 的分划. 利用映射 φ^{-1}, 它导出区间 I_t 的分划 P_t, 而且从映射 φ 和 φ^{-1} 的一致连续性推出,$\lambda(P_x)\to 0 \Leftrightarrow \lambda(P_t)\to 0$. 对于带有标志点 $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ 的分划 P_x, 写出 f 在 I_x 上的相应的积分和:

$$\begin{aligned}\sum_i f(\xi_i)|x_i - x_{i-1}| &= \sum_i f\circ\varphi(\tau_i)|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})| \\ &= \sum_i f\circ\varphi(\tau_i)\varphi'(\tau_i)|t_i - t_{i-1}|,\end{aligned}$$

而且设点 $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ 是这样选定的, 其中 τ_i 是对差 $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})$ 利用拉格朗日定理所得到的点, 即 $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$.

因为关系式 (4) 中的两个积分存在, 所以积分和中标志点可以任意选择而不影响极限值. 因此, 从所写的积分和的等式对 $\lambda(P_x)\to 0(\lambda(P_t)\to 0)$ 取极限便得积分等式 (4).

引理 2 的断言 b) 从证明了的等式 (4) 得出. 首先我们指出, 在一维的情况下有 $|\det\varphi'| = |\varphi'|$. 其次, 紧集 $\operatorname{supp} f$ 容易用含于 D_x 中且两两没有公共内点的有限个区间覆盖. 因此 f 在集 D_x 上的积分与 f 在这些区间上的积分之和相同, 而 $f\circ\varphi|\varphi'|$ 在 D_t 上的积分化成在这些区间的原像 (也是区间) 上的积分之和. 把等式 (4) 用于在映射 φ 下每一对互相对应的区间, 加起来即得公式 (3). ►

注 1 我们以前证明的一元积分的变量替换公式有如下形式

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi\cdot\varphi')(t)dt, \tag{5}$$

其中 φ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 到以 $\varphi(\alpha)$ 和 $\varphi(\beta)$ 为端点的区间上的任一光滑映射. 在公式 (5) 中不是导数的模 $|\varphi'|$, 而是导数本身. 这与公式 (5) 的左端中可能出现 $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$ 有关.

但是如果注意到对于以 a 和 b 为端点的区间 I 成立关系式

$$\int_I f(x)dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)dx, & 若\ a \leqslant b, \\ -\int_a^b f(x)dx, & 若\ a > b, \end{cases}$$

那么当 φ 是微分同胚时, 所建立的公式 (4) 和 (5) 显然只在表面上不同而实质上是相同的.

注 2 我们乐意指出 (并且一定会用到它们), 如果 $\varphi : I_t \to I_x$ 是区间上的微分同胚, 那么, 对实值函数的上积分与下积分总成立公式:

$$\overline{\int}_{I_x} f(x)dx = \overline{\int}_{I_t} (f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)(t)dt,$$
$$\underline{\int}_{I_x} f(x)dx = \underline{\int}_{I_t} (f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)(t)dt.$$

而由此, 就可以认为在一维的情况下已经证明了以下事实: 如果把 (3) 中的积分理解为达布上积分或达布下积分, 那么它对于任何有界函数, 它仍然成立

◀ 我们暂时认为 f 是以常数 M 为界的非负函数.

像证明引理 2 的断言 a) 时那样, 取区间 I_x 和 I_t 的在映射 φ 下互相对应的分划 P_x, P_t, 并写出以下的估计, 其中 ε 是函数 φ 在分划 P_t 的各个区间上的振幅之最大者:

$$\begin{aligned}\sum_i \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)|x_i - x_{i-1}| &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t)) \sup_{t\in\Delta t_i} |\varphi'(t)||t_i - t_{i-1}| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t)) \cdot \sup_{t\in\Delta t_i} |\varphi'(t)|)|\Delta t_i| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t))(|\varphi'(t)| + \varepsilon))|\Delta t_i| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t))|\varphi'(t)|)|\Delta t_i| + \varepsilon \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t))|\Delta t_i| \\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} (f(\varphi(t))|\varphi'(t)|)|\Delta t_i| + \varepsilon M|I_t|.\end{aligned}$$

考虑到 φ 的一致连续性, 当 $\lambda(P_t) \to 0$ 时, 由上得到

$$\overline{\int}_{I_x} f(x)dx \leqslant \overline{\int}_{I_t} (f \circ \varphi|\varphi'|)(t)dt.$$

把上述证明用于映射 φ^{-1} 和函数 $f \circ \varphi|\varphi'|$, 就得到相反的不等式, 从而证明了注 2 的第一个等式对非负函数成立. 但因任一函数都可表为 $f = \max\{f, 0\} - \max\{-f, 0\}$ (非负函数的差), 所以第一个等式对一般情况也成立. 第二个等式可类似地验证. ►

自然, 从所证的这些等式, 对实值函数 f 可以重新得到引理 2 的断言 a).

4. $\mathbb{R}^n$ 中最简微分同胚的情形

设 $\varphi : D_t \to D_x$ 是区域 $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ 到区域 $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$ 上的微分同胚; $(t^1, \cdots, t^n)$, $(x^1, \cdots, x^n)$ 分别是点 $t \in \mathbb{R}^n_t$ 和 $x \in \mathbb{R}^n_x$ 的坐标. 我们有

定义 2 称微分同胚 $\varphi : D_t \to D_x$ 是*最简微分同胚*, 如果它的坐标表示有如下形式

$$
\begin{aligned}
&x^1 = \varphi^1(t^1, \cdots, t^n) = t^1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x^{k-1} = \varphi^{k-1}(t^1, \cdots, t^n) = t^{k-1}, \\
&x^k = \varphi^k(t^1, \cdots, t^n) = \varphi^k(t^1, \cdots, t^k, \cdots, t^n), \\
&x^{k+1} = \varphi^{k+1}(t^1, \cdots, t^n) = t^{k+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x^n = \varphi^n(t^1, \cdots, t^n) = t^n.
\end{aligned}
$$

这样一来, 在最简微分同胚的情况下, 只有一个坐标改变 (在所给情况下是指标为 k 的坐标).

引理 3 *对于最简微分同胚 $\varphi : D_t \to D_x$, 公式 (3) 成立.*

◄ 不计坐标编号, 可以认为, 我们的微分同胚 φ 只有第 n 个坐标改变.

为了书写方便起见, 我们引进以下的记号:

$$
\begin{aligned}
&(x^1, \cdots, x^{n-1}, x^n) =: (\tilde{x}, x^n); (t^1, \cdots, t^{n-1}, t^n) =: (\tilde{t}, t^n); \\
&D_{x^n}(\tilde{x}_0) := \{(\tilde{x}, x^n) \in D_x | \tilde{x} = \tilde{x}_0\}; \\
&D_{t^n}(\tilde{t}_0) := \{(\tilde{t}, t^n) \in D_t | \tilde{t} = \tilde{t}_0\}.
\end{aligned}
$$

这样一来, $D_{x^n}(\tilde{x}), D_{t^n}(\tilde{t})$ 是用平行于第 n 个坐标轴的直线截相应集合 D_x 和 D_t 所得的一维截线. 设 I_x 是 $\mathbb{R}^n_x$ 中包含 D_x 的区间. 把 I_x 表为 $n-1$ 维区间 $I_{\tilde{x}}$ 和第 n 个坐标轴上的区间 I_{x^n} 的直积 $I_x = I_{\tilde{x}} \times I_{x^n}$ 对在 $\mathbb{R}^n_t$ 中取定的包含 D_t 的区间 I_t 有类似的分解 $I_t = I_t \times I_{t^n}$.

利用集合上积分的定义, 富比尼定理和注 2, 可得

$$\begin{aligned}\int_{D_x} f(x)dx &= \int_{I_x} f\cdot\chi_{D_x}(x)dx = \int_{I_{\tilde{x}}} d\tilde{x}\int_{I_{x^n}} f\cdot\chi_{D_x}(\tilde{x},x^n)dx^n \\ &= \int_{I_{\tilde{x}}} d\tilde{x}\int_{D_{x^n(\tilde{x})}} f(\tilde{x},x^n)dx^n \\ &= \int_{I_{\tilde{t}}} d\tilde{t}\int_{D_{t^n(\tilde{t})}} f(\tilde{t},\varphi^n(\tilde{t},t^n))\left|\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^n}\right|(\tilde{t},t^n)dt^n \\ &= \int_{I_{\tilde{t}}} d\tilde{t}\int_{I_{t^n}} (f\circ\varphi|\det\varphi'|\chi_{D_t})(\tilde{t},t^n)dt^n \\ &= \int_{I_t} (f\circ\varphi|\det\varphi'|\chi_{D_t})(t)dt \\ &= \int_{D_t} (f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)dt.\end{aligned}$$

在这个计算中还用到了: 对于我们的微分同胚有 $\det\varphi' = \dfrac{\partial\varphi^n}{\partial t^n}$. ►

5. 映射的复合和变量替换公式

引理 4 若 $D_\tau \xrightarrow{\psi} D_t \xrightarrow{\varphi} D_x$ 是两个微分同胚, 对其中每一个, 积分的变量替换公式 (3) 都成立, 则它对这两个映射的复合 $\varphi\circ\psi: D_\tau \to D_x$(3) 也成立.

◄ 为了证明这个引理, 只需注意到 $(\varphi\circ\psi)' = \varphi'\circ\psi'$ 及 $\det(\varphi\circ\psi)'(\tau) = \det\varphi'(t)\det\psi'(\tau)$, 其中 $t = \varphi(\tau)$. 事实上, 这时我们得到

$$\begin{aligned}\int_{D_x} f(x)dx &= \int_{D_t} (f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)dt \\ &= \int_{D_\tau} ((f\circ\varphi\circ\psi)|\det\varphi'\circ\psi||\det\psi'|)(\tau)d\tau \\ &= \int_{D_\tau} ((f\circ(\varphi\circ\psi))|\det(\varphi\circ\psi)'|)(\tau)d\tau.\ ►\end{aligned}$$

6. 积分的可加性和积分变量替换公式证明的完成

引理 3 和引理 4 使我们想到, 有可能把任一微分同胚局部地分解为最简微分同胚的复合 (见第 1 卷第 8 章 §6 第 4 段的命题 2), 并用这种方法去证明一般情形下的公式 (3).

可以用不同的办法把集合上的积分化为它的点的小邻域上的积分. 例如, 可以利用积分的可加性. 我们正是这样进行的. 现在我们利用引理 1,3,4 进行关于重积分变量替换的定理 1 的证明.

◄ 对于紧集 $K_t = \operatorname{supp}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|) \subset D_t$ 的每个点 t, 构作 t 的这样的 $\delta(t)-$ 邻域 $U(t)$, 在 $U(t)$ 中微分同胚 φ 被分解为最简微分同胚的复合. 从点 $t \in K_t$

的 $\dfrac{\delta(t)}{2}$- 邻域 $\widetilde{U}(t) \subset U(t)$ 选出紧集 K_t 的有限覆盖 $\widetilde{U}(t_1), \cdots, \widetilde{U}(t_k)$. 设 $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\delta(t_1), \cdots, \delta(t_k)\}$. 那么, 任一直径小于 δ 且与 K_t 相交的集合显然连同自己的闭包一起含于邻域组 $U(t_1), \cdots, U(t_k)$ 中的某一个邻域.

现设 I 是包含集合 D_t 的区间, 而 P 是区间 I 满足 $\lambda(P) < \min\{\delta, d\}$ 的分划, 其中数 δ 是上面求出的数, 而 d 是从 K_t 到集合 D_t 边界的距离. 设 $\{I_i\}$ 是分划 P 的与 K_t 有非空交的那些区间. 显然, 如果 $I_i \in \{I_i\}$, 那么 $I_i \subset D_t$. 并且

$$\begin{aligned}\int_{D_t}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)dt &= \int_I((f\circ\varphi|\det\varphi'|)\chi_{D_t})(t)dt\\ &= \sum_i\int_{I_i}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)dt \end{aligned}\tag{6}$$

由引理 1, 区间 I_i 的像 $E_i = \varphi(I_i)$ 是可测集. 于是集合 $E = \bigcup_i E_i$ 也可测, 且 $\operatorname{supp} f \subset E = \overline{E} \subset D_x$. 利用积分的可加性, 由此推出,

$$\begin{aligned}\int_{D_x} f(x)dx &= \int_{I_x\supset D_x} f\chi_{D_x}(x)dx = \int_{I_x\setminus E} f\chi_{D_x}(x)dx\\ &+ \int_E f\chi_{D_x}(x)dx = \int_E f\chi_{D_x}(x)dx\\ &= \int_E f(x)dx = \sum_i\int_{E_i} f(x)dx. \end{aligned}\tag{7}$$

由 $\{I_i\}$ 的构造方法, 任一区间 $I_i \in \{I_i\}$ 含于某个邻域 $U(t_j)$, 在这个邻域内微分同胚 φ 可分解为最简微分同胚的复合. 所以, 根据引理 3 和 4 得

$$\int_{E_i} f(x)dx = \int_{I_i}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)dt. \tag{8}$$

比较关系式 (6),(7),(8), 就得到公式 (3). ►

7. 重积分变量替换公式的一些推论和推广

a. 可测集在映射下的变量替换

命题 1 *设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是有界开集 $D_t \subset \mathbb{R}^n$ 到有界开集 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 上的微分同胚; E_t 和 E_x 是 D_t 和 D_x 的相应子集, 而且有 $\overline{E}_t \subset D_t, \overline{E}_x \subset D_x$ 以及 $E_x = \varphi(E_t)$. 若 $f \in \mathfrak{R}(E_x)$, 则 $f\circ\varphi|\det\varphi'| \in \mathfrak{R}(E_t)$, 而且成立等式*

$$\int_{E_x} f(x)dx = \int_{E_t}(f\circ\varphi|\det\varphi'|)(t)dt. \tag{9}$$

◀ 事实上, 利用集合上积分的定义, 公式 (3) 和 $\chi_{E_t} = \chi_{E_x} \circ \varphi$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{E_x} f(x)dx &= \int_{D_x} (f\chi_{E_x})(x)dx = \int_{D_t} (((f\chi_{E_x}) \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt \\ &= \int_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|\chi_{E_t})(t)dt \\ &= \int_{E_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt. \blacktriangleright\end{aligned}$$

b. 积分的不变性

我们知道, 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在集合 E 上的积分可归结为计算函数 $f\chi_E$ 在区间 $I \supset E$ 上的积分. 而按定义, 区间本身与 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿坐标系有关. 现在我们能够证明

命题 2 *函数 f 在集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的积分值与 $\mathbb{R}^n$ 中笛卡儿坐标的选择无关.*

◀ 事实上, 从 $\mathbb{R}^n$ 中的一个笛卡儿坐标系变到另一个笛卡儿坐标系时有模为 1 的雅可比行列式. 由命题 1, 推出等式

$$\int_{E_x} f(x)dx = \int_{E_t} (f \circ \varphi)(t)dt.$$

这意味着积分被唯一确定: 因为若 p 是集合 E 的点, $x = (x^1, \cdots, x^n)$ 是它在第一个系下的坐标, 而 $t = (t^1, \cdots, t^n)$ 是它在第二个系下的坐标, $x = \varphi(t)$ 是从坐标中的一个变到另一个的函数, 那么

$$f(p) = f_x(x^1, \cdots, x^n) = f_t(t^1, \cdots, t^n),$$

其中 $f_t = f_x \circ \varphi$. 所以我们证明了

$$\int_{E_x} f_x(x)dx = \int_{E_t} f_t(t)dt,$$

其中 E_x 和 E_t 是集合 E 分别在 x 和 t 坐标系中的记号. ▶

从命题 2 和 §2 中集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的若尔当测度的定义 3 可以推出, 这个测度与 $\mathbb{R}^n$ 中笛卡儿坐标系的选择无关, 或者也可以说, 若尔当测度关于欧氏空间的运动群是不变的.

c. 可忽略集

实际中应用的变量替换或坐标变换公式, 有时有这样或那样的奇异性 (例如, 可能在某处破坏了双方单值性, 雅可比行列式变为零或者没有可微性), 这些奇异性通常在零测度集上发生, 因此为了实际的需要, 以下的定理是十分有用的

定理 2 设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是若尔当可测集 $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ 到若尔当可测集 $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$ 上的映射. 如果在 D_t 和 D_x 中有这样的勒贝格零测度集 S_t, S_x, 它们使得 $D_t \setminus S_t$ 和 $D_x \setminus S_x$ 是开集, 而 φ 是 $D_t \setminus S_t$ 到 $D_x \setminus S_x$ 上的微分同胚, 并且从第一个到第二个的变换有有界的雅可比行列式, 那么对任一函数 $f \in \mathfrak{R}(D_x)$, 也有 $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \mathfrak{R}(D_t \setminus S_t)$, 并且

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t \setminus S_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt. \tag{10}$$

此外, 若 $|\det \varphi'|$ 的值在 D_t 有定义且有界, 则

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt. \tag{11}$$

◀ 由勒贝格准则, 函数 f 只在 D_x 中的零测度集上间断, 从而在 $D_x \setminus S_x$ 中也只在一个零测度集上间断, 由引理 1, 这个间断点集在映射 $\varphi^{-1}: D_x \setminus S_x \to D_t \setminus S_t$ 下的像是 $D_t \setminus S_t$ 中的零测度集. 于是, 如果我们能证明集合 $D_t \setminus S_t$ 可测, 那么从函数可积的勒贝格准则立即得到 $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \mathfrak{R}(D_t \setminus S_t)$. 以下讨论的一个附带结果是证明了 $D_t \setminus S_t$ 是若尔当可测集.

由条件, $D_x \setminus S_x$ 是开集, 因此 $(D_x \setminus S_x) \bigcap \partial S_x = \varnothing$, 所以 $\partial S_x \subset \partial D_x \bigcup S_x$, 因而 $\partial D_x \bigcup S_x = \partial D_x \bigcup \overline{S}_x$, 其中 $\overline{S}_x = S_x \bigcup \partial S_x$ 是 $\mathbb{R}^n_x$ 中集合 S_x 的闭包. 可见 $\partial D_x \bigcup S_x$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 它作为两个勒贝格零测度集的并集也是勒贝格零测度集. 从 §1 引理 3 我们知道, 这时集合 $\partial D_x \bigcup S_x$ (同时还有 S_x) 有零体积, 亦即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在这个集合用有限区间组 $I_1, \cdots, I_k$, 作成的覆盖, 这些区间满足 $\sum\limits_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$. 特别地, 由此推出集合 $D_x \setminus S_x$ (类似地, 集合 $D_t \setminus S_t$) 若尔当可测, 因为

$$\partial(D_x \setminus S_x) \subset \partial D_x \cup \partial S_x \subset \partial D_x \cup S_x.$$

显然, 还可以把覆盖 $I_1, \cdots, I_k$ 选得使任一点 $x \in \partial D_x \setminus S_x$ 都至少是 $I_1, \cdots, I_k$ 中某一个的内点. 设 $U_x = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$. 集合 U_x 和集合 $V_x = D_x \setminus U_x$ 一样, 都是可测的. 由 V_x 的构造知, 集合 $\overline{V}_x \subset D_x \setminus S_x$, 并且对于任意包含紧集 $\overline{V}_x$ 的可测集 $E_x \subset D_x$, 有估计

$$\left|\int_{D_x} f(x)dx - \int_{E_x} f(x)dx\right| = \left|\int_{D_x \setminus E_x} f(x)dx\right| \leqslant M\mu(D_x \setminus E_x) < M \cdot \varepsilon, \tag{12}$$

其中 $M = \sup\limits_{x \in D_x} f(x)$.

紧集 $\overline{V}_x$ 的原像 $\overline{V}_t = \varphi^{-1}(\overline{V}_x)$ 是 $D_t \setminus S_t$ 中的紧集. 经像上面那样讨论, 可以构造满足条件 $\overline{V}_t \subset W_t \subset D_t \setminus S_t$ 的可测紧集 W_t, 并且对于任意满足 $W_t \subset E_t \subset D_t \setminus S_t$ 的可测集 E_t, 有估计

$$\left|\int_{D_t \setminus S_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt - \int_{E_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt\right| < \varepsilon. \tag{13}$$

现设 $E_x=\varphi(E_t)$. 由命题 1 对集合 $E_x\subset D_x\setminus S_x$ 和 $E_t\subset D_t\setminus S_t$ 成立公式 (9). 比较关系式 (9),(12),(13) 并考虑到 $\varepsilon>0$ 的任意性, 便得等式 (10).

现在证明定理 2 的最后的论断. 如果函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 定义在整个集 D_t 上, 则因 $D_t\setminus S_t$ 是 $\mathbb{R}^n_t$ 中的开集, 该函数在 D_t 上整个间断点集合由函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'||_{D_t\setminus S_t}$(已知函数在集合 $D_t\setminus S_t$ 上的限制) 的间断点集 A, 可能还有集合 $S_t\bigcup\partial D_t$ 的某个子集 B 组成.

我们知道, 集合 A 是勒贝格零测度集 (因为等式 (10) 右端的积分存在), 而因 $S_t\bigcup\partial D_t$ 有零体积, 所以集合 B 也有零体积. 于是, 只要知道函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 D_t 上有界, 由勒贝格准则便可断定它在 D_t 上可积. 但在 D_t 上有 $|f\circ\varphi|(t)\leqslant M$. 因此既然按条件, 函数 $|\det\varphi'|$ 在 S_t 上有界, 那么, 函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 S_t 上也有界. 至于在集合 $D_t\setminus S_t$ 上, 因函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在该集上可积, 所以有界. 于是, 函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 D_t 上可积. 但集合 D_t 和 $D_t\setminus S_t$ 只相差一个可测集 S_t, 据假设条件, 它的体积为零. 所以由积分的可加性以及在 S_t 上的积分为零, 可以推出, 在所研究的情况下等式 (10) 和 (11) 的右端确实相等. ►

例 矩形 $I=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2|0\leqslant r\leqslant R\wedge 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ 到圆 $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant R^2\}$ 上由公式

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \tag{14}$$

给出的映射不是微分同胚的: 在这个映射下, 矩形 I 的 $r=0$ 的边整个地变为一个点 (0,0); 点 $(r,0)$ 的像与 $(r,2\pi)$ 的像相同. 但是如果研究集合 $I\setminus\partial I$ 和 $K\setminus E$, 其中 E 是圆 K 的边界 ∂K 和通过点 $(0,R)$ 的半径的并. 则映射 (14) 在 $I\setminus\partial I$ 上的限制是 $I\setminus\partial I$ 到 $K\setminus E$ 上的微分同胚映射. 所以由定理 2, 对任一函数 $f\in\mathfrak{R}(K)$ 可得

$$\iint\limits_K f(x,y)dxdy=\iint\limits_I f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

或利用富比尼定理得

$$\iint\limits_K f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr.$$

关系式 (14) 是熟知的平面上从极坐标到笛卡儿坐标的变换公式.

自然, 可以把上述结果推广成适用于 $\mathbb{R}^n$ 中一般的极 (球) 坐标系的公式, 我们在第 1 卷中已研究过这种坐标系, 在那里也指出了任意维空间 $\mathbb{R}^n$ 中从极坐标到笛卡儿坐标变换的雅可比行列式.

练 习

1. a) 证明引理 1 对任意光滑映射 $\varphi:D_t\to D_x$ 成立 (这方面也可参看问题 8)

b) 证明, 若 D 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 而 $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$, 则当 $m < n$ 时, $\varphi(D)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集.

2. a) 验证, 在微分同胚 φ 下可测集 E 的测度和它的像集 $\varphi(E)$ 的测度满足关系式 $\mu(\varphi(E)) = \theta\mu(E)$, 其中

$$\theta \in [\inf_{t\in E} |\det \varphi'(t)|, \sup_{t\in E} |\det \varphi'(t)|].$$

b) 特别地, 如果 E 是连通集, 那么可以找到点 $\tau \in E$, 使得 $\mu(\varphi(E)) = |\det \varphi'(\tau)|\mu(E)$.

3. a) 试证, 如果公式 (3) 对函数 $f \equiv 1$ 成立, 那么它在一般情况也对.

b) 对于函数 $f \equiv 1$ 这个特殊情况, 检验定理 1 的证明并加以简化.

4. 不用注 2, 假定已知引理 2 及只在零测度集上不同的两个可积函数的积分必相等, 作出引理 3 的证明.

5. 在把公式 (3) 归结为它的局部形式 (即对被映射区域的点的小邻域验证公式) 时, 可以利用另外的基于积分线性性的局部化方法, 而不是基于积分的可加性和随之发生的集合可测性分析.

a) 如果光滑函数 $e_1, \cdots, e_k$ 在 D_x 上满足条件:$0 \leqslant e_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, k$, 以及

$$\sum_{i=1}^{k} e_i(x) \equiv 1,$$

那么对任意函数 $f \in \mathfrak{R}(D_x)$, 有

$$\int_{D_x} \left(\sum_{i=1}^{k} e_i f\right)(x)dx = \int_{D_x} f(x)dx.$$

b) 若 supp e_i 含于集合 $U \subset D_x$, 则

$$\int_{D_x} (e_i f)(x)dx = \int_{U} (e_i f)(x)dx.$$

c) 如果对于紧集 $K = \text{supp}\, f \subset D_x$ 的任一开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 能构造 D_x 中的光滑函数组 $e_1, \cdots, e_k$, 使得在 K 上成立 $0 \leqslant e_i \leqslant 1 (i = 1, \cdots, k)$, $\sum\limits_{i=1}^{k} e_i \equiv 1$, 而且, 对于任意的函数 $e_i \in \{e_i\}$, 有集合 $U_{\alpha_i} \in \{U_\alpha\}$, 使 supp $e_i \subset U_{\alpha_i}$, 那么, 考虑到引理 3,4 和 a), b) 中积分的线性性, 即可推出公式 (3).

这时称组 $\{e_i\}$ 为紧集 K 上从属于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.

6. 这个习题包含习题 5 中所说的那个单位分解的构作要点.

a) 构作函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 使 $f|_{[-1,1]} \equiv 1$ 且 supp $f \subset [-1-\delta, 1+\delta]$, 其中 $\delta > 0$.

b) 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的单位立方体和它的 $\delta-$ 扩张, 构作函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 使它具有 a) 中所说的性质.

c) 证明, 对于紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的任一开覆盖, 存在 K 上从属于这个覆盖的光滑的单位分解.

d) 推广 c), 在 $\mathbb{R}^n$ 中构造从属于全空间的局部有限开覆盖的 $C^{(\infty)}-$ 单位分解.(覆盖的局部有限性指的是, 被覆盖集 (在现在的情况是 $\mathbb{R}^n$) 的任一点都有只与覆盖的有限个元素相交的邻域. 对于包含无限个函数的单位分解 $\{e_i\}$, 要求建立了单位分解的集合的每个点至多属于 $\{e_i\}$ 中的有限个函数的支集. 在这个条件下不会产生怎样理解等式 $\sum\limits_i e_i \equiv 1$ 意义的问题. 更确切地说, 是不会产生怎样理解等式左端求和含义的问题.)

7. 在依次证明了以下断言以后, 可以得到定理 1 的与前面讲过的证明不同的另一种证明, 它只借助于把线性映射分解为最简形式的复合, 也更接近于第一段中所说的那些启发性的想法.

a) 验证, 在形如 $(x^1, \cdots, x^k, \cdots, x^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^{k-1}, \lambda x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n), \lambda \neq 0$ 和 $(x^1, \cdots, x^k, \cdots, x^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^{k-1}, x^k + x^j, x^{k+1}, \cdots, x^n)$ 的最简线性映射 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 下, 对于任意可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 满足关系式

$$\mu(L(E)) = |\det L'|\mu(E),$$

并证明这个关系式对任意线性映射 $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 也成立.(利用富比尼定理以及任何线性映射都能表成如上最简形式的复合的事实.)

b) 试证, 如果 $\varphi: D_t \to D_x$ 是微分同胚, 那么对于任意可测紧集 $K \subset D_t$ 和它的像 $\varphi(K)$ 成立关系式 $\mu(\varphi(K)) \leqslant \int_K |\det \varphi'(t)|dt$.(如果 $a \in D_t$, 那么 $(\varphi(a))^{-1}$ 存在, 且在表达式 $\varphi(t) = (\varphi'(a) \circ (\varphi'(a))^{-1} \circ \varphi)(t)$ 中映射 $\varphi'(a)$ 是线性的, 而映射 $(\varphi'(a))^{-1} \circ \varphi$ 在点 a 的邻域内近似于等距映射.)

c) 证明, 若在定理 1 中所研究的函数 f 非负, 则

$$\int_{D_x} f(x)dx \leqslant \int_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)dt.$$

d) 把上面的不等式用于函数 $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ 和映射 $\varphi^{-1}: D_x \to D_t$, 证明公式 (3) 对非负函数 f 成立.

e) 把定理 1 中的函数 f 表为可积的非负函数的差的形式, 证明公式 (3) 成立.

8. 萨德 (Sard) 引理　*设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$, S 是映射 φ 的临界点集, 那么 $\varphi(S)$ 是勒贝格零测度集.*

我们提醒大家, 区域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 到空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑映射 φ 的临界点是指使 $\varphi'(x)$ 的秩小于 $\min\{m, n\}$ 的点 $x \in D$. 当 $m = n$ 时, 这相当于条件 $\det \varphi'(x) = 0$.

a) 对线性映射验证萨德引理.

b) 设 I 是区域 D 中的区间, 而 $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$. 证明存在这样的函数 $\alpha(h), \alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使当 $h \to 0$ 时, $\alpha(h) \to 0$ 并且对任意 $x, x+h \in I$,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x) - \varphi'(x)h| \leqslant \alpha(h)|h|.$$

c) 利用 b), 估计区间 I 在映射 φ 下的像 $\varphi(I)$ 与它在线性映射 $L(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a)$(其中 $a \in I$) 下的像的偏差.

d) 利用 a), b), c) 证明, 若 S 是映射 φ 在区间 I 中的临界点集, 则 $\varphi(S)$ 是零测度集.

e) 完成萨德引理的证明.

f) 利用萨德引理证明, 在定理 1 中只需映射 φ 是 $C^{(1)}(D_t, D_x)$ 类一一映射.

我们指出, 这里引进的萨德引理是萨德和莫尔斯定理的简单的特殊情况, 按照该定理, 引理的结论甚至当 $D \subset \mathbb{R}^m$, 而 $\varphi \in C^{(k)}(D, \mathbb{R}^n)$ 也成立, 其中 $k = \max\{m-n+1, 1\}$ 惠特尼 (Whitney) 举例说明了无论数 m 和 n 怎样配合, 这里的 k 值不可能再减小.

在几何中, 萨德引理乃是以下熟知的结论: 若 $\varphi: D \to \mathbb{R}^n$ 是开集 $D \subset \mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑映射, 那么对于几乎所有的点 $x \in \varphi(D)$, 它在 D 中的原像的全体 $\varphi^{-1}(x) = M_x$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 n 余维曲面 (流形)(亦即, 几乎对所有 $x \in \varphi(D)$ 有 $m - \dim M_x = n$).

9. 设代替定理 1 中微分同胚 φ, 研究在 D_t 中使 $\det \varphi'(t) \neq 0$ 的任意映射 $\varphi \in C^{(1)}(D_t, D_x)$. 设 $n(x) = \mathrm{card}\{t \in \mathrm{supp}(f \circ \varphi) | \varphi(t) = x\}$, 即 $n(x)$ 是函数 $f \circ \varphi$ 的支集中那样的点的数目, 这些点在映射 $\varphi: D_t \to D_x$ 下都变为点 $x \in D_x$, 那么, 成立以下公式:

$$\int_{D_x} (f \cdot n)(x) dx = \int_{D_t} ((f \circ \varphi) | \det \varphi'|)(t) dt.$$

a) 当 $f \equiv 1$ 时这个公式的几何意义是什么?

b) 对环 $D_t = \{t \in \mathbb{R}^2_t | 1 < |t| < 2\}$ 到环 $D_x = \{x \in \mathbb{R}^2_x | 1 < |x| < 2\}$ 上的如下特殊映射证明这个公式: 在平面 $\mathbb{R}^2_x$ 和 $\mathbb{R}^2_t$ 的相应的极坐标 (r, φ) 和 (ρ, θ) 中这个映射是用公式 $r = \rho, \varphi = 2\theta$ 给出的.

c) 试在一般情况下证明公式.

§6 反常重积分

1. 基本定义

定义 1 称可测集列 $\{E_n\}$ 为集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ 的*竭尽递增列*, 如果对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $E_n \subset E_{n+1} \subset E$, 且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

引理 *若 $\{E_n\}$ 是可测集 E 的竭尽递增列, 则*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$;

b) *对任意的函数 $f \in \mathfrak{R}(E)$ 有 $f|_{E_n} \in \mathfrak{R}(E_n)$ 且*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

◀ 因为 $E_n \subset E_{n+1} \subset E$, 所以 $\mu(E_n) \leqslant \mu(E_{n+1}) \leqslant \mu(E)$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu(E)$. 为了证明等式 a), 只需证反向不等式 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \geqslant \mu(E)$ 也成立.

集合 E 的边界 ∂E 有零体积, 因此它可以用有限个开区间覆盖, 且这些开区间的体积之和不超过预先给定的值 $\varepsilon > 0$. 设 Δ 是所有这些开区间的并, 那么集合 $E \bigcup \Delta =: \widetilde{E}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 而且由它的构造知 $\widetilde{E}$ 包含集 E 的闭包 $\overline{E}$, 并有

$$\mu(\widetilde{E}) \leqslant \mu(E) + \mu(\Delta) < \mu(E) + \varepsilon.$$

对于竭尽递增列 $\{E_n\}$ 的每个集 E_n 及 $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$, 可以重复上述的作法. 那么我们得到开集列 $\widetilde{E}_n = E_n \bigcup \Delta_n$, 满足 $E_n \subset \widetilde{E}_n$,

$$\mu(\widetilde{E}_n) \leqslant \mu(E_n) + \mu(\Delta_n) < \mu(E_n) + \varepsilon_n$$

和

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset E.$$

开集族 $\Delta, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \cdots$ 组成紧集 $\overline{E}$ 的开覆盖.

设 $\Delta, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \cdots, \widetilde{E}_k$ 是从上述开覆盖中取出的紧集 $\overline{E}$ 的有限覆盖. 因为 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k$, 所以集合 $\Delta, \Delta_1, \cdots, \Delta_k, E_k$ 也组成 $\overline{E}$ 的覆盖, 从而

$$\mu(E) \leqslant \mu(\overline{E}) \leqslant \mu(E_k) + \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + \cdots + \mu(\Delta_k) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

由此推出 $\mu(E) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

b) 从可测集上积分存在的勒贝格准则可知 $f|_{E_n} \in \mathfrak{R}(E_n)$. 由于 $f \in \mathfrak{R}(E)$, 所以存在常数 M 使在 E 上成立 $|f(x)| \leqslant M$, 从积分的可加性和积分的一般估计我们得到

$$\left|\int_E f(x)dx - \int_{E_n} f(x)dx\right| = \left|\int_{E\setminus E_n} f(x)dx\right| \leqslant M\mu(E \setminus E_n).$$

由此, 并注意已证明的 a), 即可推出断言 b) 成立. ►

定义 2 设 $\{E_n\}$ 是集合 E 的竭尽递增列, 而函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 在集合 $E_n \in \{E_n\}$ 上可积, 则称量

$$\int_E f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx$$

为*函数 f 在集合 E 上的反常积分*, 如果所指的极限存在且其值与集合 E 的竭尽递增列的选择无关.

最后等式左端的积分记号通常是对任意在 E 上的函数使用的, 但是, 在定义 2 中所指的极限存在时, 则说这个积分存在或收敛. 而如果那种对 E 的所有竭尽递增列共同的极限不存在, 就说函数 f 在集合 E 上的*积分不存在或积分发散*.

定义 2 的目的是把积分概念推广到被积函数无界或积分区域无界的情况.

所引进的反常积分的记号与通常的常义积分的记号是一致的, 因此需要作如下

注 1 若 E 是可测集,$f \in \mathfrak{R}(E)$, 则在定义 2 的意义下 f 在 E 上的积分存在, 且与函数 f 在集合 E 上的常义积分相等.

◄ 这正是上面所证引理断言 b) 所说的内容. ►

任意一个些许丰富一点的集的所有竭尽递增列作成的集列族实际上是难以理清的无限集, 对它不能利用穷举方法. 下述命题常常便于用来验证反常积分的存在性

命题 1 若函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 非负, 并设定义 2 中所指的极限对集合 E 的某个竭尽递增列 $\{E_n\}$ 存在, 则函数 f 在集合 E 上的反常积分收敛.

◀ 设 $\{E'_k\}$ 是集合 E 的另一个竭尽递增列, 函数 f 在 $E'_k \in \{E_k\}$ 上可积. 集合 $E_n^k := E'_k \bigcap E_n, n = 1, 2, \cdots$, 组成可测集 E'_k 的竭尽递增列, 因此从引理的论断 b) 中推出

$$\int_{E'_k} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^k} f(x)dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = A.$$

因为 $f \geqslant 0$, 而 $E'_k \subset E'_{k+1} \subset E$, 所以

$$\exists \lim_{k\to\infty} \int_{E'_k} f(x)dx = B \leqslant A.$$

但竭尽递增列 $\{E_n\}$ 和 $\{E'_k\}$ 是平权的, 因此 $A \leqslant B$, 从而 $A = B$. ▶

例 1 求反常积分 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

我们用圆 $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < n^2\}$ 的序列作为平面 $\mathbb{R}^2$ 的竭尽递增列, 化为极坐标以后容易得到

$$\iint\limits_{E_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} rdr = \pi(1 - e^{-n^2}) \to \pi,$$

当 $n \to \infty$ 时.

由命题 1 可以推出所研究的积分收敛且等于 π.

如果现在我们改用正方形 $E'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 || x| < n \wedge |y| < n\}$ 作平面的竭尽递增列, 从上述结果可以引出一个有益的推论. 由富比尼定理

$$\iint\limits_{E'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-n}^{n} dy \int_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}dx = \left(\int_{-n}^{n} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

由命题 1, 最后这个量当 $n \to \infty$ 时应当趋于 π. 这样一来, 我们遵循欧拉和泊松的方法得到了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

在下面注 3 里将指出反常重积分定义 2 的另外的一些乍看起来不十分明显的特性.

2. 反常积分收敛性的控制判别法

命题 2 设 f 和 g 是定义在集合 E 上并在 E 的同一些可测子集上可积的函数, 且在 E 上成立 $|f|(x) \leqslant g(x)$. 则从反常积分 $\int_E g(x)dx$ 的收敛性能推出积分 $\int_E |f|(x)dx$ 和 $\int_E f(x)dx$ 的收敛性.

◀ 设 $\{E_n\}$ 是集合 E 的竭尽递增列, 则函数 f 和 g 在 $E_n \in \{E_n\}$ 上可积. 由勒贝格准则得到 $|f|$ 在集合 $E_n(n\in\mathbb{N})$ 上的可积性, 因此有

$$\int_{E_{n+k}} |f|(x)dx - \int_{E_n} |f|(x)dx = \int_{E_{n+k}\setminus E_n} |f|(x)dx$$
$$\leqslant \int_{E_{n+k}\setminus E_n} g(x)dx = \int_{E_{n+k}} g(x)dx - \int_{E_n} g(x)dx,$$

其中 k 和 n 是任意自然数. 考虑到命题 1 和序列极限存在的柯西准则, 从这些不等式可以推出积分 $\int_E |f|(x)dx$ 收敛.

现在研究函数

$$f_+ := \frac{1}{2}(|f|+f), f_- := \frac{1}{2}(|f|-f).$$

显然, $0\leqslant f_+ \leqslant |f|, 0\leqslant f_- \leqslant |f|$. 由已证的结果, 函数 f_+ 和 f_- 在集合 E 上的反常积分收敛. 但是 $f = f_+ - f_-$, 所以函数 f 在 E 上的反常积分收敛 (并等于函数 f_+ 和 f_- 的积分的差). ▶

在研究反常积分的收敛性时, 为了能有效地利用命题 2, 收集一些标准函数作为比较函数是很有用的. 我们来研究这方面的问题.

例 2 在去掉中心 O 的 n 维单位球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 中, 研究函数 $1/r^\alpha$, 其中 $r = d(0,x)$ 是从点 $x\in B\setminus O$ 到点 O 的距离. 我们将说明对怎样的 $\alpha\in\mathbb{R}$, 这个函数在 $B\setminus O$ 的积分收敛. 为此, 用环域 $B(\varepsilon)=\{x\in B|\varepsilon < d(0,x) < 1\}$ 构造 $B\setminus O$ 的竭尽递增列.

变换成以 O 为中心的极坐标, 由富比尼定理得到

$$\int_{B(\varepsilon)} \frac{dx}{r^\alpha(x)} = \int_S f(\varphi)d\varphi \int_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}dr}{r^\alpha} = c\int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}},$$

其中 $d\varphi = d\varphi_1 \cdot \cdots \cdot d\varphi_{n-1}, f(\varphi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中极坐标变换的雅可比行列式中出现的角 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2}$ 的正弦的乘积, 而 c 是它在单位球面 S 上的积分值, 它只依赖于 n 而与 ε 无关.

若 $\alpha < n$, 则当 $\varepsilon\to+0$ 时, 在 $B(\varepsilon)$ 上所得到积分的有有限极限. 在其他情况, 当 $\varepsilon\to+0$ 时最后的积分趋于无穷.

于是我们证明了只在 $\alpha<n$ 时, 函数 $\dfrac{1}{d^\alpha(0,x)}$ 在点 O 的有界去心邻域上可积, 其中 n 是空间的维数,$d(0,x)$ 是点 x 到点 O 的距离.

类似地可以证明, 只在 $\alpha > n$ 时, 这个函数在球 B 的外部, 亦即在无穷远点的邻域上按反常积分意义可积

例 3 设 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|0\leqslant x^i\leqslant 1, i=1,\cdots,n\}$ 是 n 维方体, 而 I_k 是它的由条件 $x^{k+1}=\cdots=x^n=0$ 给定的 k 维边界. 在集合 $I\setminus I_k$ 上研究函数 $\dfrac{1}{d^\alpha(x)}$, 其中 $d(x)$ 是从点 $x\in I\setminus I_k$ 到边界 I_k 的距离. 我们将说明对于怎样的 $\alpha\in\mathbb{R}$, 这个函数在集合 $I\setminus I_k$ 上的积分收敛.

我们指出, 如果 $x=(x^1,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^n)$, 那么

$$d(x)=\sqrt{(x^{k+1})^2+\cdots+(x^n)^2}.$$

设 $I(\varepsilon)$ 是从 I 中去掉边界 I_k 在 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\varepsilon-$ 邻域所得的 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. 由富比尼定理

$$\begin{aligned}\int_{I(\varepsilon)}\frac{dx}{d^\alpha(x)}&=\int_{I_k}dx^1\cdots dx^k\int_{I_{n-k}(\varepsilon)}\frac{dx^{k+1}\cdots dx^n}{((x^{k+1})^2+\cdots+(x^n)^2)^{\alpha/2}}\\&=\int_{I_{n-k}(\varepsilon)}\frac{du}{|u|^\alpha},\end{aligned}$$

其中 $u=(x^{k+1},\cdots,x^n)$,$I_{n-k}(\varepsilon)$ 是从 $I_{n-k}\subset\mathbb{R}^{n-k}$ 中去掉点 $u=0$ 在 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的 $\varepsilon-$ 邻域所得的 $\mathbb{R}^{n-k}$ 中的区域.

根据在例 1 中获得的经验, 显然, 只有在 $\alpha<n-k$ 时, 最后的积分才收敛. 因而我们所研究的反常积分只在 $\alpha<n-k$ 时收敛, 其中 k 是边界的维数, 在边界近旁被积函数可以无限增加.

注 2 在证明命题 2 时, 验证了函数 $|f|$ 的积分收敛性蕴含函数 f 的积分收敛性, 原来, 对于定义 2 意义下的反常积分这个命题的逆命题也成立, 而这种情况在我们以前研究直线上的反常积分时是没有的, 那时我们区分了反常积分的绝对收敛性和非绝对 (条件) 收敛性. 为了尽快理解所产生的与定义 2 有关的新现象的实质, 我们来研究以下的例子.

例 4 设函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 定义在非负数集 $\mathbb{R}_+$ 上:$f(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 若 $n-1\leqslant x<n,n\in\mathbb{N}$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 所以容易看出当 $A\to+\infty$ 时, 积分 $\int_0^A f(x)dx$ 的极限存在且等于这个级数的和. 但这个级数不绝对收敛. 例如, 重新排列它的项可以得到发散到 $+\infty$ 的新级数. 新级数的部分和可以理解为函数 f 在实数轴中与级数的项相对应的那些区间的并集 E_n 上的积分. 显然, 由集合 E_n 作成的集列是函数 f 的定义域 $\mathbb{R}_+$ 的竭尽递增列.

于是, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ 的反常积分 $\int_0^\infty f(x)dx$ 在以前的理解下是存在的, 而在定义 2 的意义下不存在.

我们看到, 定义 2 中所要求的极限与竭尽递增列选取的无关性等价于级数的和与它的项的排列的无关性. 我们知道, 后者正好等价于绝对收敛性.

事实上, 在实践中总是不得不限于研究以下形式的特殊竭尽递增列. 设在区域 D 上定义的函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在集合 $E\subset\partial D$ 的邻域中无界. 这时, 我们从 D 中去掉那些包含在集 E 的 $\varepsilon-$ 邻域中的点, 得到区域 $D(\varepsilon)\subset D$. 当 $\varepsilon\to0$ 时, 这些区域生成 D 的竭尽递增列. 如果区域 D 无界, 那么它的递增列可以用在 D 中取无穷远点

的邻域的余集的方法得到. 在一元的情形中, 我们研究过这样的特殊竭尽递增列, 正是这些特殊的递增列把我们在研究直线上反常积分时已讲过的反常积分的主值意义 (柯西意义) 下的收敛性概念直接推广到任意维空间的情形.

3. 反常积分中的变量替换

最后, 我们将得到反常积分的变量替换公式, 从而我们将对 §5 中定理 1 和定理 2 做出虽然很简单但很有价值的补充.

定理 1 设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是开集 $D_t \subset \mathbb{R}_t^n$ 到开集 $D_x \subset \mathbb{R}_x^n$ 上的微分同胚映射, 而函数 $f: D_x \to \mathbb{R}$ 在集合 D_x 的任何可测紧子集上都可积. 若反常积分 $\int_{D_x} f(x)dx$ 收敛, 则积分

$$\int_{D_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)dt$$

也收敛, 且它们的值相等.

◀ 开集 $D_t \subset \mathbb{R}_t^n$ 的竭尽递增列可以是含于 D_t 的紧集列 $E_t^k, k \in \mathbb{N}$, 其中每个 E_t^k 是空间 $\mathbb{R}_t^n$ 的有限个区间的并 (这方面可参看 §5 引理 1 证明的开头部分). 因为 $\varphi: D_t \to D_x$ 是微分同胚, 对应于集合 D_t 的竭尽递增列 $\{E_t^k\}$ 有集合 D_x 的竭尽递增列 $\{E_x^k\}$, 其中 $E_x^k = \varphi(E_t^k)$ 是 D_x 中的可测紧集 (集 E_x^k 的可测性从 §5 引理 1 得到). 由 §5 中命题 1 可得

$$\int_{E_x^k} f(x)dx = \int_{E_t^k}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)dt.$$

由假设条件, 这个等式的左边当 $k \to \infty$ 时有极限, 所以当 $k \to \infty$ 时右边也有相同的极限. ▶

注 3 以上讨论验明了最后一个等式右端的积分对 D_t 的任何具上述特殊形式的竭尽递增列均有相同的极限, 以后我们利用的正是定理的被证明了的这一部分. 但是, 为了完成所述断言的证明, 按定义 2 必须正式地验证所求极限对于 D_t 的任意竭尽递增列都存在. 作为很好的练习, 我们把它 (并非十分初等的验证) 留给读者. 我们仅指出, 从证明了的结果已经可以推出函数 $|f\circ\varphi||\det\varphi'|$ 在集 D_t 上反常积分的收敛性.(见练习 7)

定理 2 设 $\varphi: D_t \to D_x$ 是开集 D_t 到开集 D_x 的映射, 又设在 D_t 和 D_x 中可以指出零测度集 S_t, S_x, 使 $D_t \setminus S_t, D_x \setminus S_x$ 是开集, 而 φ 是 $D_t \setminus S_t$ 到 $D_x \setminus S_x$ 上的微分同胚. 如果在这些条件下, 反常积分 $\int_{D_x} f(x)dx$ 收敛, 则积分

$$\int_{D_t\setminus S_t}((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)dt$$

也收敛, 且它们的值相等. 如果还设 $|\det \varphi'|$ 在 D_t 的任何紧子集上都有定义且有界, 则函数 $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|$ 在 D_t 上按反常积分意义可积, 且有等式

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} ((f\circ\varphi)|\det\varphi'|)(t)dt.$$

◀ 所述论断是本节定理 1 和 §5 中定理 2 的直接推论, 只要注意在求开集上的反常积分时, 可以仅考虑由可测紧集组成的竭尽递增列 (见注 3). ▶

例 5　计算积分 $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, 它对 $\alpha>0$ 是反常积分, 因为这时被积函数在圆周 $x^2+y^2=1$ 的邻域中无界.

化为极坐标, 由定理 2 得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^\alpha} = \iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}} \frac{rdrd\varphi}{(1-r^2)^\alpha}$$

当 $\alpha>0$ 时最后的积分也是反常积分, 但因被积函数非负, 所以它可以看作关于由矩形

$$I_n = \left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 | 0<\varphi<2\pi \wedge 0<r<1-\frac{1}{n}\right\}, n\in\mathbb{N}$$

构成的矩形

$$I = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 | 0<\varphi<2\pi \wedge 0<r<1\}$$

的特殊竭尽递增列的极限. 利用富比尼定理, 当 $\alpha<1$ 时, 得到

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}} \frac{rdrd\varphi}{(1-r^2)^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{rdr}{(1-r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}.$$

根据同样的理由可以得出结论: 当 $\alpha\geqslant 1$ 时所求积分发散.

例 6　证明积分 $\iint\limits_{|x|+|y|>1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$ 只有在

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$$

时才收敛.

◀ 由明显的对称性, 只需在 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 且 $x+y\geqslant 1$ 的区域 D 上研究积分即可.

显然, 为使积分收敛, 必须同时满足条件 $p>0$ 和 $q>0$. 事实上, 如果 $p\leqslant 0$, 那么对于含于 D 的矩形

$$I_A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\leqslant x\leqslant A \wedge 0\leqslant y\leqslant 1\}$$

上的积分, 我们就有估计

$$\iint\limits_{I_A} \frac{dxdy}{x^p+y^q} = \int_1^A dx \int_0^1 \frac{dy}{x^p+y^q} \geqslant \int_1^A dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^q}$$
$$= (A-1)\int_0^1 \frac{dy}{1+y^q},$$

它说明当 $A \to +\infty$ 时, 这个积分无限增加. 因此, 在以后的研究中可以认为 $p>0$ 且 $q>0$.

在区域 D 的有限部分内, 被积函数没有奇点, 因此所研究积分的收敛性等价于研究同一个函数在 G 上积分的收敛性. 其中 G 表示 D 中满足 $x^p+y^q \geqslant a > 0$ 的那部分. 为使曲线 $x^p+y^q=a$ 当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时含于 D, 假设数 a 是充分大的数.

按如下公式引进广义极坐标 (r,φ):

$$x = (r\cos^2\varphi)^{1/p}, y = (r\sin^2\varphi)^{1/q},$$

根据定理 2 我们得到

$$\iint\limits_{G} \frac{dxdy}{x^p+y^q} = \frac{2}{p\cdot q} \iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2 \\ a<r<\infty}} (r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi) dr d\varphi.$$

利用由区间

$$I_{\varepsilon A} = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 | 0<\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi/2-\varepsilon \wedge a\leqslant r\leqslant A\}$$

作成的区间

$$\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 | 0<\varphi<\pi/2 \wedge a\leqslant r<\infty\}$$

的竭尽递增列, 并应用富比尼定理, 我们得到

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2 \\ a\leqslant r<\infty}} (r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi) dr d\varphi$$
$$= \left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi \sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi d\varphi\right)\cdot\left(\lim_{A\to\infty}\int_a^A r^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2}dr\right).$$

因为 $p>0$ 且 $q>0$, 所以这两个极限中的第一个显然有限, 而第二个只有当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$ 时有限. ►

练 习

1. 指出对于怎样的参数 p,q, 积分 $\iint\limits_{0<|x|+|y|\leqslant 1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$ 收敛.

2. a) $\lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A \cos x^2 dx$ 是否存在?

b) 积分 $\int_{\mathbb{R}^1}\cos^2 x dx$ 在定义 2 的意义下是否收敛?

c) 验证

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{|x|\leqslant n}\sin(x^2+y^2)dxdy=\pi$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2n\pi}\sin(x^2+y^2)dxdy=0,$$

证明 $\sin(x^2+y^2)$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的积分发散.

3. a) 计算积分 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \dfrac{dxdydz}{x^p y^q z^r}$.

b) 对反常积分 (其实, 对常义积分也一样) 用富比尼定理时应小心. 试证积分

$$\iint\limits_{x\geqslant 1, y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

发散, 可是两个累次积分

$$\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

和

$$\int_1^{+\infty}dy\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

都收敛.

c) 证明, 若 $f\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, 且在 $\mathbb{R}^2$ 上有 $f\geqslant 0$, 则从两个累次积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

中任一个存在可推出积分 $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x,y)dxdy$ 收敛, 并且等于这个累次积分的值.

4. 证明, 若 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx=f(0)$$

5. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中带有光滑边界的有界区域, 而 S 是含于 D 的边界中的 k 维光滑曲面. 证明, 如果 $f\in C(D,\mathbb{R})$ 有估计 $|f|<\dfrac{1}{d^{n-k-\varepsilon}}$, 其中 $d=d(S,x)$ 是从点 $x\in D$ 到 S 的距离, 而 $\varepsilon>0$, 则函数 f 在 D 上的积分收敛.

6. 试证, 没有关于集合 E 可测性的假设, 注 1 仍然成立.

7. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 而函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 在含于 D 的任意可测紧集上可积.

a) 证明, 如果函数 $|f|$ 在 D 上的反常积分发散, 那么可以找到集合 D 的这样的竭尽递增列 $\{E_n\}$, 使每一个 E_n 都是 D 中由有限个 n 维区间组成的初等紧集, 并且当 $n\to\infty$ 时, $\iint\limits_{E_n}|f|(x)dx\to\infty$.

b) 验证, 若 f 在某个集合上的积分收敛, 而 $|f|$ 的积分发散, 则

$$f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \quad \text{和} \quad f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

的积分也都应当发散.

c) 证明, 在 a) 中的竭尽递增列 $\{E_n\}$ 可以选得使对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 满足关系式 $\int_{E_{n+1}/E_n} f_+(x)dx > \int_{E_n} |f|(x)dx + n$.

d) 利用下积分和证明, 如果 $\int_E f_+(x)dx > A$, 那么存在由有限个区间组成的初等紧集 $F \subset E$, 它使得 $\int_F f(x)dx > A$.

e) 从 c) 与 d) 推出, 存在这样的初等紧集 $F_n \subset E_{n+1} \setminus E_n$, 使得

$$\int_{F_n} f(x)dx > \int_{E_n} |f|(x)dx + n.$$

f) 利用 e) 证明, 集合 $G_n = F_n \bigcap E_n$ 是 D 中的初等紧集 (即由有限个区间组成的集), 它们组成 D 的竭尽递增列, 并且当 $n \to \infty$ 时, 有 $\int_{G_n} f(x)dx \to +\infty$.

这样一来, 如果 $|f|$ 的积分发散, 那么, 函数 f 的积分也发散 (在定义 2 的意义下).

8. 详细证明定理 2.

9. 我们记得, 如果 $x = (x^1, \cdots, x^n)$, 而 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$, 则 $\langle x, \xi \rangle = x^1\xi^1 + \cdots + x^n\xi^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积. 设 $A = (a_{ij})$ 是复对称 $n \times n$ 矩阵. 用 $\mathrm{Re}A$ 表示具元 $\mathrm{Re}a_{ij}$ 的矩阵, 记 $\mathrm{Re}A \geqslant 0(\mathrm{Re}A > 0)$ 表示对任何 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x \neq 0$ 有 $\langle(\mathrm{Re}A)x, x\rangle \geqslant 0$ (相应地, > 0)

a) 试证, 如果 $\mathrm{Re}A \geqslant 0$, 则当 $\lambda > 0, \xi \in \mathbb{R}^n$ 时成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\right) dx$$
$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right).$$

同时, $\sqrt{\det A}$ 的分枝可用以下方式取:

$$(\det A)^{-1/2} = |\det A|^{-1/2} \exp(-i\mathrm{Ind}A),$$
$$\mathrm{Ind}A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \arg\mu_j(A), |\arg\mu_j(A)| \leqslant \frac{\pi}{2},$$

这里 $\mu_j(A)$ 是矩阵 A 的本征值.

b) 设 A 是非蜕化实对称矩阵. 这时, 当 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda > 0$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i\frac{\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\right) dx$$
$$= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} |\det A|^{-1/2} \exp\left(-\frac{i}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn}A\right).$$

这里,$\mathrm{sgn}A$ 是矩阵 A 的号差, 亦即

$$\mathrm{sgn}A = \nu_+(A) - \nu_-(A),$$

其中 $\nu_+(A)$ 是 A 的正本征值的个数, 而 $\nu_-(A)$ 是负本征值的个数.

第十二章　$\mathbb{R}^n$ 中的曲面及微分形式

本章研究曲面, 曲面的边界, 曲面与其边界的和谐定向等概念, 导出 $\mathbb{R}^n$ 中曲面面积的计算公式, 还给出微分形式的初步知识. 掌握上述所有概念, 对于研究下一章要讲的曲线积分及曲面积分来说是非常重要的.

§1　$\mathbb{R}^n$ 中的曲面

$\mathbb{R}^k$ 是一个现成的 k 维曲面.

定义 1　若集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的每一点都有在 S 内的邻域[①]同胚[②]于 $\mathbb{R}^k$, 就说 S 是 *$\mathbb{R}^n$ 中的维数为 k 的曲面 ($k-$ 维曲面或 $k-$ 维流形)*.

定义 2　实现曲面定义中所说的同胚的映射 $\varphi : \mathbb{R}^k \to U \subset S$, 叫做*曲面 S 的图*或*局部图*; $\mathbb{R}^k$ 是参数域, 而 U 是图在曲面 S 上的有效域.

使点 $x = \varphi(t) \in U$ 对应于数组 $t = (t^1, \cdots, t^k) \in \mathbb{R}^k$, 就在 U 内由局部图确定一个曲线坐标. 显然, 由曲面的定义显然可知, 若把 $\mathbb{R}^k$ 换成与 $\mathbb{R}^k$ 同胚的任一拓扑空间, 则不会改变用它所描述的 S 的对象的集合. 代替 $\mathbb{R}^k$, 人们常用 $\mathbb{R}^k$ 中开方体 I^k 或开球 B^k 作为局部图的标准参数域. 然而这纯粹是一种约定.

[①]所谓点 $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ 在集合 S 内的邻域, 像前面一样, 理解为集合 $U_S(x) = S \bigcap U(x)$, 其中 $U(x)$ 是 x 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域. 因为后面叙述中只涉及曲面上的邻域, 所以为了简化, 在不会发生误会的情况下, 就把 $U_S(x)$ 写成 U 或 $U(x)$.

[②]在 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上, 从而也在 $U \subset S$ 上, 有自然的从 $\mathbb{R}^n$ 诱导来的度量, 所以我们能谈及 U 到 $\mathbb{R}^n$ 内的拓扑映射.

为了进行某些类比, 以及使后面的构造更加直观, 通常我们是把方体 I^k 取作曲面的局部图的标准参数域. 于是, 图

$$\varphi : I^k \to U \subset S \tag{1}$$

将局部地给出曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的参数方程 $x = \varphi(t)$, 这样一来, k 维曲面本身就能局部地看成是变了形的标准 k 维区间 $I^k \subset \mathbb{R}^k$.

后面将会看到, 能用参数给出曲面, 对于计算特别重要. 有时, 整个曲面只用一张图就表示出来了. 这样的曲面通常称为*初等曲面*. 例如连续函数 $f : I^k \to \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}^{k+1}$ 内的图是初等曲面. 然而, 曲面的初等性是很特殊的. 例如我们常见的二维球面就不能只用一张图给出. 在地球曲面的图册中至少要有两张图 (参看本节末第 4 题).

仿照这种情况, 我们引进

定义 3　设 $A(S) := \{\varphi_i : I_i^k \to U_i, i \in \mathbb{N}\}$ 是曲面 S 的一组局部图. 若这些局部图的有效域的全体, 能覆盖整个曲面 (即 $S = \bigcup\limits_i U_i$), 则称 $A(S)$ 为*曲面 S 的图册*.

同一曲面的两个图册的并, 显然还是该曲面的图册.

若对映射 (1), 即曲面的局部参数方程除了要求同胚之外不加其它限制, 则可能使 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面呈现出一幅怪样子. 例如, 可能发生这样的情况: 同胚于二维球面的曲面, 亦即, 按拓扑说是球面, 位于 $\mathbb{R}^3$ 内, 但这个曲面所限定的区域却不同胚于球体 (称之为带角的球面①).

为了避开这种与分析中所讨论的问题的实质没有多大关系的类似的困难, 在第 8 章 §7 中, 我们曾把 $\mathbb{R}^n$ 内的光滑 k 维曲面定义作这样的集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 对每个点 $x_0 \in S$, 在 $\mathbb{R}^n$ 内有它的邻域 $U(x_0)$, 及微分同胚

$$\psi : U(x_0) \to I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |t^i| < 1, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

使集合 $U_S(x_0) := S \bigcap U(x_0)$ 变到方体 $I^k = I^n \bigcap \{t \in \mathbb{R}^n | t^{k+1} = \cdots = t^n = 0\}$ 内.

很明显, 这种意义下的光滑曲面也是在定义 1 的意义下的曲面, 因为映射

$$x = \psi^{-1}(t^1, \cdots, t^k, 0, \cdots, 0) = \varphi(t^1, \cdots, t^k)$$

显然局部地将曲面参数化. 反之, 由上面提到的角形球面的例子看出, 即使 ψ 是简单同胚, 其逆命题一般也不成立. 然而, 当映射 (1) 足够正则时, 曲面的这两种概念实际是一样的.

实质上, 这在第 8 章 §7 的例 8 中已经指出过了. 但是, 由于这个问题非常重要, 所以我们来精确地叙述以下命题, 并提示答案是怎样得到的.

①亚历山大做出了这种曲面的例子. 亚历山大 (D. W. Alexander) (1888—1971) 是美国的拓扑数学家.

命题 若映射 (1) 属于 $C^{(1)}(I^k,\mathbb{R}^n)$ 类, 且在方体 I^k 的每一点有最大秩 k, 则存在 $\varepsilon>0$ 及从 n 维方体

$$I_\varepsilon^n := \{t\in\mathbb{R}^n \,\big|\, |t^i|<\varepsilon, i=1,\cdots,n\}$$

到空间 $\mathbb{R}^n$ 的微分同胚 $\varphi_\varepsilon: I_\varepsilon^n\to\mathbb{R}^n$, 使得 $\varphi|_{I^k\bigcap I_\varepsilon^n}=\varphi_\varepsilon|_{I^k\bigcap I_\varepsilon^n}$

换句话说, 命题断定了在所给条件下, 局部映射 (1) 是 n 维方体 I_ε^n 的微分同胚在 k 维方体 $I_\varepsilon^k := I^k\bigcap I_\varepsilon^n$ 上的限制.

◀ 为确定起见, 设映射 $x=\varphi(t)$ 的 n 个坐标函数 $x^i=\varphi^i(t^1,\cdots,t^k), i=1,\cdots,n$ 中的前 k 个已满足 $\det\left(\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right)(0)\neq 0, i,j=1,\cdots,k$. 这时, 根据隐函数定理, 在 $(t_0,x_0)=(0,\varphi(\theta))$ 附近, 关系式

$$\begin{cases} x^1=\varphi^1(t^1,\cdots,t^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^k=\varphi^k(t^1,\cdots,t^k),\\ x^{k+1}=\varphi^{k+1}(t^1,\cdots,t^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^n=\varphi^n(t^1,\cdots,t^k) \end{cases}$$

与关系式

$$\begin{cases} t^1=f^1(x^1,\cdots,x^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ t^k=f^k(x^1,\cdots,x^k),\\ x^{k+1}=f^{k+1}(x^1,\cdots,x^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^n=f^n(x^1,\cdots,x^k) \end{cases}$$

等价.

在这种情况下, 映射

$$\begin{cases} t^1=f^1(x^1,\cdots,x^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ t^k=f^k(x^1,\cdots,x^k),\\ t^{k+1}=x^{k+1}-f^{k+1}(x^1,\cdots,x^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ t^n=x^n-f^n(x^1,\cdots,x^k) \end{cases}$$

是点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 的 n 维邻域的微分同胚. 现在可以取它的逆微分同胚在某个方体 I_ε^n 上的限制作为 φ_ε. ▶

当然, 改变坐标的尺度, 能使上面的微分同胚中的 $\varepsilon=1$, 从而方体 I_ε^n 成为单位方体.

这样就证明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲面, 可以采用与前面定义等价的

定义 4 如果 (定义 1 所引入的)$\mathbb{R}^n$ 中的 k 维曲面具有这样的图册, 其局部图是光滑的 ($C^{(m)}$ 类,$m\geqslant 1$) 映射, 且在其定义域的每点的秩为 k, 就称它为 ($C^{(m)}$ 类,$m\geqslant 1$) **光滑曲面**.

请注意, 映射 (1) 关于秩的条件很重要. 例如, 由式子 $x^1=t^2,x^2=t^3$ 给出的解析映射 $\mathbb{R}\ni t\mapsto(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2$ 在平面 $\mathbb{R}^2$ 内确定一条在点 (0,0) 处有尖点的曲线. 显然这条曲线不是 $\mathbb{R}^2$ 中的一维光滑曲面; 因为后者应在它的每一点有切面 (一维切面)①.

因此, 特别地, 不要把 $C^{(m)}$ 类光滑道路与 $C^{(m)}$ 类光滑曲线这两个概念混淆了.

在分析中, 通常考察的是足够光滑的 k 秩参数化 (1). 可以断定, 在这种情况下, 这里采用的光滑曲面的定义 4, 与第 8 章 §7 所讨论的定义是一致的. 然而, 如果说早先的定义直观, 且能避开一些不必要的麻烦的话, 那么, 与曲面的定义 1 一致的定义 4 的优越性在于它很容易提升成抽象流形的定义, 而不必局限于 $\mathbb{R}^n$ 中. 在这里, 我们暂时还是只关心 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面.

现在讨论一些这种曲面的例子.

例 1 我们知道, 若 $F^i\in C^{(m)}\ (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}),i=1,\cdots,n-k$ 是一组光滑函数, 且方程组

$$\begin{cases}F^1(x^1,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ F^{n-k}(x^1,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots,x^n)=0\end{cases}\tag{2}$$

在属于其解集 S 的每一点处的秩为 $n-k$, 则此方程组或者没有解, 或者其解的集合 S 在 $\mathbb{R}^n$ 中构成 $C^{(m)}$ 类 k 维光滑曲面 S.

◂ 我们要证, 如果 $S\neq\varnothing$, 则 S 满足定义 4. 这可从隐函数定理推出来. 据隐函数定理, 在任何点 $x_0\in S$ 的某邻域内, 不计变量标号的变化, 方程组 (2) 等价于方程组

$$\begin{cases}x^{k+1}=f^{k+1}(x^1,\cdots,x^k),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^n=f^n(x^1,\cdots,x^k),\end{cases}$$

①关于切平面, 参看第 8 章 §7.

这里 $f^{k+1},\cdots,f^n \in C^{(m)}$. 将此方程组改写成

$$\begin{cases} x^1 = t^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^k = t^k, \\ x^{k+1} = f^{k+1}(t^1,\cdots,t^k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n = f^n(t^1,\cdots,t^k) \end{cases}$$

的形式, 就成了在 S 上点 $x_0 \in S$ 的邻域的参数方程. 显然, 继续作变换, 即可把参数域变成典则的, 例如, 变成 I^k, 从而得到标准的局部图 (1). ▶

例 2 特别地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中用方程

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = r^2 \quad (r > 0) \tag{3}$$

给出的球面是 $\mathbb{R}^n$ 内的 $n-1$ 维光滑曲面, 因为方程 (3) 的解集 S 显然不空, 并且在 S 的任何点, 方程 (3) 左端的梯度不为零.

当 $n = 2$ 时, 得到 $\mathbb{R}^2$ 内的圆.

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2,$$

利用极坐标

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta, \\ x^2 = r\sin\theta, \end{cases}$$

容易用极角 θ 把它局部参数化.

对固定的 $r(>0)$ 值, 映射 $\theta \mapsto (x^1,x^2)(\theta)$ 在任何形如 $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ 的区间上都是微分同胚, 而且, 为构成圆的图册, 两张图 (例如, 与 $\theta_0 = 0$ 及 $\theta_0 = -\pi$ 对应的两张图) 就够了. 但是, 只用一张标准图 (1) 是不够的, 因为圆是紧的, 这一点与 $\mathbb{R}^1$ 或 $I^1 = B^1$ 不同, 而在拓扑空间中, 紧性是关于拓扑变换不变的性质.

对于 $\mathbb{R}^3$ 内的二维球面

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2,$$

能用极 (球) 坐标把它参数化, 用 ψ 表示向量 (x^1,x^2,x^3) 与轴 Ox^3 的正向之间的夹角 $(O \leqslant \psi \leqslant \pi)$, 而用 φ 表示向径 (x^1,x^2,x^3) 在平面 (x^1,x^2) 上射影的极角, 得到

$$\begin{aligned} x^3 &= r\cos\psi, \\ x^2 &= r\sin\psi\sin\varphi, \\ x^1 &= r\sin\psi\cos\varphi. \end{aligned}$$

在一般情形, $\mathbb{R}^n$ 内的极坐标 $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$ 用关系

$$
\begin{aligned}
x^1 &= r\cos\theta_1,\\
x^2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
x^n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

引入.

注意, $\mathbb{R}^n$ 中由一般极坐标 $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$ 到笛卡儿坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的变换 (4) 的雅可比是

$$
J = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}. \tag{5}
$$

由该雅可比的表示式显然可见, 比如说, 如果 $0<\theta_i<\pi, i=1,\cdots,n-2$ 且 $r>0$, 则 $J\neq 0$. 这就是说, 即使不引用参数 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}$ 的平凡几何意义, 对于固定的 $r>0$, 作为局部微分同胚 $(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mapsto(x^1,\cdots,x^n)$ 的限制, $(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mapsto(x^1,\cdots,x^n)$ 本身仍然是一个局部微分同胚. 但是球面关于 $\mathbb{R}^n$ 的正交变换群是齐性的, 所以, 由此即可推知, 对于球面上任意点的邻域建立局部图是可能的.

例 3 当 $k<n$ 时, 柱面

$$
(x^1)^2+\cdots+(x^k)^2=r^2 \quad (r>0)
$$

是 $\mathbb{R}^n$ 内的 $n-1$ 维曲面, 它是变量 $(x^1,\cdots,x^k)$ 的平面内的 $k-1$ 维球面与变量 $(x^{k+1},\cdots,x^n)$ 的 $n-k$ 维平面的直积.

显然, 若把 $\mathbb{R}^k$ 内 $k-1$ 维球面上点的极坐标 $\theta_1,\cdots,\theta_{k-1}$ 取作 $n-1$ 个参量 $(t^1,\cdots,t^{n-1})$ 中的前 $k-1$ 个, 而令 $t^k,\cdots,t^{n-1}$ 分别等于 $x^{k+1},\cdots,x^n$, 就能把这个曲面局部参数化.

例 4 设空间 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标为 (x,y,z), 在平面 $x=0$ 中取一条不与 Oz 轴相交的曲线 (一维曲面), 并将它绕 Oz 轴旋转, 就得到一个二维曲面. 可把这条曲线 (经线) 的局部坐标及 (比如) 旋转角 (纬线上的局部坐标) 做为此二维曲面的局部坐标.

特别地, 若平面 $x=0$ 上的曲线取以点 $(0,b,0)$ 为中心, 半径为 a 的圆, 则当 $0<a<b$ 时, 得到二维环面, 俗称轮胎曲面 (图 69). 它的参数方程能写成

$$
\begin{cases}
x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\\
y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\\
z=a\cos\psi.
\end{cases}
$$

的形式, 其中 ψ 是在原来的圆 (子午线) 上的角参数, 而 φ 是纬线上的角参数.

与上面所作的旋转环面同胚的任何曲面, 在拓扑学中都叫**环面**(确切地说是**二维环面**).

由此可见, 二维环面是两个圆的直积. 因为圆是把线段的两个端点粘在一起 (等同) 而得到的, 所以环面能够由线段的直积即矩形, 用把矩形对边按对应点粘接起来的方法得到 (图 70).

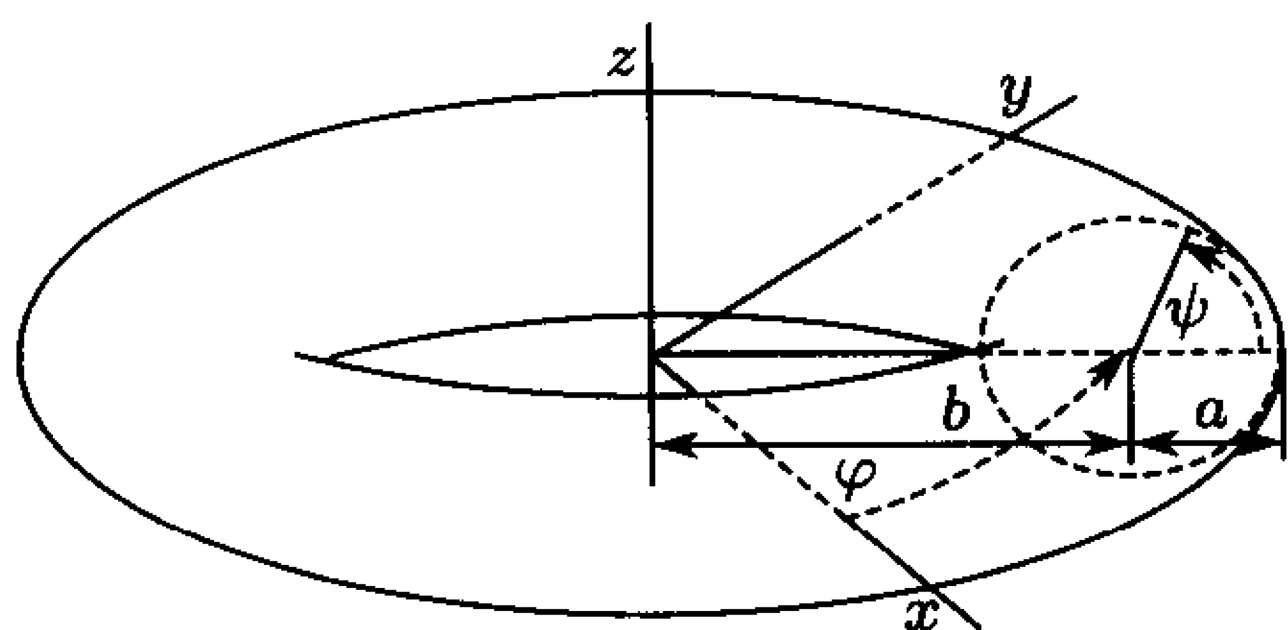


图 69

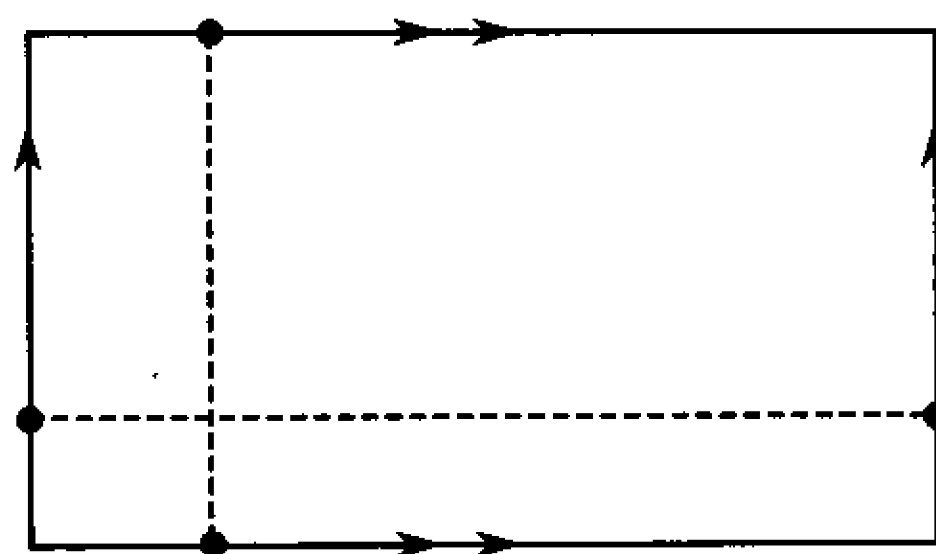


图 70

实质上, 这种方法我们早已用过, 当时确立了双摆的构形空间是二维环面, 而摆的运动与环上的路径相对应*.

例 5 若把柔软的带子 (矩形) 按图 71a 中的箭头粘接, 就得到环 (图 71c) 或柱面 (图 71b). 而按拓扑学的观点, 它们是一样的 (这些曲面彼此同胚.)

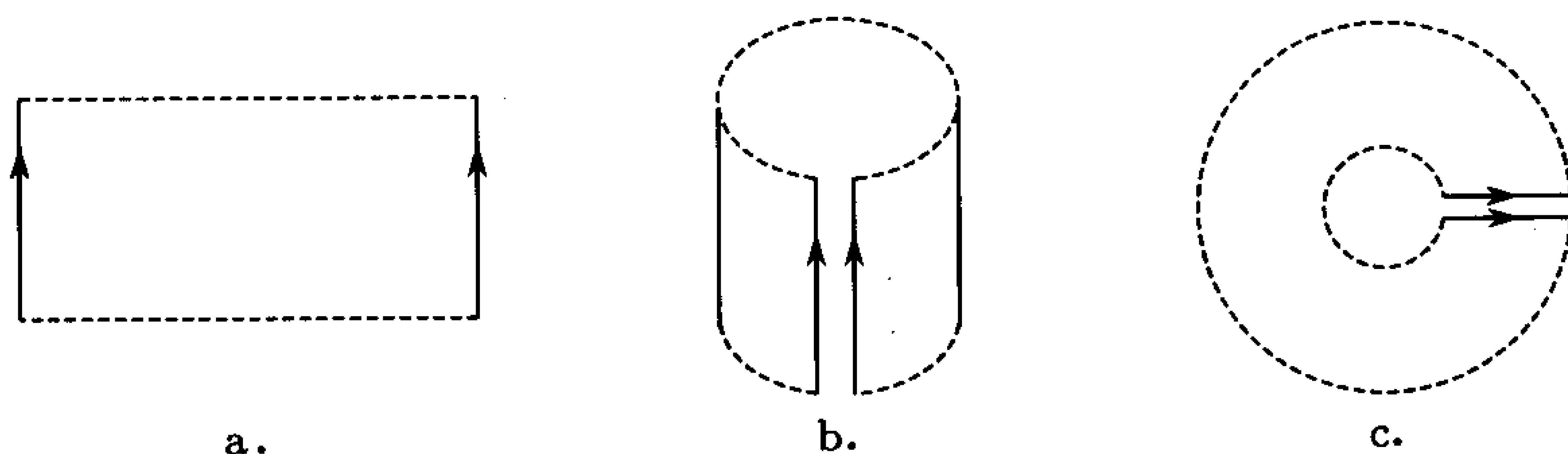


图 71

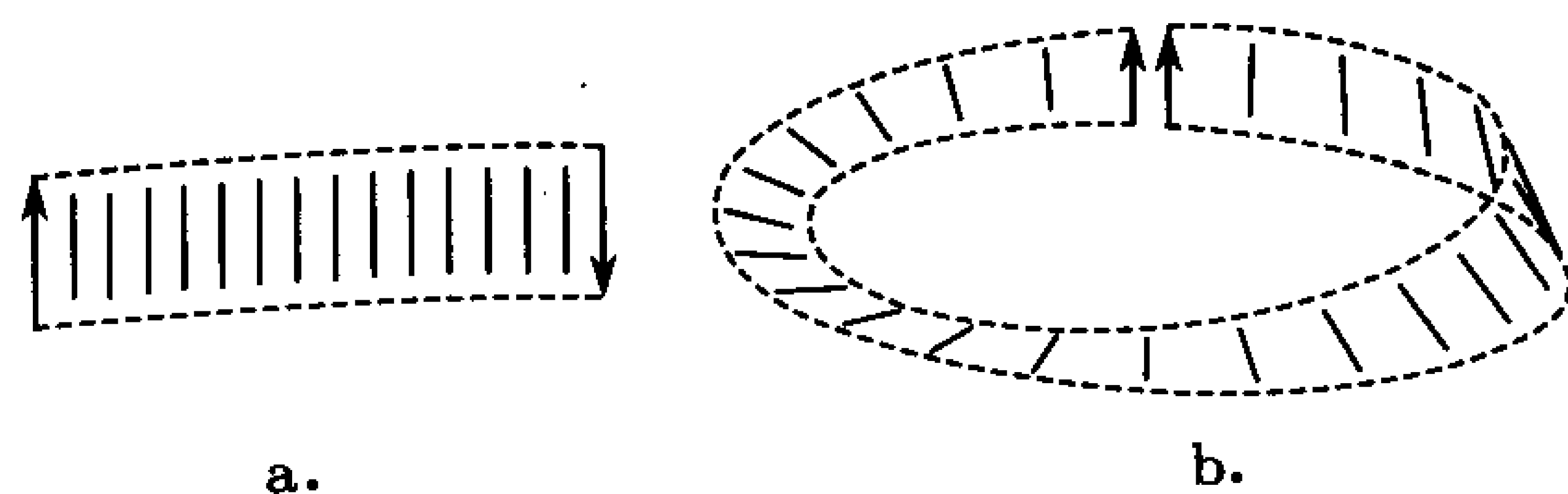


图 72

而若按图 72a 上画的箭头粘接这条带子, 则得到 $\mathbb{R}^3$ 内的曲面 (图 72b), 在数学中叫做**默比乌斯带**.①

* 译者注. 该书此前并没有介绍过双摆, 它第一次出现是在后边第 15 章, §2, 第 1 段的例 4 中.
①默比乌斯 (A.F.Mobiüs)(1790—1868), 德国数学家与天文学家.

自然是借助原来矩形所在的平面上的坐标引进此曲面上的局部坐标.

例 6 把例 4 与例 5 的叙述放在一起比较一下, 自然会想, 现在可以把将矩形粘接成环面的方法与将矩形粘接成默比乌斯带的方法合在一起, 成为一种新的粘接矩形的方法(图 73a). 但是, 正像不撕破矩形或不使其不自交, 也不超出 $\mathbb{R}^2$ 的范围, 就不可能粘成默比乌斯带一样, 在 $\mathbb{R}^3$ 内在类似条件下完成上述新粘接也是不可能的. 然而, 在 $\mathbb{R}^4$ 中就能做到, 结果得到 $\mathbb{R}^4$ 中的曲面, 叫做*克莱因*(Klein)[①]*瓶*. 图 73b 是绘制这种曲面的方法的示意.

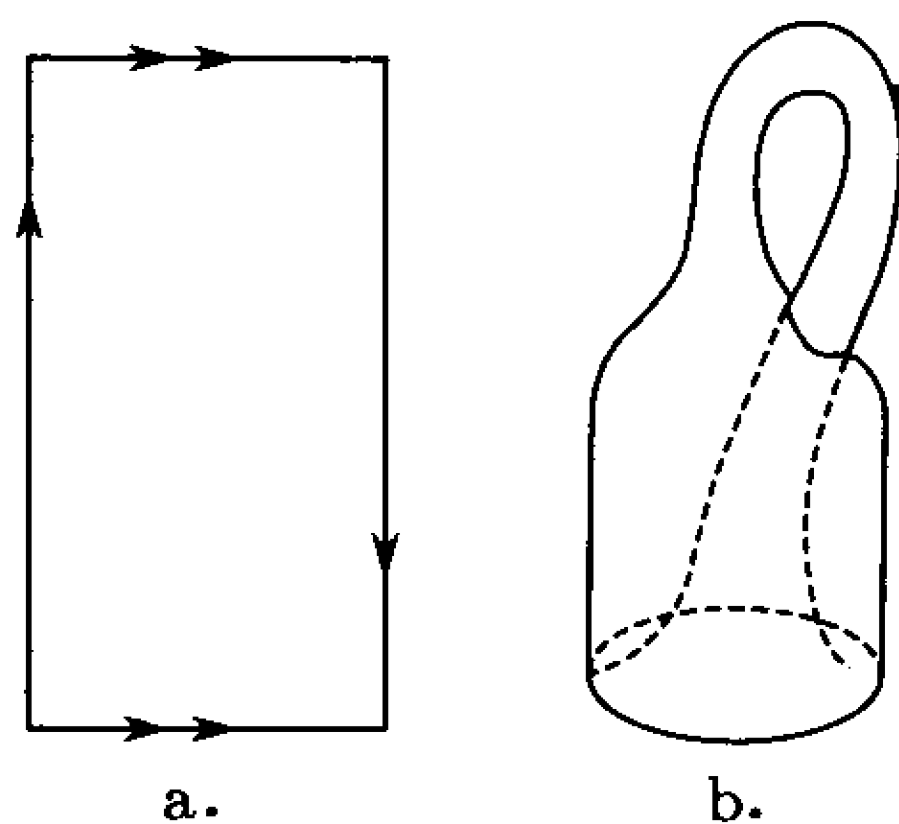


图 73

上面这个例子说明, 有时对曲面本身进行描述, 还是比较容易的, 只要不要求曲面非位于给定的空间 $\mathbb{R}^n$ 内不可. 此外, 许多重要的 (各种维数的) 曲面, 开始时并不是作为 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 而是作为, 例如, 机械系统的相空间, 连续变换群的几何像, 关于原空间的自同构群的商空间等等产生的. 我们暂时只给出这些初步的注释, 而把它们的严谨论述留到第 15 章. 在那里, 我们将给出曲面的普遍定义, 而这种曲面未必在 $\mathbb{R}^n$ 中. 在这里虽然还没有给出这个普遍的定义, 我们还是告诉大家, 根据著名的惠特尼[②] 定理, 任何 k 维曲面, 能够同胚地映射成位于空间 $\mathbb{R}^{2k+1}$ 内的曲面. 因此, 在 $\mathbb{R}^n$ 中研究曲面, 从拓扑多样性与拓扑分类的观点来看, 实际上不会有任何丢失. 然而, 这些问题已不属于我们的平凡几何需求的范围了.

练 习

1. 对于每个由条件

$$E_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = \alpha\},$$
$$E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 = \alpha\},$$
$$E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = \alpha\},$$
$$E_\alpha = \{z \in \mathbb{C} | |z^2 - 1| = \alpha\}$$

确定的依赖参数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的集合 E_α, 说明

a) E_α 是不是曲面;

b) 如果是,E_α 是多少维的曲面;

c) E_α 是不是连通曲面.

---

① 克莱因 (C. F. Klein) (1849—1925) 是卓越的德国数学家, 他最先严格地确立了非欧几何的无矛盾性; 他精通数学史, 是《数学百科全书》的出版组织者之一.

② 惠特尼 (H. Whitney) (1907—1989), 美国拓扑数学家, 纤维空间理论的创建者之一.

2. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是满足条件 $f\circ f=f$ 的光滑映射,

a) 证明集 $f(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}_n$ 内的光滑曲面.

b) 这个曲面的维数由映射 f 的什么特征性质确定?

3. 设 $e_0,e_1,\cdots,e_n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准正交基底, $x=x^0e_0+x^1e_1+\cdots+x^ne_n,\{x\}$ 是点 $(x^0,x^1,\cdots,x^n),e_1,\cdots,e_n$ 是 $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 内的基底.

公式

$$\psi_1=\frac{x-x^0e_0}{1-x^0}\text{ 当 }x\neq e_0,\ \psi_2=\frac{x-x^0e_0}{1+x^0}\text{ 当 }x\neq -e_0,$$

分别给出从点 $\{e_0\}$ 及 $\{-e_0\}$ 出发的球极平面射影:

$$\psi_1:S^n\setminus\{e_0\}\to\mathrm{R}^n,\ \psi_2:S^n\setminus\{-e_0\}\to\mathrm{R}^n.$$

a) 说明这些映射的几何意义.

b) 验证, 若 $t\in\mathbb{R}^n$ 且 $t\neq 0$, 则 $(\psi_2\circ\psi_1^{-1})(t)=\dfrac{t}{|t|^2}$, 这里

$$\psi_1^{-1}=(\psi_1\big|_{S_n\setminus\{e_0\}})^{-1}.$$

c) 证明, 两个图 $\psi_1^{-1}=\varphi_1:\mathbb{R}^n\to S^n\setminus\{e_0\},\psi_2^{-1}=\varphi_2:\mathbb{R}^n\to S^n\setminus\{-e_0\}$ 构成球面 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 的图册.

d) 证明, 球面的任何图册, 必定有不少于两张图.

§2 曲面的定向

首先, 我们知道, 从空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到另一组标架 $\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n$ 的变换, 由分解式 $\tilde{e}_j=a_j^ie_i$ 产生的方阵 (a_j^i) 来实现. 此方阵的行列式永不为 0, 且空间的所有标架可分为两个等价类, 同一类中的标架, 它们相互变换的矩阵的行列式是正的. 这样的类叫做空间 $\mathbb{R}^n$ 的**定向标架类**.

所谓给出 $\mathbb{R}^n$ 的定向, 就是按照明确的定义从 $\mathbb{R}^n$ 的两个定向标架类中指定一个. 这样, **定向空间** $\mathbb{R}^n$ 就是空间 $\mathbb{R}^n$ 本身加上它的一个确定的定向标架类. 为了指出某个定向类, 只要取其中的任一个标架就行了. 因此, 可以认为定向空间 $\mathbb{R}^n$, 就是空间 $\mathbb{R}^n$ 连同它的一个固定的标架.

$\mathbb{R}^n$ 内的标架产生出 $\mathbb{R}^n$ 内的坐标系, 而由这样的坐标系向另一坐标系的变换, 由方阵 (a_i^j) 实现, 它是标架转换方阵 (a_j^i) 的转置方阵. 因为这些方阵的行列式相同, 所以重复上面指出的关于定向的叙述, 就得到 **$\mathbb{R}^n$ 中定向坐标系类**; 当实现坐标系变换的方阵有正的雅可比时, 就把这样的坐标系置于同一类中.

这两种描述空间 $\mathbb{R}^n$ 的定向概念的方法在下面描述曲面定向概念时, 都将表现出自己的作用, 二者实质上是一致的.

但是, 我们还应注意在曲线坐标系情况下坐标与标架之间的联系, 这对以后是有用的.

设 G 与 D 是位于两个 $\mathbb{R}^n$ 空间内的微分同胚区域. 在这两个 $\mathbb{R}^n$ 空间中分别有笛卡儿坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 及 $(t^1, \cdots, t^n)$. 微分同胚 $\varphi : D \to G$, 可以看成是在区域 G 内按规则 $x = \varphi(t)$ 引进的曲线坐标, 即点 $x \in G$ 用点 $t = \varphi^{-1}(x) \in D$ 的笛卡儿坐标 $(t^1, \cdots, t^n)$ 来表示. 如果在每个点 $t \in D$ 处, 考虑切空间 $T\mathbb{R}^n_t$ 的由坐标方向的单位向量组成的标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 则在 D 内产生了一个标架场, 这个标架场可以看成是空间 $\mathbb{R}^n$ 单位标架平行移至 D 的每一个点得到的. 因为 $\varphi : D \to G$ 是微分同胚, 切空间间的映射 $\varphi'(t) : TD_t \to TG_{x=\varphi(t)}$ 在每点 t 是切空间间的同构, 按规律 $TD_t \ni \boldsymbol{e} \longmapsto \varphi'(t)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\xi} \in TG_x$实现的. 这就是说, 由 TD_t 内的标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 能得到 TG_x 内的标架 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_n$, 同时, 在 D 上的标架场变换成 G 上的标架场 (图 74). 既然 $\varphi \in C^{(1)}(D, G)$, 所以, 如果向量场 $\boldsymbol{e}(t)$ 在 D 内连续, 则向量场 $\boldsymbol{\xi}(x) = \boldsymbol{\xi}(\varphi(t)) = \varphi'(t)\boldsymbol{e}(t)$ 在 G 内也连续. 这样, 任何 (由 n 个连续向量场组成的) 连续标架场, 在微分同胚下变成连续标架场. 现在考虑满足条件 $x = \varphi_i(t_i)$ 的一对微分同胚 $\varphi_i : D_i \to G, i = 1, 2$, 它们在同一区域 G 内引入两个曲线坐标系 $(t_1^1, \cdots, t_1^n)$ 及 $(t_2^1, \cdots, t_2^n)$. 互逆的微分同胚 $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : D_1 \to D_2, \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : D_2 \to D_1$ 实现了这两个曲线坐标系的相互转换. 这些映射在区域 D_1, D_2 的各对应点上是互逆的, 因此, 其雅可比有相同的符号. 如果区域 G(同时 D_1 及 D_2) 是连通的, 那么, 由所讨论的函数行列式的连续性及非零性, 它们在区域 D_1 及 D_2 的所有点上将各有其确定的符号.

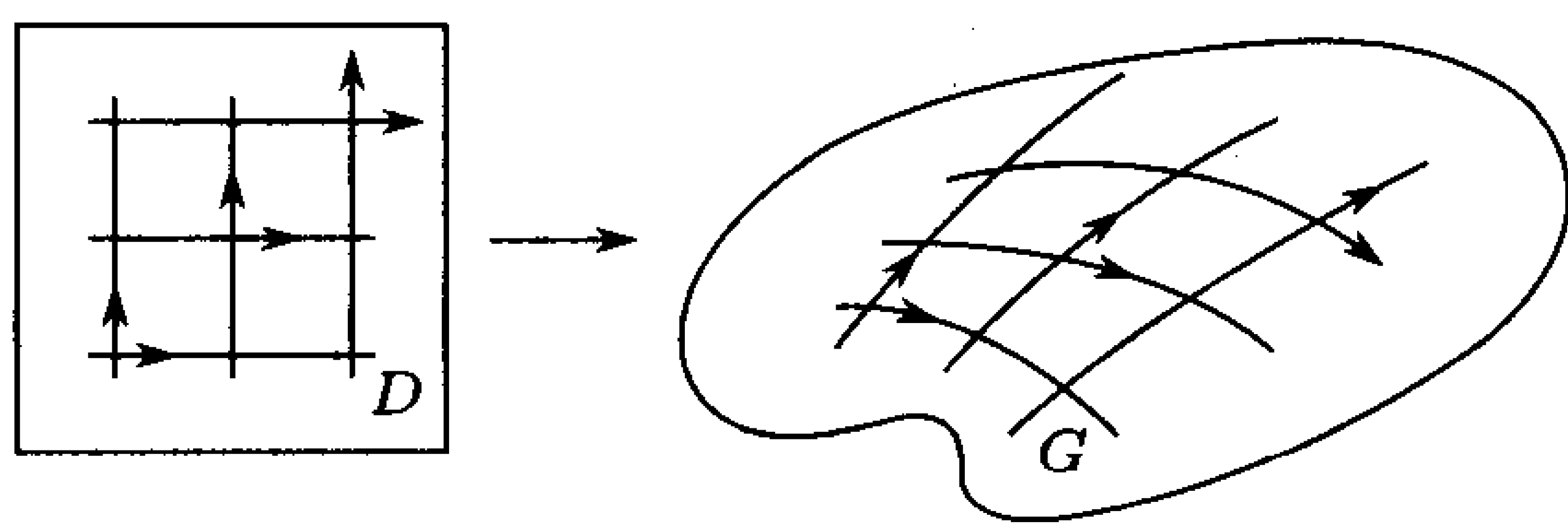


图 74

这就是说, 用上面指出的方法, 在连通域 G 内引出的曲线坐标系, 恰好分成两个等价类; 同一类坐标系间的变换具有正的雅可比. 这样的等价类叫做区域 G 的**定向曲线坐标系类**.

给区域 G **定向**, 按定义就是在 G 内指定它的一个定向曲线坐标系类.

不难验证, 区域 G 内, 属于同一类的定向曲线坐标系 (如上所述) 在 G 内产生的连续标架场, 在每个点 $x \in G$ 都位于切空间 TG_x 的同一个定向标架类中. 可以证明, 连通区域 G 的连续标架场恰好分成两个等价类, 在每点 $x \in G$ 其标架属于空间 TG_x 的同一个定向标架类的标架场, 分在同一个等价类中 (请参看本节末与此有关的练习 3,4).

这样, 连通区域 G 的定向, 能够用两种完全等价的方法给出: 指定 G 内的一个曲线坐标系, 或给出 G 的属于同一个定向类的任意一个连续标架场, 例如, 由这个坐标系产生的标架场.

现在已经清楚, 只要在连通区域 G 的一点 x 处指定了 TG_x 的定向标架, 则它的定向就完全确定了. 这在实践中是用得很多的. 如果在某点 $x_0 \in G$ 给出了一个定向标架, 并在 G 内选取了一个曲线坐标系 $\varphi : D \to G$, 从而在 TG_{x_0} 内建立相应于这个坐标系的标架, 把它与在 $x_0 \in G$ 原先给出的定向标架相对照, 如果两个标架属于 TG_{x_0} 的同一个定向类, 就认为曲线坐标在 G 上给出了与原来的定向标架同样的定向. 反之, 就认为给出了相反的定向.

如果 G 是开集, 但不一定连通, 则因上面的全部叙述适用于它的任一连通子集, 要给 G 定向, 就得在 G 的每个连通子集内给出自己的定向标架. 这说明, 若 G 有 m 个这样的子集, 则集 G 将有 2^m 种不同的定向.

如果把区域 G 代以 $\mathbb{R}^n$ 内由一个图给出的光滑 k 维曲面 S, 就能把上面所说的关于区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 的定向, 逐字逐句地重复 (图 75) 于 S 的定向. 这时, S 的所有曲线坐标系, 按照它们相互变换时的雅可比的符号, 自然地分成了两个定向类; 在 S 上的两类标架场, 也同样地产生出来; 也同样能用位于 S 的某个切平面 TS_{x_0} 内的定向标架给出 S 的定向.

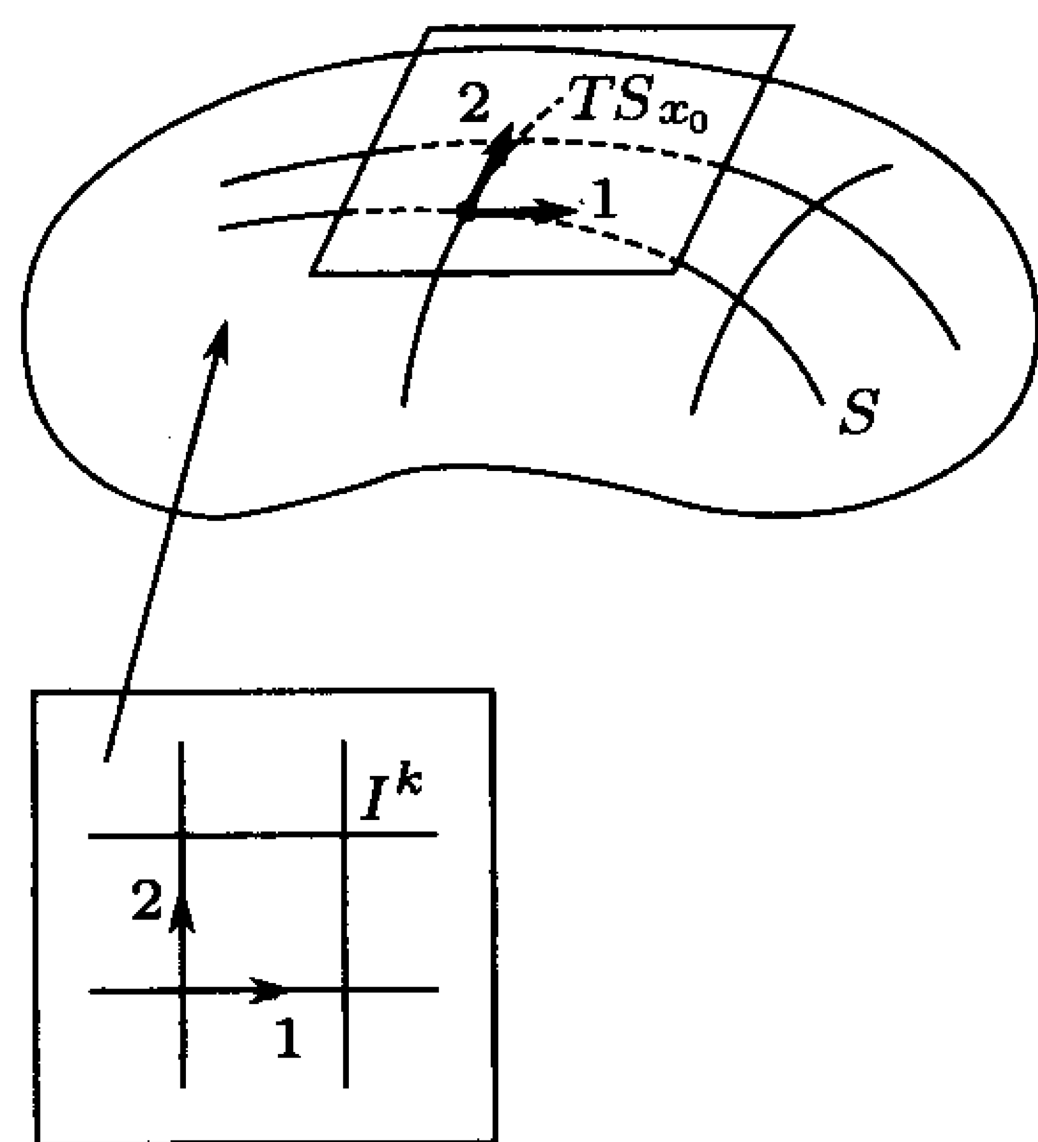


图 75

这里出现的唯一需要验证的是以下并非明显成立的断言.

命题 1 由光滑曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的一个曲线坐标系到另一个曲线坐标系的变换是微分同胚的, 且其光滑度与曲面的图的光滑度一样.

◀ 实际上, 由 § 1 的命题, 任何一个图 $\varphi : I^k \to U \subset S$, 可以局部地看成点 $t \in I^k \subset \mathbb{R}^n$ 的某个 n 维邻域 $O(t)$ 到点 $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ 的 n 维邻域 $O(x)$ 的微分同胚 $\mathfrak{F} : O(t) \to O(x)$ 在 $I^k \cap O(t)$ 上的限制, 并且 $\mathfrak{F}$ 有与 φ 同样的光滑度. 今设 $\varphi_1 : I_1^k \to U_1$ 与 $\varphi_2 : I_2^k \to U_2$ 是两个这样的图, 则在它们的公共的有效域内, 映射 $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ (把第一个坐标系变成第二个坐标系) 局部地表示成 $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(t^1 \cdots, t^k) = \mathfrak{F}_2^{-1} \circ \mathfrak{F}_1(t^1, \cdots, t^k, 0, \cdots, 0)$ 的形式, 这里 $\mathfrak{F}_1$ 与 $\mathfrak{F}_2$ 是对应于 φ_1 与 φ_2 的 n 维邻域上的微分同胚. ▶

用由一张图给出的初等曲面为例, 我们弄明白了所有曲面定向概念的全部本质内容, 现在我们对 $\mathbb{R}^n$ 中任意光滑曲面的情况给出完整的定义, 并以此完成对这个问题的讨论.

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 内的 k 维光滑曲面, $\varphi_i : I_i^k \to U_i, \varphi_j : I_j^k \to U_j$ 是曲面 S 的两个局

部图, 它们的有效域相交, 即 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. 这时, 在集 $I_{ij}^k = \varphi_i^{-1}(U_j)$ 与 $I_{ji}^k = \varphi_j^{-1}(U_i)$ 之间, 像刚才证明的那样, 自然地建立起互逆的微分同胚

$$\varphi_{ij} : I_{ij}^k \to I_{ji}^k, \varphi_{ji} : I_{ji}^k \to I_{ij}^k,$$

它们实现了曲面 S 上从一个局部曲线坐标系向另一曲线坐标系转换.

定义 1 如果曲面上的两张图的有效域或不相交, 或相交且在它们的公共有效域上, 相互的坐标转换是有正雅可比的微分同胚, 就说这两张图是相容的.

定义 2 如果曲面的一个图册是由两两相容的图组成的, 就说它是*曲面的定向图册*.

定义 3 若一曲面有定向图册, 就说它是*可定向曲面*. 反之就说它是*不可定向曲面*.

与空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域或由一张图给出的初等曲面不同, $\mathbb{R}^n$ 中任意的曲面有可能是不可定向的.

例 1 可以验证默比乌斯带是不可定向曲面 (见本节末之练习 2,3).

例 2 克莱因瓶也是不可定向的, 因为它包含默比乌斯带作为自己的一部分, 这由表现克莱因瓶结构的图 73 能直接看出来.

例 3 圆周及一般的 k 维球面是可定向曲面, 这可用由相容图构成的球的图册的直接表达式加以证明 (见 §1 例 2).

例 4 §1 中例 4 所讨论的二维环面, 也是可定向曲面. 实际上, 利用 §1 例 4 中指出的环面的参数方程, 容易把它的定向图册找出来.

我们不再停留在一些细节上, 下面我们将对足够简单的曲面, 给出另外的检查它们是否定向的更直观的方法, 用这种方法能够很容易地检查例 1—4 的曲面可定向与否.

如果在定义 1、2、3 上再补充下面的定义 4、5, 曲面定向概念的形式化描述就完成了.

如果把曲面的两个定向图册合并以后, 仍然得到这曲面的一个定向图册, 就认为这两个定向图册是等价的.

所说的这个关系, 的确是曲面定向图册间的等价关系.

定义 4 按上面所说的等价关系, 它将一个曲面的定向图册分成等价类, 叫做*曲面的定向图册类*, 或简称为*曲面的定向*.

定义 5 具有指定定向图册类的曲面 (亦即, 在曲面上有确定的定向) 叫做*定向曲面*.

这样, 给曲面定向, 就是用某种方法, 指出这个曲面的一个确定的定向图册类.

在特殊情形下, 我们已经知道.

命题 2　*在可定向连通曲面上, 恰有两个不同的定向.*

通常称这两个定向为*互逆的定向*.

命题 2 的证明, 请看第 15 章 §2 第 3 段.

如果可定向曲面是连通的, 那么, 为了给它定向, 只要指出该曲面的一个局部图, 或它的某一切平面中的一个定向标架. 这些方法, 在实践中有广泛的应用.

当曲面有若干连通分支时, 那么, 当然要在每个连通分支上, 都像上面那样指出局部图或标架.

在实践上, 还广泛运用下面的方法, 给已定向的空间中的曲面定向, 设在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内有指定的定向标架 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n, S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中可定向 $n-1$ 维曲面. 又设 TS_x 是 S 在点 $x\in S$ 处的 $n-1$ 维切平面, $\boldsymbol{n}$ 为与 TS_x 正交的向量, 即 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 在点 x 处的法向量. 如果对所给的向量 $\boldsymbol{n}$, 在 TS_x 中选定标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$, 使得标架 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$ 与 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=(\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{e}}_n)$ 属于空间 $\mathbb{R}^n$ 的同一定向类, 则容易看出, 平面 TS_x 上所有这种标架 $(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})$, 原本属于此平面的同一个定向类. 这就是说, 指定平面 TS_x 的定向类. 从而给连通可定向的曲面定向, 在这种情况下, 只要给定法向量 $\boldsymbol{n}$ 就能实现 (图 76).

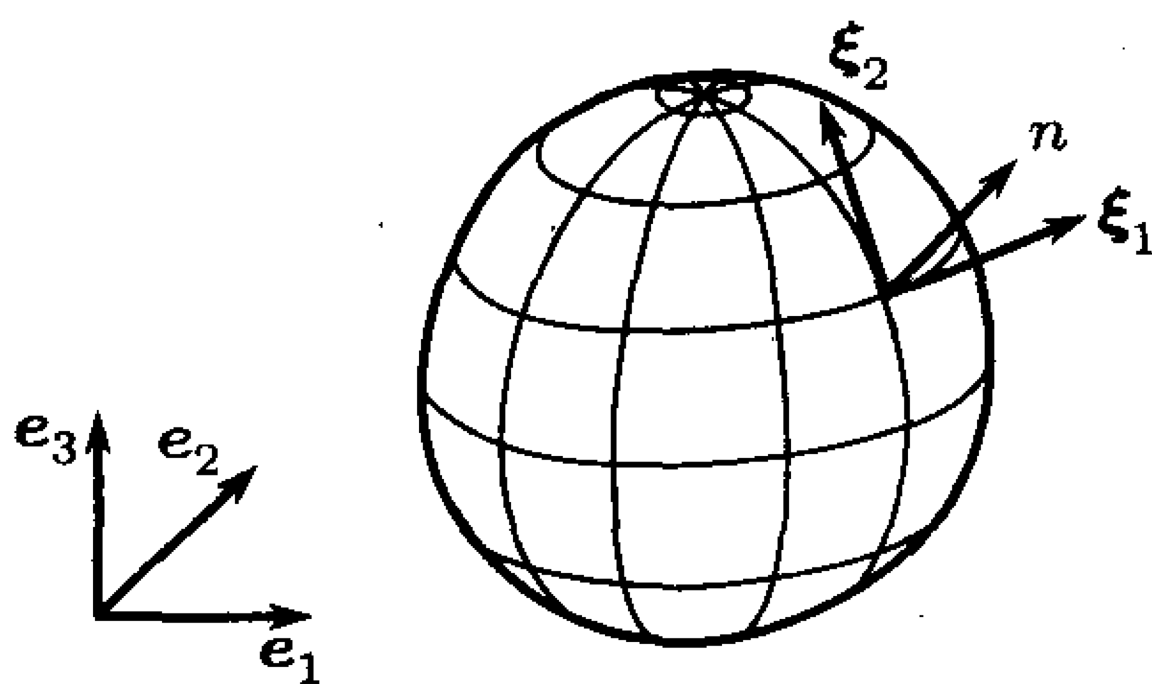


图 76

不难验证 (参看练习 4), 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中 $n-1$ 维曲面的可定向性, 等价于在曲面上存在非零连续法向量场.

由此显然能推得例 1—4 内所论及的球面与环面的可定向性以及默比乌斯带的不可定向性.

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的连通 $n-1$ 维曲面上, 如果存在 (单值) 连续单位法向量场, 就称此曲面为*双侧曲面*.

因此, 比如球面, 环面,$\mathbb{R}^3$ 内的平面都是双侧曲面. 默比乌斯带则不一样, 在这样的意义下, 它是*单侧曲面*.

现在做几个与这个概念在分析中的应用有关的注释, 以结束曲面定向概念的讨论.

在与 $\mathbb{R}^n$ 内的定向曲面有关的分析学的计算中, 通常首先是找出曲面 S 的某个局部参数化方程, 而暂时不管它的定向, 然后在曲面的某个切平面 TS_x 内, 构造一个由 (速度) 向量构成的标架 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}$, 这些向量与选定的曲线坐标系线相切, 亦即建立由这个坐标系导出的定向标架.

如果空间 $\mathbb{R}^n$ 已定向, 而 S 的定向是用法向量场定出的, 则取给定的场在点 x 处的向量 $\boldsymbol{n}$, 并将标架 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 与确定空间定向的标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 比较. 如果它们属于同一个定向类, 则按照上面的约定, 局部图就给出了所需要的曲面定向; 而当这两个标架定向类不一致时, 所取的图给出的曲面定向与法线 $\boldsymbol{n}$ 给出的相反.

显然, 当 $n-1$ 维曲面存在某个局部图时, 只是需简单地调换一下坐标的次序, 就能得到所需定向的局部图 (这里的定向, 是由定向空间 $\mathbb{R}^n$ 中的双侧超曲面上指定的确定法向量 $\boldsymbol{n}$ 预先给出的).

在一维的情形, 曲面就成为曲线. 我们常常用曲线在某点的切向量, 来规定曲线的定向. 这时, 我们常常不说 "曲线的定向", 而说 "*沿曲线运动的方向*".

如果在平面 $\mathbb{R}^2$ 上取它的一个定向标架, 并且给定一条闭曲线, 设此曲线界定的区域为 D, $\boldsymbol{n}$ 为曲线的外法向量 (对 D 来说), $\boldsymbol{v}$ 是环绕速度向量, 则认为当标架 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 的定向标架同类时, 曲线绕 D 的方向为*正方向*.

这是说, 例如, 在平面上惯用的 (右手) 标架下, 对于曲线限定的区域来说, "反时针" 运动是正环绕方向, 当沿曲线正环绕方向运动时, 曲线所限定的区域始终位于 "左侧".

鉴于此, 对平面或平面区域的定向, 经常不用 $\mathbb{R}^2$ 中的标架, 而用环绕某个闭曲线 (通常用圆周) 的运动正方向来给出.

给定这样一个方向, 实质上就是指出了从标架的第一个向量最简捷地旋转到第二个向量的旋转方向, 这等价于在平面上给定了定向标架类.

练 习

1. 在 §1 的问题 4 的 c) 中指出的球面的图册, 是不是这个球面的定向图册?

2. a) 应用 §1 例 4, 给出二维环面的定向图册.

b) 证明, 默比乌斯带没有定向图册.

c) 证明在微分同胚 $f: D \to \widetilde{D}$ 下, 有向曲面 $S \subset D$, 变为有向曲面 $\widetilde{S} \subset \widetilde{D}$.

3. a) 验证, 属于区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 的同一定向类的曲线坐标系在 G 内产生的连续标架场, 在每一点 $x \in G$ 分别给出的标架, 是空间 TG_x 的同一定向类中的标架.

b) 试证, 在连通域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 内, 连续标架场恰好分成两个定向类.

c) 以球面为例证明, 即使在光滑曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上不存在连续切空间标架场, 光滑曲面 S 仍可能是可定向的.

d) 试证, 在连通的可定向曲面上, 恰好能给出两种不同的定向.

4. a) 在空间 $\mathbb{R}^n$ 内指定一个子空间 $\mathbb{R}^{n-1}$, 取向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$, 及子空间 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的两个标架 $(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}), (\tilde{\boldsymbol{\xi}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{n-1})$. 验证: 这两个标架属于空间 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的同一个定向类, 当且仅当 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}), (\boldsymbol{v}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{n-1})$ 给出空间 $\mathbb{R}^n$ 的同一个定向.

b) 试证, 光滑超曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 可定向, 当且仅当在 S 上存在 S 的连续单位法向量场. 特别地, 由此产生双侧曲面的定向.

c) 试证, 若 $\mathrm{grad}F \neq 0$, 则由方程 $F(x^1,\cdots,x^n)=0$ 给出的曲面是定向曲面 (假定方程有解).

d) 将上面结果推广到由方程组给出的曲面的情形.

e) 阐明为什么在 $\mathbb{R}^3$ 中不是每个二维光滑曲面都能用方程 $F(x,y,z)=0$ 给出, 这里 F 是没有临界点 (亦即满足条件 $\mathrm{grad}F \neq 0$) 的光滑函数.

§3 曲面的边界及其定向

1. 带边曲面

设 $\mathbb{R}^k$ 是 k 维欧氏空间, $t^1,\cdots,t^k$ 是它的笛卡儿坐标. 考察空间 $\mathbb{R}^k$ 的半空间 $H^k := \{t\in\mathbb{R}^k | t^1 \leqslant 0\}$. 称超平面 $\partial H^k := \{t\in\mathbb{R}^k | t^1 = 0\}$ 为半空间 H^k 的*边界*.

请注意, 集 $\overset{\circ}{H}{}^k := H^k \setminus \partial H^k$, 即 H^k 的开的部分, 是最简单的 k 维曲面. 半空间 H^k 本身, 由于在 H^k 中含有边界 ∂H^k 的点, 从而形式上不符合曲面的定义. 集合 H^k 是带边曲面的一个样本. 我们现在来刻画带边曲面.

定义 1 若集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 的每个点 $x\in S$, 有一个在 S 中的邻域 U, 它或者与 $\mathbb{R}^k$ 同胚, 或者与 H^k 同胚, 就说 S 是一个 (k 维) *带边曲面*.

定义 2 如果在定义 1 所说的同胚 $\varphi: U\to H^k$ 之下, 点 $x\in U$ 对应于边界 ∂H^k 的点, 就说 x 为 (带边) 曲面 S 及其邻域 U 的*边界点*. 所有边界点构成的集叫做*曲面 S 的边界*.

通常用 ∂S 表曲面 S 的边界.

我们注意. 区域 $G_i\subset\mathbb{R}^k$ 到区域 $G_j\subset\mathbb{R}^k$ 上的同胚映射 $\varphi_{ij}: G_i\to G_j$, 把区域 G_i 的内点变成像集 $\varphi_{ij}(G_i)$ 的内点 (这是布劳威尔 (Brouwer) 定理), 因此, 曲面的边界点概念与局部图的选择无关, 即定义合理.

定义 1 形式上包含了 §1 定义 1 所描述的曲面的情况. 将这些定义加以对照即可看到, 如果在 S 上没有边界点, 则我们就回到了曲面原来的定义, 现在就能把它看成是无边曲面的定义了. 因此, 请注意,"带边曲面" 这个词通常只是当边界点集不空时才用.

($C^{(m)}$ 类) 带边光滑曲面 S 的概念, 像无边曲面那样, 要求 S 所具有的图册里的图, 有给定的光滑度. 这里, 我们指的是, 对于形如 $\varphi: H^k\to U$ 的图, φ 在边界 ∂H^k 上点的偏导数只在映射 φ 的定义域 H^k 上计算, 即有时这是单边导数, 而映射 φ 的雅可比在 H^k 上处处不为零.

因为 $\mathbb{R}^k$ 能够用 $C^{(\infty)}$ 类微分同胚映成方体 $I^k=\{t\in\mathbb{R}^k \mid |t^i|<1, i=1,\cdots,k\}$, 同时, H^k 映成方体 I^k 的加上补充条件 $t^1\leqslant 0$ 那一部分 I^k_H. 所以, 在带边曲面的定

义 (甚至在定义它的光滑性的情况), 显然可把 $\mathbb{R}^k$ 换成 I^k, 而 H^k 换成 I^k_H 或并上了一个界面

$$I^{k-1} := \{t \in \mathbb{R}^k | t^1 = 1, |t^i| < 1, i = 2, \cdots, k\}$$

的方体 $\widetilde{I}^k$, 这个界面显然是一个维数小了 1 的一个方体.

考虑到曲面的标准局部图的选法本来就有的这种随意性, 将定义 1、2 与 §1 中的定义 1 加以比较, 就可看到以下命题是正确的.

命题 1 k 维 $C^{(m)}$ 类曲面的边界本身是具同样光滑性且维数比原带边曲面维数小 1 的无边曲面.

◀ 实际上, 设带边曲面 S 有图册

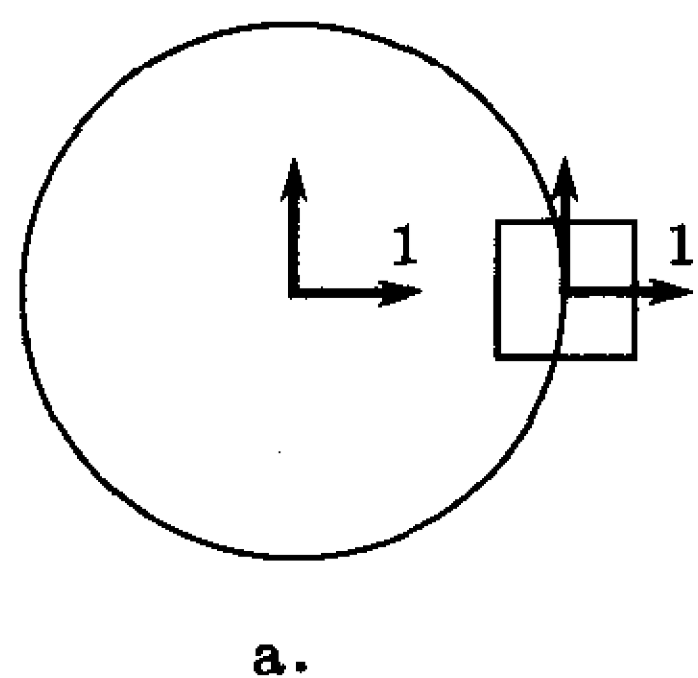
$$A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\},$$

则 $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$ 显然是边界 ∂S 的同类光滑的图册. ▶

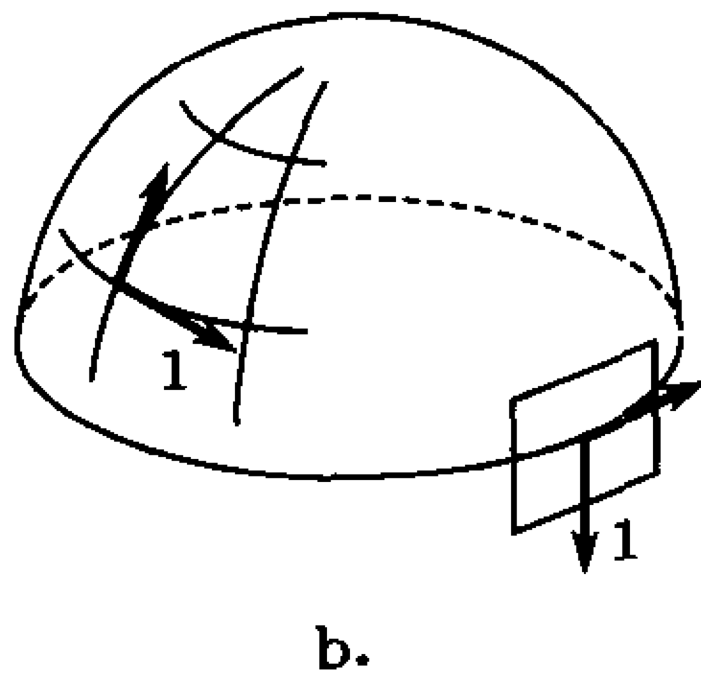
下面给出几个带边曲面的简单例子.

例 1 $\mathbb{R}^n$ 内的 n 维闭球 $\overline{B}^n$ 是 n 维带边曲面. 它的边界 $\partial\overline{B}^n$ 是 $n-1$ 维球面 (参看图 76 及图 77a). 仿照着二维情况, 常把球 $\overline{B}^n$ 叫做n **维盘**, 它可以同胚地变成半个 n 维球面, 其边界是 $n-1$ 维赤道球面 (图 77b).

例 2 $\mathbb{R}^n$ 内的闭方体 $\overline{I}^n$, 可用中心射影把它同胚地映成闭球 $\overline{B}^n$. 因此 $\overline{I}^n$ 与 $\overline{B}^n$ 一样, 也是一个 n 维带边曲面, 它的边由方体的诸面组成 (图 78). 我们注意到, 这些面的交是方体的棱, 所以方体到球的任何映射, 显然不可能是正则 (即 n 阶光滑) 的.



a.



b.

图 77

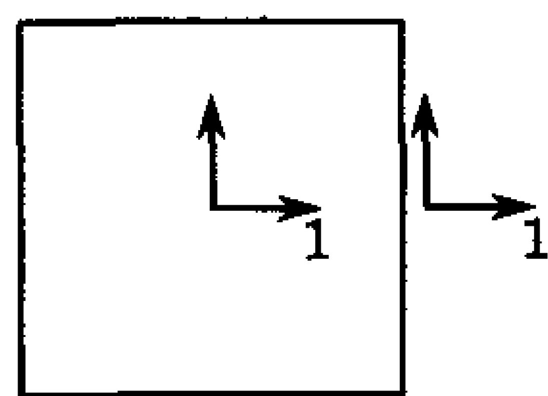


图 78

例 3 如果默比乌斯带是按 §1 的例 5 所述, 将闭矩形的一对对边反方向粘接成的, 那么, 它是 $\mathbb{R}^3$ 内的带边曲面, 且它的边同胚于 ($\mathbb{R}^3$ 中的闭) 圆周.

按另一种方法粘接对边, 能得到柱面, 它的边界由两个圆周组成. 此曲面同胚于普通的平面环 (参看 §1 例 5 的图 71).

在图 79a, b; 80a, b; 81a, b 上绘出了我们今后将会用到的 $\mathbb{R}^2$ 及 $\mathbb{R}^3$ 内的几个两两同胚的曲面. 可以看出, 即使曲面本身连通, 其边界也可能是不连通的.

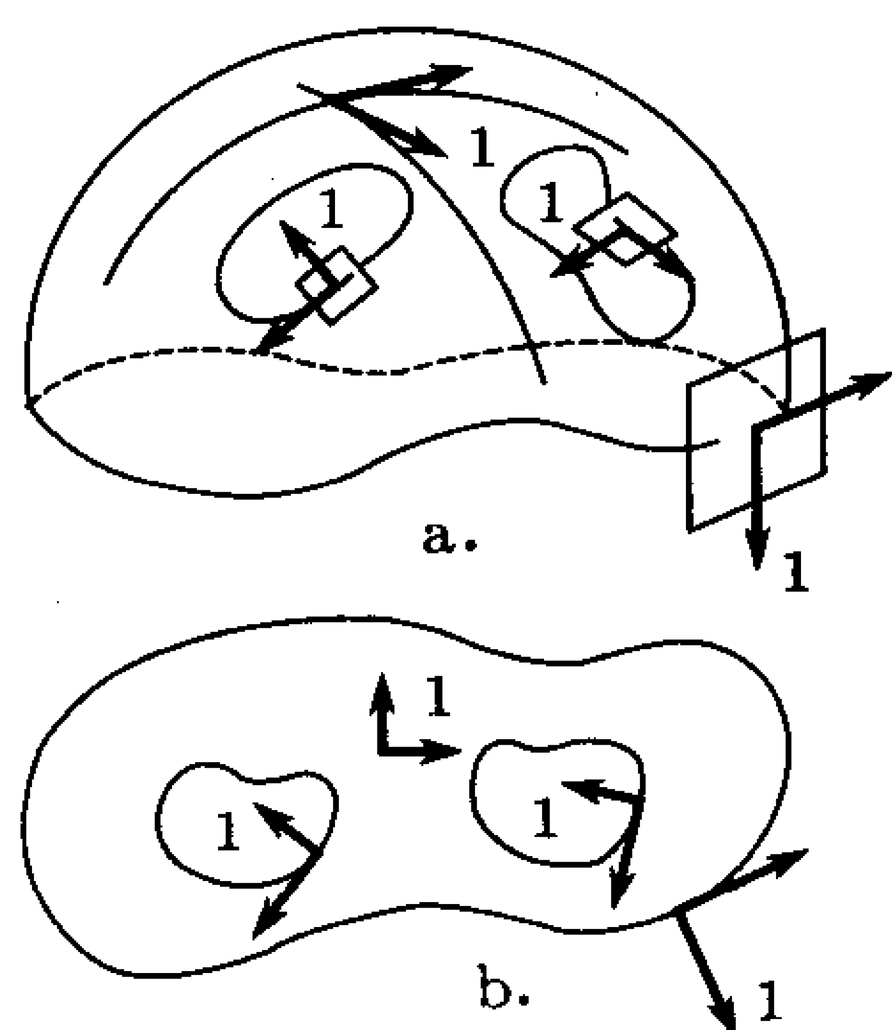


图 79

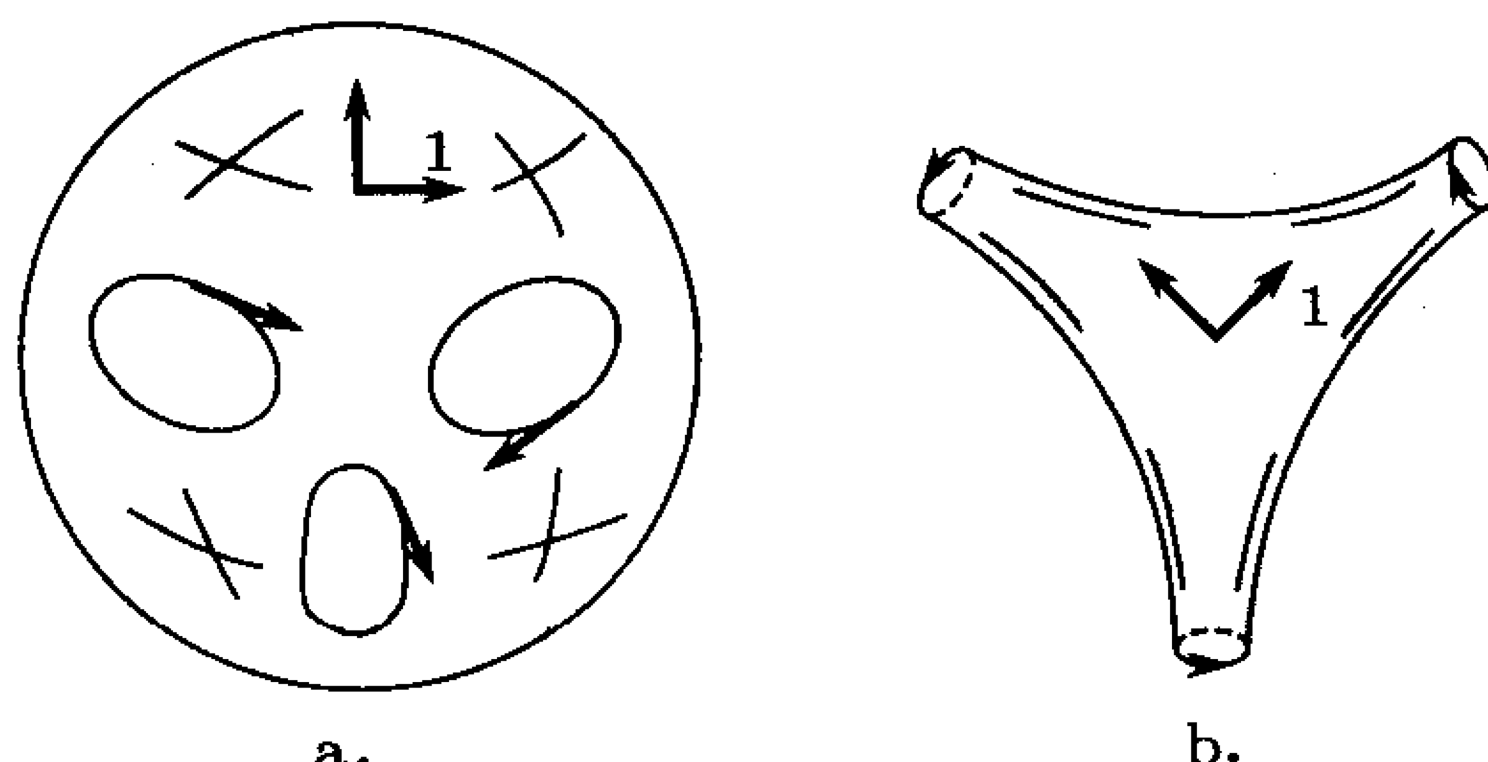


图 80

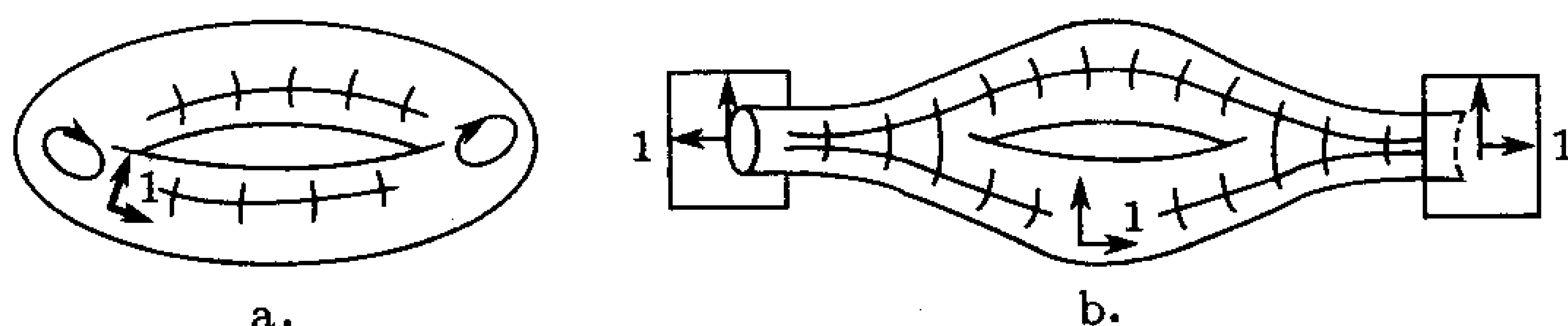


图 81

2. 曲面定向与边界定向的和谐性

设在欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 内固定一个正交的定向标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$, 它在 $\mathbb{R}^k$ 内诱导出笛卡儿坐标 $x^1, \cdots, x^k$ 于是半空间 $H^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x^1 \leqslant 0\}$ 的边界 $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}$ 就用向量 $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 给出一种定向, 我们称这种定向与给定的半空间 H^k 的定向标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 是和谐的.

在 $k = 1$ 从而 $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1} = \mathbb{R}^0$ 是点的情况, 应当特别约定如何给它定向. 我们规定这时采用添加 + 号或 − 号的方法, 在 $\partial H^1 = \mathbb{R}^0$ 的情况, 取 $(\mathbb{R}^0, +)$, 或简记作 $+\mathbb{R}^0$, 表示 H^1 的定向边界.

现在, 我们希望在一般情形下给出曲面的定向与其边界定向的和谐性的定义. 这对于下面讲的有关曲面积分的实际计算是非常重要的.

首先证明下面的命题.

命题 2　*光滑可定向曲面 S 的边界 ∂S, 仍是光滑可定向曲面 (但可能不连通).*

◀ 由命题 1, 只要再判定 ∂S 的可定向性即可. 我们来证明, 如果 $A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ 是带边曲面 S 的定向图册, 那么边界的图册 $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$ 也是由两两相容的图组成的. 为此, 显然只需验证, 如果

$\tilde{t}=\psi(t)$ 是 $U_{H^k}(t_0)$ 到 $\widetilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ 的微分同胚且有正的雅可比, $U_{H^k}(t_0)$ 是 $t_0\in\partial H^k$ 在 H^k 内的邻域, $\widetilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ 是点 $\tilde{t}_0\in\partial H^k$ 在 H^k 内的邻域, 则从 $U_{\partial H^k}(t_0)=\partial U_{H^k}(t_0)$ 到 $\widetilde{U}_{\partial H^k}(\tilde{t}_0)=\partial\widetilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ 上的映射 $\psi|_{\partial U_{H^k}(t_0)}$ 也具有正的雅可比. 这里 $U_{\partial H^k}(t_0)$ 是 t_0 在 ∂H^k 内的邻域, $\widetilde{U}_{\partial H^k}(\tilde{t}_0)$ 是 $\tilde{t}_0=\psi(t_0)$ 在 ∂H^k 内的邻域.

注意, 在任意点 $t_0=(0,t_0^2,\cdots,t_0^k)\in\partial H^k$ 处, 映射 ψ 的雅可比 J 为

$$J(t_0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi^1}{\partial t^1} & 0 & \cdots & 0\\ \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^1} & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^1} & \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^k}\end{vmatrix}=\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^2}{\partial t^k}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi^k}{\partial t^k}\end{vmatrix},$$

因为当 $t^1=0$ 时, 应有 $\tilde{t}^1=\psi^1(0,t^2,\cdots,t^k)\equiv 0$ (边界点在微分同胚下变为边界点). 还应注意, 当 $t^1<0$ 时, 也应有 $\tilde{t}^1=\psi^1(t^1,t^2,\cdots,t^k)<0$ (因为 $\tilde{t}=\psi(t)\in H^k$), 因此 $\dfrac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0,t^2,\cdots,t^k)$ 的值不能是负的. 据条件 $J(t_0)>0$, 既然有 $\dfrac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0,t^2,\cdots,t^k)\geqslant 0$, 则由上面的行列式等式推知, 映射 $\psi|_{\partial U_{H^k}}=\psi(0,t^2,\cdots,t^k)$ 的雅可比是正的. ▶

我们指出, 在命题 2 和以下的定义 3 中, 一维曲面情形 $(k=1)$, 应根据本段开头对这种情况所作的约定, 预先给予特别的说明.

定义 3 若 $A(S)=\{(H^k,\varphi_i,U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^k,\varphi_j,U_j)\}$ 为带边 ∂S 的曲面 S 的标准局部图定向图册, 则 $A(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\varphi_i|_{\partial H^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}$ 为边界的定向图册. 用它给出的边界的定向, 叫做*与曲面定向和谐的边界定向*.

作为用曲面的定向确定其边界定向这一段讨论的结尾, 我们做两个有用的注.

注 1 上面已经指出, 实用中常常用切向量标架给出 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面的定向, 在这种情况下, 常用以下方式检验曲面定向与其边界定向的和谐性: 设 S 是光滑曲面, x_0 为边界 ∂S 上一点. 取 S 的 k 维切平面 TS_{x_0}. 因为在点 x_0 附近, 曲面 S 的局部结构与半空间 H^k 在 $O\in\partial H^k$ 点附近的局部结构一样, 所以, 把 ∂S 的指向 S 在 TS_{x_0} 的局部射影外侧的法向量取做 S 的定向标架 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 的第一个向量后, 就得到在 x_0 点切于 ∂S 的 $k-1$ 维平面 $T\partial S_{x_0}$ 的标架 $\xi_2,\cdots,\xi_k$, 它给出了 $T\partial S_{x_0}$ 的, 从而 ∂S 的定向. 这个定向与曲面 S 的给定定向标架是和谐的.

在图 77—80 中, 以简单例子说明了曲面与其边界和谐定向的方法与结果.

我们指出, 这样一个操作方法的前提是能把在 S 上给出的定向标架移到曲面及其边界的每点去, 而曲面的边界, 从例子已经看到, 可能不连通.

注 2 在定向空间 $\mathbb{R}^k$ 内, 考察半空间 $H_-^k=H^k=\{x\in\mathbb{R}^k|x^1\leqslant 0\}$ 及 $H_+^k=\{x\in\mathbb{R}^k|x^1\geqslant 0\}$. 它们的定向都由 $\mathbb{R}^k$ 的定向导出. 超平面 $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^k|x^1=0\}$ 是

H_-^k 与 H_+^k 的公共边界. 易见, 超平面 Γ 分别与 H_+^k 和 H_-^k 的定向和谐的两个定向正好相反. 这也适合于 $k=1$ 的情形, 此时, 这是假设条件.

与此类似, 如果定向 k 维曲面被某个 $k-1$ 维曲面分开 (例如球被赤道分开), 则在所说的 $k-1$ 维界面上产生了两个相反的定向, 它们是被原曲面分成的两部分的定向诱导出来的.

这些事实, 在曲面积分论中经常要用到.

此外, 它们还可以下面方式用来确定分片光滑曲面之定向.

定义 4 (分片光滑曲面的归纳定义) 我们约定把点看作是具有任意光滑性的**零维曲面**.

若在 $\mathbb{R}^n$ 内的一维曲面 (即曲线) 上, 去掉有限个或可数个零维曲面 (点) 后, 它就分解为若干个一维光滑曲面 (曲线) , 就说原来那个曲线是**分片光滑一维曲面** (分段光滑曲线).

设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是 k 维曲面, 如果从 S 上去掉有限个或可列个维数不超过 $k-1$ 的分片光滑曲面后, 就能把它分解为若干个 k 维光滑曲面 S_i (带边或不带边), 就称 S 为**分片光滑 k 维曲面**.

例 4 平面上角和正方形的边界都是分段光滑曲线.

在 $\mathbb{R}^3$ 内, 立方体的边界和直圆锥的边界, 都是二维分片光滑曲面.

现在来讨论分片光滑曲面的定向问题.

对于点 (零维曲面), 给它标上 $+,-$ 号来给它定向. 特别是线段 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 的边界, 由 a,b 二点组成. 如果线段 $[a,b]$ 是从 a 到 b 定向, 那么, 线段端点的和谐定向就是: $(a,-),(b,+)$ 或用它们另外的记号, 就是 $-a,+b$.

现在考察 k 维 $(k>0)$ 分片光滑曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$.

设 S 是定义 4 意义下的分片光滑的 k 维曲面, S_{i_1} 和 S_{i_2} 是它的两个已被定向的光滑曲面, 且它们沿 $k-1$ 维光滑曲面块 (棱) Γ 彼此衔接. 这时, 如同光滑曲面的边界, 在 Γ 上产生了分别与 S_{i_1}, S_{i_2} 的定向和谐的两个定向. 如果在任何这样的棱 $\Gamma \subset \overline{S}_{i_1} \cap \overline{S}_{i_2}$ 上, 这两个定向都是反向的. 就认为 S_{i_1} 与 S_{i_2} 的定向是**和谐的**; 如果 $\overline{S}_{i_1} \cap \overline{S}_{i_2}$ 是空集或维数小于 $k-1$, 就认为 S_{i_1} 与 S_{i_2} 的任何定向都和谐.

定义 5 称分片光滑 k 维 $(k>0)$ 曲面是可定向的, 假如不计有限多个或可数个维数不超过 $k-1$ 的分片光滑曲面, 它是一些光滑且能和谐定向的定向曲面 S_i 的并.

例 5 容易验证. 三维方体的表面是分片光滑的可定向曲面. 一般说来, 例 4 内所举出的分片光滑曲面都是可定向的.

例 6　容易将默比乌斯带表示成两个可定向光滑曲面的并的形式, 它们沿部分边界相衔接. 然而, 这些曲面不能和谐地定向. 能够证明, 即使按定义 5 的观点, 默比乌斯带也不是定向曲面.

练　习

1. a) 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 为一曲面, $\overline{S}$ 是 S 在 $\mathbb{R}^n$ 内的闭包. 试问, 集 $\overline{S} \setminus S$ 是不是 S 的边界?

b) 曲面 $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x^2 + y^2 < 2\}, S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x^2 + y^2\}$ 是否有边界?

c) 求出曲面 $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x^2 + y^2 < 2\}, S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x^2 + y^2\}$ 的边界.

2. 举出一个这样的例子: 曲面不可定向, 但其边界可定向.

3. a) 立方体 $I^k = \{x \in \mathbb{R}^k | |x^i| < 1, i = 1, \cdots, k\}$ 的每个面对应平行于空间 $\mathbb{R}^k$ 的 $k-1$ 维坐标超平面. 所以能够把这个超平面的标架与坐标系看做是立方体的界面上的标架与坐标系. 请指出, 在哪些界面上, 这样得到的定向与用 $\mathbb{R}^k$ 的定向导出的方体 I^k 的定向和谐, 在哪些面上不和谐. 试依次研究 $k = 2, k = 3$ 及 $k = n$ 的情形.

b) 在半球面 $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z > 0\}$ 的某区域内, 使用局部图 $(t^1, t^2) \longmapsto (\sin t^1 \cos t^2, \sin t^1 \sin t^2, \cos t^1)$, 而在此半球面的边界 ∂S 的某区域内, 使用局部图 $t \longmapsto (\cos t, \sin t, 0)$. 试说明这些图给出的定向是否与曲面 S 的定向及边界 ∂S 的定向和谐.

c) 在半球面 S 及其边界 ∂S 上, 试建立由 b) 中的局部图导出的标架场.

d) 在半球面 S 的边界 ∂S 上, 给出一个标架, 使它确定的边界定向与在 c) 内得到的给半球面定向的标架和谐.

e) 借助 $S \subset \mathbb{R}^3$ 的法向量, 给出在 c) 内所得到的半球面的定向.

4. a) 验证, 即使照定义 3 的观点, 默比乌斯带也不是定向曲面.

b) 试证: 若 S 是 $\mathbb{R}^n$ 内的光滑曲面, 则无论按照光滑曲面定向的意义, 还是按照分片光滑曲面定向的意义, 二者是等价的.

5. a) 称集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是 k 维带边曲面, 如果对每点 $x \in S$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 内的邻域 $U(x)$, 及这个邻域到标准方体 $I^n \subset \mathbb{R}^n$ 上的微分同胚 $\psi : U(x) \to I^n$, 使 $\psi(S \cap U(x))$ 或与方体 $I^k = \{t \in I^n | t^{k+1} = \cdots = t^n = 0\}$ 重合, 或与它的一部分 $I^k \cap \{t \in \mathbb{R}^n | t^k \leqslant 0\}$ 重合, 这一部分实际是一个 k 维区间拼接了自己的一个界面.

以 §1 中讨论曲面概念时所讲的东西为出发点, 证明带边曲面的这一定义与定义 1 不等价.

b) 判定以下命题是否成立: 如果 $f \in C^{(l)}(H^k, \mathbb{R})$, 这里 $H^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x^1 \leqslant 0\}$, 那么, 对任何点 $x \in \partial H^k$, 存在它在 $\mathbb{R}^k$ 内的邻域 $U(x)$ 及函数 $F \in C^{(l)}(U(x), \mathbb{R})$, 使得 $F|_{H^k \cap U(x)} = f|_{H^k \cap U(x)}$.

c) 若用 a) 的定义去刻画带边光滑曲面, 亦即设 ψ 是有最大秩的光滑映射, 试问, 这样一个带边光滑曲面的定义, 是否与 §3 内采用的定义一致?

§4 欧氏空间内曲面的面积

现讨论欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维分片光滑曲面的面积的定义 $(n \geqslant k)$.

首先注意, 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^k$ 内的 k 个向量, 那么, 以这些向量为棱的平行多面体的体积 $V(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$ 可用矩阵 $J = (\xi_i^j)$ 的行列式计算:

$$V(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \det(\xi_i^j) \tag{1}$$

矩阵行由这些向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 在空间 $\mathbb{R}^k$ 的某个标准正交基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 下的坐标组成. 然而请注意, 公式 (1) 实际上不是简单地给出了平行多面体的体积, 而是给出了它的所谓有向体积. 如果 $V \neq 0$, 则用公式 (1) 确定的 V 值之正, 负, 分别对应于标架 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 属不属于空间 $\mathbb{R}^k$ 的相同的定向类.

现在指出, 矩阵 J 与其转置矩阵 J^* 之积 JJ^*, 不是别的, 正是给定的向量的两两内积 $g_{ij} = \langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \rangle$ 的矩阵 $G = \langle g_{ij} \rangle$, 即 G 是向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 的格拉姆 (Gram) 矩阵①. 因此,

$$\det G = \det(JJ^*) = \det J \cdot \det J^* = (\det J)^2. \tag{2}$$

这就是说, 非负体积值 $V(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$, 可以写成

$$V(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \sqrt{\det(\langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \rangle)}. \tag{3}$$

最后这个公式很方便, 因为其中本质上已经没有坐标, 而是一组刻画所考察的平行多面体的几何量. 特别地, 若把这些向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 看作是 n 维 $(n \geqslant k)$ 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的向量, 则以它们为棱的平行多面体的 k 维体积 (或 k 维面积) 的公式 (3) 保持不变.

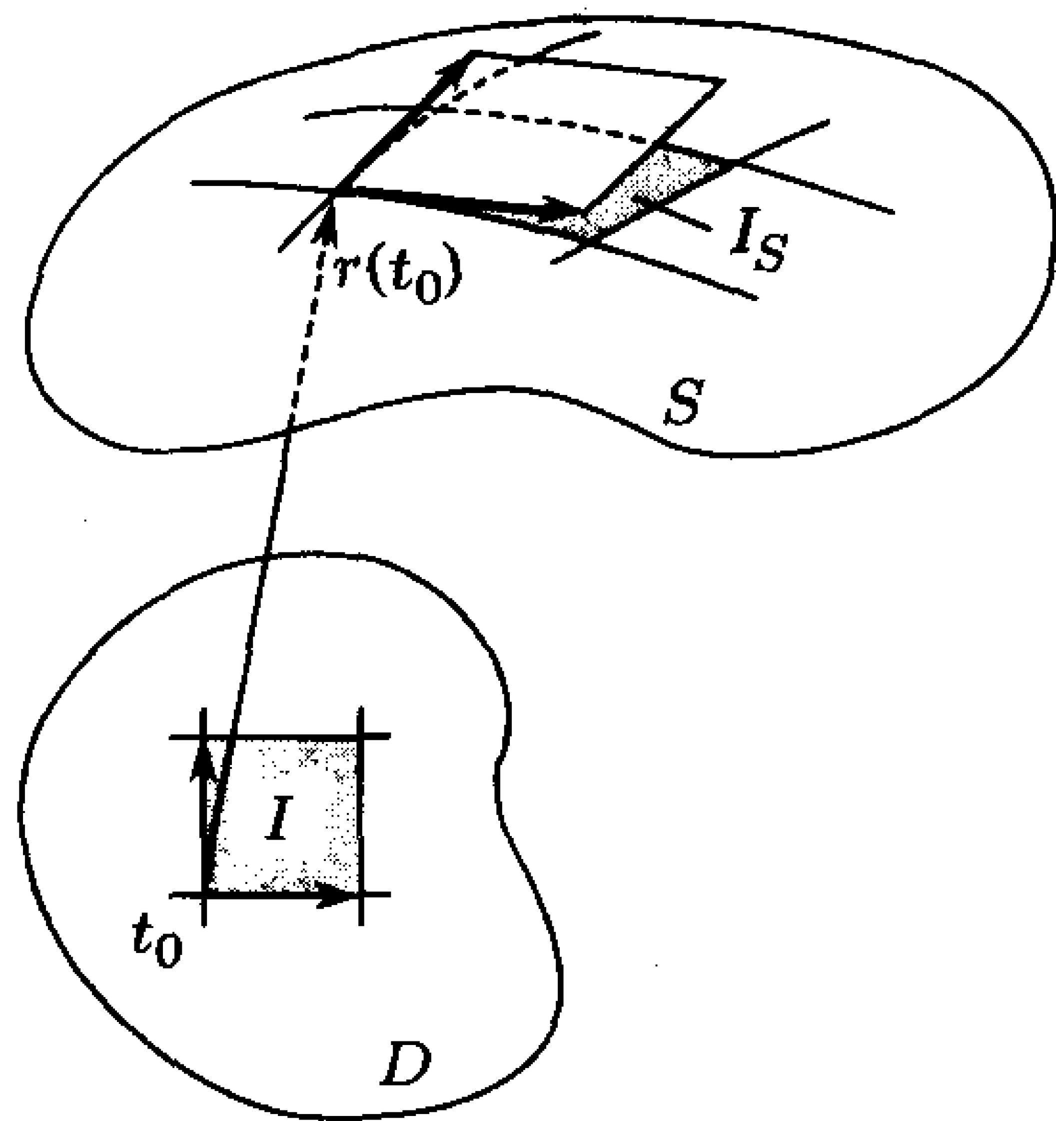


图 82

今设 $\boldsymbol{r}: D \to S \subset \mathbb{R}^n$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的 k 维光滑曲面 S, 它用参数形式 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t^1, \cdots, t^k)$, 即定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^k$ 上的光滑向量函数 $\boldsymbol{r}(t) = (x^1, \cdots, x^n)(t)$ 的形式给定. 设 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 内的正交标准基底, 它产生坐标系 $(t^1, \cdots, t^k)$. 固定一点 $t_0 = (t_0^1, \cdots, t_0^k) \in D$, 取一组充分小的正数 $h^1, \cdots, h^k$, 使以从 t_0 出发的向量 $h^i \boldsymbol{e}_i \in TD_{t_0}(i = 1, \cdots, k)$ 为棱的平行多面体 I 完全位于区域 D 内.

由于映射 $D \to S$ 将平行多面体 I 映成曲面 S 上的图形 I_S, 因而我们约定把 I_S 叫做*曲线平行体* (参看图 82, 这是 $k = 2, n = 3$ 的情况). 因为

$$\boldsymbol{r}(t_0^1, \cdots, t_0^{i-1}, t_0^i + h^i, t_0^{i+1}, \cdots, t_0^k) - \boldsymbol{r}(t_0^1, \cdots, t_0^{i-1}, t_0^i, t_0^{i+1}, \cdots, t_0^k) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^i}(t_0) h^i + o(h^i),$$

① 见第 18 章 §1.1.c. 的注释.

与点 $t \in D$ 从 t_0 移动向量 $h^i e_i$ 相应, 在 $\mathbb{R}^n$ 内的点从 $r(t_0)$ 所作的这个移动, 当 $h^i \to 0$ 时, 可以用偏微分 $\frac{\partial r}{\partial t^i}(t_0)h^i = \dot{r}_i h^i$ 代替, 而精确到 $o(h^i)$. 因此, 当 h^i 很小时, $i = 1, \cdots, k$, 曲线平行体 I_S 与以在点 $r(t_0)$ 切于曲面 S 的向量 $h^1\dot{r}_1, \cdots, h^k\dot{r}_k$ 为棱的平行多面体相差很小. 由此认为曲线平行体 I_S 的体积 ΔV 应该接近于所说的标准平行多面体的体积. 这样就得到近似公式

$$\Delta V \approx \sqrt{\det(g_{ij})(t_0)}\Delta t^1 \cdot \cdots \cdot \Delta t^k, \tag{4}$$

这里 $g_{ij}(t_0) = \langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle(t_0), \Delta t^i = h^i, i, j = 1, \cdots, k$.

如果将参数域 D 所在的整个空间 $\mathbb{R}^k$ 用标准方式分成直径为 d 的一些小平行体, 并取其中包含在 D 中的那些小平行体, 按照公式 (4) 计算它们的像的 k 维体积的近似值, 然后相加, 得到量

$$\sum_\alpha \sqrt{\det g_{ij}(t_\alpha)}\Delta t^1 \cdot \cdots \cdot \Delta t^k,$$

可以把它看做为所考察的曲面 S 的 k 维体积或 k 维面积的近似值, 并且随着 $d \to 0$ 时, 这一近似值变得更加精确.

于是, 我们采用

定义 1 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内, 用参数形式 $D \ni t \to r(t) \in S$ 给定的 k 维光滑曲面 S 的**面积** (或k **维体积**) 是

$$V_k(S) := \int_D \sqrt{\det(\langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle)(t)}dt^1 \cdots dt^k. \tag{5}$$

我们来看一下, (5) 式在我们熟知的特殊情况下有怎样的形式.

当 $k = 1$ 时, 区域 $D \subset \mathbb{R}^1$ 是以直线 $\mathbb{R}^1$ 上两点 $a, b (a < b)$ 为端点的区间, 这时 S 是 $\mathbb{R}^n$ 内的曲线. 所以当 $k = 1$ 时, 公式 (5) 变为计算曲线长度的公式

$$V_1(S) = \int_a^b |\dot{r}(t)|dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \cdots + (\dot{x}^n)^2(t)}dt.$$

若 $k = n$, 则 S 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ 内的 n 维区域 D. 在此情况下, 映射 $D \ni (t^1, \cdots, t^n) = t \longmapsto r(t) = (x^1, \cdots, x^n)(t) \in S$ 的雅可比矩阵 $J = x'(t)$ 是方阵. 现在, 利用关系式 (2) 及重积分中的变量替换公式, 可得

$$\begin{aligned} V_n(S) &= \int_D \sqrt{\det G(t)}dt = \int_D |\det x'(t)|dt \\ &= \int_S dx = V(S), \end{aligned}$$

亦即, 如所期望, 我们又得到了 $\mathbb{R}^n$ 内的区域 S 的体积.

注意, 当 $k=2,n=3$ 时, 即当 S 是 $\mathbb{R}^3$ 内的二维曲面时, 经常把 t^1,t^2 写成 u,v 并记 $\sigma:=V_2(S),E:=g_{11}=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_1\rangle,F:=g_{12}=g_{21}=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2\rangle,G:=g_{22}=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_2,\dot{\boldsymbol{r}}_2\rangle$. 这时, 公式 (5) 有形式

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

特别地, 若 $u=x,v=y$, 而曲面 S 是定义在区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的光滑实值函数 $z=f(x,y)$ 的图像, 则容易得到

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dxdy.$$

现在再回到定义 1, 并做一些对将来有用的注释:

注 1　定义 1 只在公式 (5) 中的积分存在时才是正确的. 例如, 当 D 是若尔当可测区域, 而 $\boldsymbol{r}\in C^{(1)}(\overline{D},\mathbb{R}^n)$ 时, 它是显然存在的.

注 2　若定义 1 中的曲面 S 能分成有限多个具有分片光滑边界的曲面 $S_1,\cdots,S_m$, 则与 S 的这个分解相对应, D 将分解成区域 $D_1,\cdots,D_m$. 如果曲面 S 在等式 (5) 的意义下有面积, 则对每个 $\alpha=1,\cdots,m$, 有值

$$V_k(S_\alpha)=\int_{D_\alpha}\sqrt{\det\langle\dot{\boldsymbol{r}}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_j\rangle(t)}dt.$$

根据积分的可加性, 由此得到

$$V_k(S)=\sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

于是, 我们确立了, k 维曲面的面积与普通重积分一样, 也是可加的.

注 3　如果必要, 上面的注 2 能推广到区域 D 的竭尽递增列, 也就是说, 可把公式 (5) 里的积分理解成反常积分.

注 4　更重要的是, 面积的可加性也使用于任意的 (不只限于用一张图给出的曲面)光滑, 甚至分片光滑的曲面的面积.

定义 2　设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 内的任意分片光滑 k 维曲面. 若从 S 上去掉有限个或可列个分片光滑的维数不超过 $k-1$ 的曲面后, 它被分割成有限个或可列个能光滑参数化的曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$, 则令

$$V_k(S):=\sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

重积分的可加性, 保证了这样定义的量 $V_k(S)$ 与把曲面 S 分解成 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 的分法无关, 其中每个 S_m 都包含在曲面 S 的某个局部图的有效域内.

还要注意, 由光滑曲面及分片光滑曲面的定义, 容易推知, 在定义 2 中如果还要求把 S 分成若干块参数化光滑曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 的分割是**局部有限分割**也是可以的. 最后这一点的意思是, 任何紧集 $K\subset S$, 只能与曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 中的有限多个有公共点. 更直观地说就是, 曲面 S 上的任何点, 必有只与 $S_1,\cdots,S_m,\cdots$ 中的有限个相交的邻域.

注 5 在公式 (5) 中出现了曲线坐标系 $t^1,\cdots,t^k$. 所以, 自然要验证用公式 (5) 定义的量 $V_k(S)$ (也就是定义 2 确定的量 $V_k(S)$), 关于变成在相应的新区域 $\widetilde{D}\subset\mathbb{R}^k$ 内变化的新曲线坐标 $(\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_k)$ 的微分同胚 $\widetilde{D}\ni(\tilde{t}^1,\cdots,\tilde{t}^k)=\tilde{t}\longmapsto t=(t^1,\cdots,t^k)\in D$ 是不变的.

◀ 为了验证它, 只需注意在区域 D 与 $\widetilde{D}$ 的对应点, 矩阵

$$G=(g_{ij})=\left(\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^i},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^j}\right\rangle\right)\quad 与\quad \widetilde{G}=(\tilde{g}_{ij})=\left(\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{t}^i},\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{t}^j}\right\rangle\right)$$

满足关系 $\widetilde{G}=J^*GJ$, 这里 $J=\left(\dfrac{\partial t^j}{\partial \tilde{t}^i}\right)$ 是变换 $\widetilde{D}\ni\tilde{t}\longmapsto t\in D$ 的雅可比矩阵, 而 J^* 是 J 的转置矩阵. 因此, $\det\widetilde{G}(\tilde{t})=\det G(t)\cdot(\det J)^2(t)$, 由此推出

$$\begin{aligned}\int_D\sqrt{\det G(t)}dt&=\int_{\widetilde{D}}\sqrt{\det G(t(\tilde{t}))}|J(\tilde{t})|dt\\&=\int_{\widetilde{D}}\sqrt{\det\widetilde{G}(\tilde{t})d\tilde{t}}.\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

这样, 定义 2 所叙述的 k 维分片光滑曲面的 k 维体积或面积是与坐标系选择无关的.

注 6 在作这个注之前先给出

定义 3 设集 E 位于 k 维分片光滑曲面 S 上. 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 能用有限个或可列个可能彼此相交的曲面 $S_1,\cdots,S_m,\cdots(S_\alpha\subset S)$ 覆盖 E, 使得 $\sum\limits_\alpha V_k(S_\alpha)<\varepsilon$, 就说 E 是**k 维零测度集**或**勒贝格零面积集**.

大家都知道, 这不过是逐字逐句地重复位于 $\mathbb{R}^k$ 内的零测度集的定义.

易见, 在分片光滑曲面 S 的任意局部图 $\varphi:D\to S$ 的参数域 D 内, 与 E 对应的是 k 维零测度集 $\varphi^{-1}(E)\subset D\subset\mathbb{R}^k$. 甚至还能证明, 这是零面积集的特征性质.

在实际计算面积以及计算下面引入的曲面积分时, 最好记住, 如果分片光滑曲面 $\widetilde{S}$ 是由分片光滑曲面 S 去掉一个零面积集得到的, 那么, 曲面 $\widetilde{S}$ 与曲面 S 面积一样.

这个注之所以有用, 是因为常能从分片光滑曲面中去掉一个零面积集, 使所得到的分片光滑曲面 $\widetilde{S}$ 只用一张图就能给出. 而这时 $\widetilde{S}$ 的面积, 亦即 S 的面积, 能直接用 (5) 式计算.

看几个例子.

例 1 映射 $]2\pi[\ni t \longmapsto (R\cos t, R\sin t) \in \mathbb{R}^2$ 是圆周 $S(x^2+y^2=\mathbb{R}^2)$ 去掉一个点 $E=(R,0)$ 所得到的圆弧的图. 因为 E 是 S 上的长度为零的集, 所以

$$V_1(S)=V_1(\widetilde{S})=\int_0^{2\pi}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}dt=2\pi R.$$

例 2 在 §1 例 4 中, 给出了 $\mathbb{R}^3$ 内的二维环面的参数表达式

$$\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)=((b+a\cos\psi)\cos\varphi,(b+a\cos\psi)\sin\varphi,a\sin\psi).$$

在区域 $D=\{(\varphi,\psi)|0<\varphi<2\pi,0<\psi<2\pi\}$ 中, 映射 $(\varphi,\psi)\longmapsto\boldsymbol{r}(\varphi,\psi)$ 是微分同胚. 区域 D 在这个微分同胚下的像 $\widetilde{S}$ 与环面 S 相差一个由坐标线 $\varphi=2\pi$ 及 $\psi=2\pi$ 组成的集合 E. 于是集 E 由一条经线和一条纬线组成, 从而易知其面积为零. 因此, 可在定义域 D 的范围内, 根据给出的参数表达式, 按公式 (5) 求环面的面积.

现在做一些必要的计算:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi&=(-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,(b+a\cos\psi)\cos\varphi,0)\\
\dot{\boldsymbol{r}}_\psi&=(-a\sin\psi\cos\varphi,-a\sin\psi\sin\varphi,a\cos\psi)\\
g_{11}&=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi,\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi\rangle=(b+a\cos\psi)^2,\\
g_{12}&=g_{21}=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi,\dot{\boldsymbol{r}}_\psi\rangle=0,\\
g_{22}&=\langle\dot{\boldsymbol{r}}_\psi,\dot{\boldsymbol{r}}_\psi\rangle=a^2,\\
\det G&=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}\\g_{21}&g_{22}\end{vmatrix}=a^2(b+a\cos\psi)^2.
\end{aligned}$$

因此,

$$V_2(S)=V_2(\widetilde{S})=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\psi)d\psi=4\pi^2ab.$$

最后提醒, 现在还可用定义 2 指示的方法计算分片光滑曲线的长度及分块光滑曲面的面积.

练 习

1. a) 设 P 与 $\widetilde{P}$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的两个超平面, D 是 P 的子域,$\widetilde{D}$ 是 D 在超平面 $\widetilde{P}$ 上的正交投影. 试证 D 与 $\widetilde{D}$ 的 $n-1$ 维面积之间有关系: $\sigma(\widetilde{D})=\sigma(D)\cos\alpha$, 这里 α 是超平面 P 与 $\widetilde{P}$ 之间的夹角.

b) 据 a) 的结果, 指出三维欧氏空间内光滑函数 $z = f(x,y)$ 的图像面积元公式 $d\sigma = \sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}dxdy$ 的几何意义.

c) 设 S 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的曲面, 它用光滑向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 表示, 其定义域为 $D \subset \mathbb{R}^2$, 则曲面面积公式为

$$\sigma(S) = \iint\limits_D |[\boldsymbol{r}_u', \boldsymbol{r}_v']| dudv,$$

其中 $[\boldsymbol{r}_u', \boldsymbol{r}_v']$ 是向量 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ 的向量积.

d) 设曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 由方程 $F(x,y,z) = 0$ 表示, 而曲面 S 的定义域 U 双方单值地正交投影于平面 (x,y) 的区域 D 上. 试证以下公式成立

$$\sigma(U) = \iint\limits_D \frac{|\mathrm{grad} F|}{|F_z'|} dxdy.$$

2. 试求球面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 上由两条经线和两条纬线构成的球面矩形的面积.

3. a) 设 (r, φ, h) 为 $\mathbb{R}^3$ 内的柱坐标. 将位于平面 $\varphi = \varphi_0$ 上, 由方程 $r = r(s)$ 给定的曲线, 绕 h 轴旋转, 这里 s 是自然参数. 试证, 相应于参变量 $s \in [s_1, s_2]$ 的那段曲线旋转所成的曲面的面积为

$$\sigma = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r(s) ds.$$

b) 设 $y = f(x)$ 是定义在线段 $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ 上的光滑非负函数. 将其图形绕 x 轴及绕 y 轴旋转. 试用在 $[a,b]$ 上的积分的形式表出这两种旋转曲面的面积公式.

4. a) 设半径为 1 的球的球心在一条长为 L 的平面闭曲线上滑动. 试证, 由此所得筒状体的侧面积为 $2\pi \cdot 1 \cdot L$.

b) 将半径为 a 的圆周, 绕着圆周所在平面中的轴旋转, 此轴距圆心的距离为 $b > a$, 试根据 a) 的结果求旋转所得二维环面的面积.

5. 在空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 按笛卡儿坐标给出螺旋面:

$$y - x\mathrm{tg}\frac{z}{h} = 0, |z| \leqslant \frac{\pi}{2}h.$$

试作出它的图形, 并求它的满足 $r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$ 的那一部分的面积.

6. a) 试证 $\mathbb{R}^n$ 内单位球面的面积 Ω_{n-1} 为 $2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$, 这里 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$ (特别地, 若 n 为偶数, 则 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) = \left(\dfrac{n-2}{2}\right)!$; 若 n 为奇数, 则 $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{(n-2)!!}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi}$).

b) 验证 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的球的体积 $V_n(r)$ 为 $\dfrac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)} r^n$, 并证 $\left.\dfrac{dV_n}{dr}\right|_{r=1} = \Omega_{n-1}$.

c) 求半球面 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \wedge x^n > 0\}$ 的面积与其在平面 $x^n = 0$ 上正交投影面积之比当 $n \to +\infty$ 时的极限.

d) 试证, 当 $n \to \infty$ 时,n 维球的体积的主要部分集中到球面的任意小的邻域中, 而球面面积集中到赤道的任意小的邻域中.

e) 试证, 从 d) 能导出的以下优美结果:

在高维球面上的连续正则函数在该球面上几乎取常值.

更具体地, 例如考察满足具确定常数的李普希兹条件的那些函数. 这时, 对于任何 $a > 0$ 和 $\delta > 0$, 存在 N 使当 $n > N$ 时, 任何一个这样的函数 $f : S^n \to \mathbb{R}$ 都有一个具以下性质的数 c : f 的值与 c 之差超过 ε 的那些 S^n 的点作成的集合的面积不超过整个球面面积乘以 δ.

7. a) 设 $x_1, \cdots, x_k$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内的一组向量 $(n \geqslant k)$. 试证这组向量的格拉姆行列式可表为

$$\det(\langle x_i, x_j \rangle) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P^2_{i_1 \cdots i_k}$$

这里,

$$P_{i_1 \cdots i_k} = \det \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_1^{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^{i_1} & \cdots & x_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

b) 阐明 a) 中的量 $P_{i_1 \cdots i_k}$ 的几何意义, 并将问题 a) 的结果叙述成 k 维测度的毕达哥拉斯定理, 其中 $1 \leqslant k \leqslant n$.

c) 说明公式

$$\sigma = \int_D \sqrt{\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \det{}^2 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^k} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial t^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial t^k} \end{pmatrix}} dt^1 \cdots dt^k.$$

是用参数式 $x = x(t^1, \cdots, t^k) (t \in D \subset \mathbb{R}^k)$ 表示的 k 维光滑曲面面积的公式.

8. a) 验证, 定义 2 中的 $V_k(S)$ 与将 S 分解为光滑块 $S_1, S_2, \cdots, S_m, \cdots$ 的分法无关.

b) 试证, 分片光滑曲面 S, 能够像定义 2 所描述的那样, 分成局部有限的光滑块 $S_1, \cdots, S_m, \cdots$.

c) 试证, 总能从光滑曲面 S 中去掉某个零面积集 E, 使得余下的光滑曲面 $\widetilde{S} = S \setminus E$ 能用一张标准局部图来刻画.

9. 与中学里对圆周长的定义类似, 也时常把曲线之长定义成曲线的内接折线长, 当折线的最大线段长趋于零时的极限 Γ. 施瓦兹 (Schwarz) 的下述简单例子说明, 即使曲面非常光滑, 用类似的内接多边形的面积取极限的办法去定义它的面积, 也可能导致悖谬.

在半径为 R, 高为 H 的柱中, 用下面的方式做内接多面形. 用水平平面将柱截成 m 个高为 $\dfrac{H}{m}$ 的相等的圆柱. 把 $m+1$ 个 (包括原圆柱面的上、下底在内) 截柱面的圆周各分成 n 等分, 使得每个圆周上的分点, 位于上面相邻圆周的弧段中点的下面. 取任意一个截圆上的一对相邻分点, 及位于连结这对点的弧的中点的正上方或正下方的点.

作出上面所说的三点构成的三角形, 所有这种三角形之全体, 构成一个多面面, 它内接于原柱面 (直圆柱的侧面) . 这个多面面的形状, 像是揉皱挤压成小手风琴状的靴子筒. 所以人们常把它叫做*施瓦兹靴筒*.

a) 试证, 当 m, n 趋于无穷, 但 n^2/m 趋于零时, 所做的多面面的面积将无限地增大, 虽然它的每个面 (三角形) 的面积同时趋于零.

b) 如果 m, n 趋于无穷, 但比值 m/n^2 趋于某个有限极限 p, 则多面面的面积趋于有限极限, 它与量 p 有关, 既可大于, 也可小于或 (当 $p=0$ 时) 等于原柱面的面积.

c) 将这里描述的引入光滑曲面面积的方法与 §4 中所说的加以比较, 说明为什么在一维情况下二者一致, 而在二维情况下, 一般地说, 二者不一致. 对内接多面面序列加上什么条件, 才能保证两种结果一致呢?

***10. 等周不等式**

设 $V(E)$ 表示集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的体积, 而 $A+B$ 是集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 的 (向量) 和 (闵可夫斯基意义下的和, 参看第 11 章 §2 的习题 4).

设 B 是半径为 h 的球. 这时, $A+B =: A_h$ 是集合 A 的 $h-$ 邻域.

称量

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(A_h) - V(A)}{h} =: \mu_+(\partial A)$$

为集合 A 的边界 ∂A 在闵可夫斯基意义下的外面积

a) 试证, 如果 ∂A 是光滑或充分正则的曲面, 则 $\mu_+(\partial A)$ 与 ∂A 的通常的面积一致.

b) 应用布鲁恩 — 闵可夫斯基不等式 (参看第 11 章 §2 第 4 题), 求 $\mathbb{R}^n$ 中经典的等周不等式

$$\mu_+(\partial A) \geqslant n v^{\frac{1}{n}} V^{\frac{n-1}{n}}(A) =: \mu(S_A),$$

这里, v 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, 而 $\mu(S_A)$ 是与集合 A 有相同体积的 ($n-1$ 维) 球的球面积.

等周不等式说的是: 体 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的边界面积 $\mu_+(\partial A)$ 不小于同体积的球的边界面积.

§5 微分形式初步

现在对微分形式这种有用的数学工具, 做初步的介绍, 这里主要注意它的算法, 其理论结构将在第 15 章中详细阐述.

1. 微分形式, 定义及例子

读者在代数教科书中已经掌握了线性形式的概念. 我们也已把它广泛应用于微分学的建立. 那里遇到的主要是对称形式. 而这里讲的将是斜对称 (反对称) 形式.

我们记得, 称定义在线性空间 X 的向量序组 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 上并在线性空间 Y 内取值的 k 次形式 $L: X^k \to Y$ 为*斜对称形式* (反对称形式), 如果将它任二变量调换位置时其值变号:

$$L(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_j, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = -L(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_j, \cdots, \boldsymbol{\xi}_i, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k), \quad i \neq j.$$

特别是, 当 $\boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_j (i \neq j)$ 时, 形式的值恒为零, 而与其余向量无关.

例 1 空间 $\mathbb{R}^3$ 内向量的向量积 $[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2]$ 是在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 内取值的双线性斜对称形式.

例 2 对于由空间 $\mathbb{R}^k$ 内以向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 为棱的平行多面体, 用 §4 之公式 (1) 确定的有向体积 $V(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$ 是 $\mathbb{R}^k$ 内的实值斜 $k-$形式.

下面, 我们暂时将只关心实值形式 ($Y = \mathbb{R}$ 的情形), 虽然以下全部叙述对更一般的情况, 例如 Y 是复数域 $\mathbb{C}$ 的情况也使用.

同次斜对称形式的线性组合仍然是斜对称形式, 亦即, 同次的斜对称形式构成线性空间.

此外, 在代数中引进了斜对称形式的外积运算 $\wedge$, 它使这种形式的序对 A^p, B^q(分别为 p 次与 q 次), 对应于 $p+q$ 次斜对称形式 $A^p \wedge B^q$. 这个运算具有

结合性:$(A^p \wedge B^q) \wedge C^r = A^p \wedge (B^q \wedge C^r)$,

分配性:$(A^p + B^p) \wedge C^q = A^p \wedge C^q + B^p \wedge C^q$,

反可换性:$A^p \wedge B^q = (-1)^{pq} B^q \wedge A^p$.

特别当 A, B 都是 1– 形式时, 则有反对称性 $A \wedge B = -B \wedge A$, 这与例 1 中的向量积的反对称性类似. 形式的外积是向量积的推广.

我们详细讨论外积的一般定义, 暂时把注意力集中到上面所列出的运算性质, 并指出 1– 形式 $L_1, \cdots, L_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 的外积 $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ 是一个 $k-$ 形式, 它在向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{R}^n$ 上的值为

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} L_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & L_k(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ L_1(\boldsymbol{\xi}_k) & \cdots & L_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix} = \det(L_j(\xi_i)) \tag{1}$$

如果把 (1) 式做为左边式子的定义, 则由行列式的性质容易推知, 当 A, B, C 都是 1– 形式时, 有 $A \wedge B = -B \wedge A, (A+B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$.

我们来讨论几个以后要用到的例子.

例 3 设 $\pi^i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i = 1, \cdots, n$ 是射影算子. 详细说就是, 线性函数 $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 在任意向量 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}^1, \cdots, \boldsymbol{\xi}^n) \in \mathbb{R}^n$ 上的值 $\pi^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$ 是这个向量在相应坐标轴上的射影. 这时, 根据公式 (1) 就得到

$$\pi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \pi^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}_1^{i_1} & \cdots & \boldsymbol{\xi}_1^{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_k^{i_1} & \cdots & \boldsymbol{\xi}_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

例 4 众所周知, 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(\xi_1^1,\xi_1^2,\xi_1^3),\boldsymbol{\xi}_2=(\xi_2^1,\xi_2^2,\xi_2^3)$ 的向量积的笛卡儿坐标, 由等式

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]=\left(\begin{vmatrix}\xi_1^2 & \xi_1^3\\ \xi_2^2 & \xi_2^3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_1^3 & \xi_1^1\\ \xi_2^3 & \xi_2^1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\xi_1^1 & \xi_1^2\\ \xi_2^1 & \xi_2^2\end{vmatrix}\right)$$

确定.

于是, 根据例 3 之结果, 可得

$$\pi^1([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2])=\pi^2\wedge\pi^3(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2),$$
$$\pi^2([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2])=\pi^3\wedge\pi^1(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2),$$
$$\pi^3([\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2])=\pi^1\wedge\pi^2(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2).$$

例 5 设 $f:D\to\mathbb{R}$ 是在某区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上定义, 且在点 $x_0\in D$ 处可微的函数. 大家都知道, 函数在该点的微分 $df(x_0)$ 是线性函数. 它定义在以此点为起点的位移向量 $\boldsymbol{\xi}$ 上, 精确地说, 它是定义在 D 在此点的切空间 TD_{x_0} 上的线性函数. 设 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内点的坐标, $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in TD_{x_0}$, 则

$$df(x_0)(\boldsymbol{\xi})=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=D_{\boldsymbol{\xi}}f(x_0).$$

特别地, 有 $dx^i(\boldsymbol{\xi})=\xi^i$, 或写得更正规些就是

$$dx^i(x_0)(\boldsymbol{\xi})=\xi^i.$$

如果 $f_1,\cdots,f_k$ 是定义在 G 上且在点 $x_0\in G$ 可微的实值函数, 则在点x_0, 根据公式 (1) 在点 x_0 在空间 TG_{x_0} 的向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k$ 上得到

$$df_1\wedge\cdots\wedge df_k(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\begin{vmatrix}df_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \cdots & df_k(\boldsymbol{\xi}_1)\\ \vdots & & \vdots\\ df_1(\boldsymbol{\xi}_k) & \cdots & df_k(\boldsymbol{\xi}_k)\end{vmatrix}. \tag{3}$$

特别地, 有

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\begin{vmatrix}\xi_1^{i_1} & \cdots & \xi_1^{i_k}\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_k^{i_1} & \cdots & \xi_k^{i_k}\end{vmatrix}. \tag{4}$$

于是, 由定义在线性空间 $TD_{x_0}\approx T\mathbb{R}^n_{x_0}\approx\mathbb{R}^n$ 上的线性形式 $df_1,\cdots,df_k$ 得到了定义在这同一个空间上的 k 次斜对称形式.

例 6 若 $f\in C^{(1)}(D,\mathbb{R}),D$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的区域, 则函数 f 在每点 $x\in D$ 处的微分 $df(x)$ 有定义. 由上面已知, $df(x)$ 是线性函数: $TD_x\to T\mathbb{R}_{f(x)}\approx\mathbb{R}$, 这里 TD_x 是 D

在点 x 处的切空间. 当 x 由 D 内某点变到另一点时, 一般地说, 形式 $df(x) = f'(x)$ 要改变. 因此, 光滑数值函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 在区域 D 的每点都产生一个线性形式, 或说在 D 内产生了一个线性*形式场*, 其中每点的线性形式定义在相应的切空间 TD_x 上.

定义 1　如果在每点 $x \in D$ 确定了一个斜对称形式 $\omega(x): (TD_x)^p \to \mathbb{R}$, 就说在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内给出了一个实值的*微分 $p-$ 形式* ω.

通常称 p 为微分 $p-$ 形式 ω 的次数或阶数. 因此, $p-$形式 ω 常常用 ω^p 表示.

这样, 例 6 中讨论的光滑函数 f 的微分场 df 是区域 D 内的 $1-$ 形式, 而 $\omega = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ 是 p 次微分形式的最简单的例子.

例 7　设在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内给定一个向量场, 即使每个点 $x \in D$ 联系一个向量 $\boldsymbol{F}(x)$. 当 $\mathbb{R}^n$ 具有欧氏结构时, 这个向量场就产生了 D 内的如下的微分 $1-$ 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$.

若 $\boldsymbol{\xi}$ 是位于点 $x \in D$ 处的向量, 即 $\boldsymbol{\xi} \in TD_x$, 则令

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x)(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{F}(x), \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

由内积的性质知道, 在每点 x 处, $\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot \rangle$ 实际是线性形式.

我们常常遇到这种微分形式. 例如, 若 $\boldsymbol{F}$ 是区域 D 内的连续力场, 而 $\boldsymbol{\xi}$ 是从点 $x \in D$ 出发的小位移向量, 则由物理学知道, 与这样的位移对应的场的元功正是由量 $\langle \boldsymbol{F}(x), \boldsymbol{\xi} \rangle$ 确定.

这样, 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的区域 D 内, 力场 $\boldsymbol{F}$ 自然产生 D 内的 $1-$ 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$, 在这种情况下, 自然把它叫做场*$\boldsymbol{F}$ 的功形式*.

注意, 在欧氏空间内, 区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内的光滑函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 的微分 df, 也可看成是由向量场产生的 $1-$ 形式, 这时的向量场 $\boldsymbol{F} = \mathrm{grad} f$. 实际上, 由 $\mathrm{grad} f(x)$ 的定义, 对于每个向量 $\boldsymbol{\xi} \in TD_x$, 等式 $df(x)(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathrm{grad} f(x), \boldsymbol{\xi} \rangle$ 成立.

例 8　在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 D 内给定的向量场 $\boldsymbol{V}$, 也可用以下的方式产生 $n-1$ 次微分形式 $\omega^{n-1}_{\boldsymbol{V}}$. 若在每点 $x \in D$ 处, 取与 x 对应的向量场中的向量 $\boldsymbol{V}(x)$ 及附在 x 处的 $n-1$ 个向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1} \in TD_x$, 那么以 $\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 为棱构成的平行多面体的有向体积, 由于它等于由这 n 个向量的坐标构成的矩阵的行列式, 显然是变元 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 的 $(n-1)-$ 形式.

当 $n=3$ 时, 形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 即是通常的向量混合积 $(\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, 当给定了其中的向量 $\boldsymbol{V}(x)$, 关于其余二变元, 得到斜对称 $2-$ 形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{V}, \cdot, \cdot)$.

例如, 设在区域 D 内有液体流动, $\boldsymbol{V}(x)$ 是在 x 处的流速向量, 则量 $(\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ 是在单位时间内, 流过以小向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in TD_x$ 为边的平行四边形的流体体积, 称之为*液体的元体积*. 选取不同的向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$, 我们就得到形状和空间位置互不相同, 而一个顶点是 x 的小平行四边形. 对于每个这样的小平行四边形, 一般来说, 将有形

式 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x)$ 的值 $(\boldsymbol{V}(x),\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$. 上面已指出, 它说明在单位时间内有多少液体流经给定的小面块, 这也就刻画出了通过所选取的这个小面元散发了或流过了多少液体. 基于这种原因, 常把 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$, 它的高维 $\omega_{\boldsymbol{V}}^{n-1}$ 也一样称为区域 D 内向量场 $\boldsymbol{V}$ 的流形式.

2. 微分形式的坐标记法

现在讨论斜对称代数形式及微分形式的坐标记法, 特别地, 还将证明, 任何微分 $k-$ 形式, 在某种意义下, 是形如 (4) 的一些标准微分形式的线性组合.

为了简化记法, 我们将 (像前面在类似的情况下做过的那样) 用上、下重复指标表示关于它们在所容许范围内求和.

设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 内的 $k-$ 线性形式. 如果在 $\mathbb{R}^n$ 内固定一组基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 则在这个基下, 每个向量 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$ 都有坐标表达式 $\boldsymbol{\xi}=\xi^i\boldsymbol{e}_i$, 而形式 L 的坐标记法为

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k) &= L(\xi_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\xi_k^{i_k}\boldsymbol{e}_{i_k})\\
&= L(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k})\xi_1^{i_1}\cdot\ \cdots\ \cdot\xi_k^{i_k}.
\end{aligned}\tag{5}
$$

如果已知 $a_{i_1\cdots i_k}=L(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k})$ 是在怎样的基底下得到的, 那么它们就完全刻画出了形式 L. 这些数关于它们的指标是对称的或者斜对称的, 显然, 当且仅当形式 L 具有同种对称性.

当 L 为斜对称形式时, 坐标表示 (5) 可有某种变通. 为了使得这种变通表现的更明显更自然, 我们先观察 L 为 $\mathbb{R}^3$ 中的 $2-$ 形式这种特殊情况下的 (5) 式. 这时, 对于向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\xi_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{\xi}_2=\xi_2^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}$, 其中 $i_1,i_2=1,2,3$, 得到

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2) &= L(\xi_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\xi_2^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}) = L(\boldsymbol{e}_{i_1}\boldsymbol{e}_{i_2})\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\\
&= L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1)\xi_1^1\xi_2^1 + L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\xi_1^1\xi_2^2 + L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)\xi_1^1\xi_2^3\\
&\quad + L(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1)\xi_1^2\xi_2^1 + L(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)\xi_1^2\xi_2^2\\
&\quad + L(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\xi_1^2\xi_2^3 + L(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1)\xi_1^3\xi_2^1\\
&\quad + L(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\xi_1^3\xi_2^2 + L(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)\xi_1^3\xi_2^3\\
&= L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)(\xi_1^1\xi_2^2-\xi_1^2\xi_2^1) + L(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)(\xi_1^1\xi_2^3-\xi_1^3\xi_2^1)\\
&\quad + L(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)(\xi_1^2\xi_2^3-\xi_1^3\xi_2^2)\\
&= \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3} L(\boldsymbol{e}_{i_1},\boldsymbol{e}_{i_2})\begin{vmatrix}\xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2}\\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

这里, 求和运算按指标 i_1,i_2 的所有可能的组合进行, 但指标要满足求和符号下的不等式.

类似地. 在一般情况下, 可得斜对称形式 L 的如下表示式:

$$L(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}L(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k})\begin{vmatrix}\xi_1^{i_1}&\cdots&\xi_1^{i_k}\\ \vdots&&\vdots\\ \xi_k^{i_1}&\cdots&\xi_k^{i_k}\end{vmatrix}. \tag{6}$$

这时, 根据公式 (2), 上面等式又可写成

$$L(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}L(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k})\pi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\pi^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)$$

的形式.

因此, 任何斜对称形式 L 都能表成形如 $\pi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\pi^{i_k}$ 的 $k-$ 形式的线性组合

$$L=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}\pi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\pi^{i_k}, \tag{7}$$

这些 $k-$ 形式 $\pi^{i_1}\wedge\cdots\wedge\pi^{i_k}$ 都是由 $\mathbb{R}^n$ 内的最简单的 $1-$ 形式 $\pi^1,\cdots,\pi^n$ 构成的外积.

今设在某区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上给出了微分 $k-$ 形式 ω 及某个曲线坐标系 $x^1,\cdots,x^n$. 在每个点 $x\in D$ 处, 固定空间 TD_x 的一个基底 $\boldsymbol{e}_1(x),\cdots,\boldsymbol{e}_n(x)$, 它们是单位坐标方向向量 (例如, 若 $x^1,\cdots,x^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的笛卡儿坐标, 则 $\boldsymbol{e}_1(x),\cdots,\boldsymbol{e}_n(x)$ 就是空间 $\mathbb{R}^n$ 的标架从坐标原点平行移到 x 处得到的). 这时, 在每点 $x\in D$ 处, 根据公式 (4) 及 (6) 得到

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\omega(\boldsymbol{e}_{i_1}(x),\cdots,\boldsymbol{e}_{i_k}(x))dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_k)$$

或

$$\omega(x)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}. \tag{8}$$

于是任何微分 $k-$ 形式是简单 $k-$ 形式 $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ 的线性组合, 而后者是由坐标的微分构成的. 其实, "微分形式" 的称谓正是由此得到的.

线性组合 (8) 的系数 $a_{i_1\cdots i_k}(x)$, 一般说与点 x 有关, 亦即它们是一些函数, 这些函数的定义域就是给定形式 ω_k 的区域.

特别地, 我们早已知道微分分解式

$$df(x)=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x)dx^n, \tag{9}$$

而由等式

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{F}(x),\boldsymbol{\xi}\rangle&=\langle F^{i_1}(x)\boldsymbol{e}_{i_1}(x),\xi^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}(x)\rangle\\&=\langle\boldsymbol{e}_{i_1}(x),\boldsymbol{e}_{i_2}(x)\rangle F^{i_1}(x)\xi^{i_2}=g_{i_1i_2}(x)F^{i_1}(x)\xi^{i_2}\\&=g_{i_1i_2}(x)F^{i_1}(x)dx^{i_2}(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

看到, 分解式

$$\omega_F^1(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot \rangle = (g_{i_1 i}(x) F^{i_1}(x)) dx^i = a_i(x) dx^i \tag{10}$$

也成立, 它在笛卡儿坐标系内显得特别简单:

$$\omega_F^1(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{n} F^i(x) dx^i \tag{11}$$

再者, 在 $\mathbb{R}^3$ 内有等式

$$\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{vmatrix} V^1(x) & V^2(x) & V^3(x) \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix}$$

$$= V^1(x) \begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix} + V^2(x) \begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_1^1 \\ \xi_2^3 & \xi_2^1 \end{vmatrix} + V^3(x) \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix},$$

由此推知,

$$\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x) = V^1(x) dx^2 \wedge dx^3 + V^2(x) dx^3 \wedge dx^1 + V^3(x) dx^1 \wedge dx^2 \tag{12}$$

类似地, 将 n 阶行列式按行展开, 就得到 $\omega_{\boldsymbol{V}}^{n-1}$ 的如下的展开式:

$$\omega_{\boldsymbol{V}}^{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} V^i(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n, \tag{13}$$

这里, 微分上的记号 $\frown$, 表示在这一项中应把该微分舍去.

3. 外微分形式

到现在为止, 对微分形式的讨论, 实质上还只是在它的定义域的每个点上, 单个地进行的, 从而有纯代数特征. 微分形式在分析里特有的运算, 是它们的 (外) 微分运算.

我们今后将约定, 把在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内定义的函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 看做是 D 内的零次微分形式.

定义 2 设 f 是可微函数, 则称它的普通微分 df 为 $0-$形式 f 的 (外) 微分.

若在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内给出的微分 $p-$ 形式 $(p \geqslant 1)$

$$\omega(x) = a_{i_1 \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

的系数 $a_{i_1 \cdots i_p}(x)$ 可微, 则它的 (外) 微分形式定义作

$$d\omega(x) := da_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

利用函数微分的分解式 (9) 借助从 (1) 式得出的 1– 形式的外积的分配性, 就推得

$$
\begin{aligned}
d\omega(x) &= \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}}{\partial x^i}(x)dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \alpha_{i_{i_1}\cdots i_p}(x)dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},
\end{aligned}
$$

因此, p– 形式 $(p \geqslant 0)$ 的外微分是 $p+1$ 次形式.

我们将发现, 现在也能理解上面给出的区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内微分 p– 形式的定义 1 过分一般化了, 因为对应区域 D 的各点的形式 $\omega(x)$, 彼此一点关系也没有. 实际上在分析中用到的形式, 其坐标表达式中的系数 $a_{i_1\cdots i_p}(x)$ 是在 D 内足够正则的函数 (特别是那些所有系数都是无穷次可微的). 区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内形式 ω 的各系数的最低光滑次数, 叫做ω *的光滑次数*. 具有 $C^\infty(D,\mathbb{R})$ 类系数的 $p \geqslant 0$ 次形式全体组成的集, 经常用记号 $\Omega^p(D,\mathbb{R})$ 或 Ω^p 表示.

这样, 我们所定义的形式的微分运算, 是从 Ω^p 到 Ω^{p+1} 的一个映射 $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$.

现在讨论几个以后要用到的具体例子

例 9 设 0– 形式 $\omega = f(x,y,z)$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的可微函数, 则得

$$
d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.
$$

例 10 设

$$
\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy
$$

是具有坐标 (x,y) 的空间 $\mathbb{R}^2$ 中区域内的微分 1– 形式, P,Q 为 D 内的可微函数. 由定义 2 得到

$$
\begin{aligned}
d\omega(x,y) &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\
&= \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)dx \wedge dy.
\end{aligned}
$$

例 11 设

$$
\omega = Pdx + Qdy + Rdz
$$

是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的 1– 形式, 则

$$
d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.
$$

例 12 计算 2–形式

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

的微分, 这里 P, Q, R 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的可微函数. 得到

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

若 (x^1, x^2, x^3) 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的笛卡儿坐标, 而 $x \longmapsto f(x), x \longmapsto \boldsymbol{F}(x) = (F^1, F^2, F^3)(x), x \longmapsto \boldsymbol{V} = (V^1, V^2, V^3)(x)$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的光滑数量场与光滑向量场, 在讨论它们的时候 (特别是在物理问题中) 常要相应地讨论向量场

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \text{—— 数量场 } f \text{ 的梯度} \tag{14}$$

$$\text{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) \text{—— 向量场 } \boldsymbol{F} \text{ 的旋度} \tag{15}$$

以及数量场

$$\text{dir}\boldsymbol{V} = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \text{—— 向量场 } \boldsymbol{V} \text{ 的散度} \tag{16}$$

关于数量场的梯度, 前面已经讨论过. 这里暂不讲向量场的旋度与散度的物理内容, 而只关心场论里的这些经典算子与微分形式的运算之间的关系.

在有向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 向量场与 1– 形式及 2– 形式间存在一一对应

$$\boldsymbol{F} \longleftrightarrow \omega_{\boldsymbol{F}}^1 = \langle \boldsymbol{F}, \cdot \rangle, \boldsymbol{V} \longleftrightarrow \omega_{\boldsymbol{V}}^2(\boldsymbol{V}, \cdot, \cdot).$$

还应注意, 在区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内, 任意的 3– 形式都有 $\rho(x^1, x^2, x^3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ 的形式. 考虑到这一点, 就能引进 $\text{grad} f, \text{rot}\boldsymbol{F}, \text{div}\boldsymbol{V}$ 的如下定义:

$$f \longmapsto \omega^0 (= f) \longmapsto d\omega^0 (= df) = \omega_{\boldsymbol{g}}^1 \longmapsto \boldsymbol{g} := \text{grad} f \tag{14'}$$

$$\boldsymbol{F} \longmapsto \omega_{\boldsymbol{F}}^1 \longmapsto d\omega_{\boldsymbol{F}}^1 \qquad = \omega_{\boldsymbol{r}}^2 \longmapsto \boldsymbol{r} := \text{rot}\boldsymbol{F} \tag{15'}$$

$$\boldsymbol{V} \longmapsto \omega_{\boldsymbol{V}}^2 \longmapsto d\omega_{\boldsymbol{V}}^2 \qquad = \omega_{\boldsymbol{\rho}}^3 \longmapsto \boldsymbol{\rho} := \text{div}\boldsymbol{V} \tag{16'}$$

例 9,11,12 说明, 当时, 在笛卡儿坐标下我们就得到了上面所列的 $\text{grad} f, \text{rot}\boldsymbol{F}$, $\text{div}\boldsymbol{V}$ 的表示式 (14),(15),(16). 因此, 场论里所出现的运算能看成是外形式微分运算的具体表现, 而对任意次的形式这种运算都一样地能施行. 有关梯度, 旋度及散度的详情, 将在第 14 章里说明.

4. 在映射下, 向量的转移与形式的转移

我们看一看, 在区域的映射下, 函数 (零形式) 发生怎样的变化.

设 $\varphi: U \to V$ 是区域 $U \subset \mathbb{R}^m$ 到区域 $V \subset \mathbb{R}^n$ 的映射. 在映射 φ 的作用下, 每点 $t \in U$ 变到 V 内确定的一点 $x = \varphi(t)$.

若在 V 上给出了函数 f, 则借助区域 U 上的任何映射 $\varphi: U \to V$, 由 f 自然产生出一个由等式

$$(\varphi^* f)(t) := f(\varphi(t))$$

确定的函数 $\varphi^* f$, 亦即, 为要求出 $\varphi^* f$ 在点 $t \in U$ 的值, 应把 t 变为点 $x = \varphi(t) \in V$, 再计算函数 f 在 x 的值.

因此, 如果映射 $\varphi: U \to V$ 把区域 U 的点变成区域 V 的点, 那么, 这样一个运算 (对应) $f \longmapsto \varphi^* f$, 就把在 V 上定义的函数的集合, 映入在 U 上定义的函数的集合 (这个映射涉及 U, V 的方向恰与 φ 相反).

换句话说, 我们已证明了, 对于映射 $\varphi: U \to V$, 自然地产生了映射 $\varphi^*: \Omega^\circ(V) \to \Omega^\circ(U)$, 它把在 V 上定义的零形式, 变成在 U 上定义的零形式.

现在讨论任意次形式的转移的一般情形.

设 $\varphi: U \to V$ 是区域 $U \subset \mathbb{R}_t^m$ 到区域 $V \subset \mathbb{R}_x^n$ 内的光滑映射, $\varphi'(t): TU_t \to TV_{x=\varphi(t)}$ 是 φ 的切映射, 又设 ω 是区域 V 上的一个 $p-$ 形式. 这时, 我们取区域 U 上的 $p-$ 形式 $\varphi^*\omega$ 与形式 ω 对应, 它在点 $t \in U$ 处在向量组 $\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_p \in TU_t$ 上的值由等式

$$\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_p) := \omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_p) \tag{17}$$

确定.

于是, 对每个光滑映射 $\varphi: U \to V$, 有映射 $\varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$ 与之对应, 它把 V 上定义的形式变成在区域 U 上定义的形式*. 由 (17) 式显然推知

$$\varphi^*(\omega' + \omega'') = \varphi^*(\omega') + \varphi^*(\omega''), \tag{18}$$

$$\varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^*\omega, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

注意到映射 $\varphi: U \to V$ 与 $\psi: V \to W$ 的复合映射的微分的规律 $(\psi\circ\varphi)' = \psi'\circ\varphi'$, 从 (17) 式又能推出

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \tag{20}$$

(映射 $\psi^*: \Omega^p(W) \to \Omega^p(V)$, $\varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$ 按相反次序, 即先 ψ^* 后 φ^* 的复合).

现在考察怎样具体实现形式的转移.

---

* 译者注. 在微分几何中, 通常称 φ^* 为 φ 的拉回 (pull Back) 映射.

例 13 在区域 $V \subset \mathbb{R}^n_x$ 内取 2– 形式 $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$. 设 $x^i = x^i(t^1, \cdots, t^m), i = 1, \cdots, n$, 是映射 φ 的坐标写法,$\varphi : U \to V$ 是映区域 $U \subset \mathbb{R}^m_t$ 到 $V \subset \mathbb{R}^n_x$ 内的映射.

我们希望求出 U 内形式 $\varphi^*\omega$ 的坐标表示式.

取点 $t \in U$ 及向量 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in TU_t$. 它们对应于空间 $TV_{x=\varphi(t)}$ 内的向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\xi}_2 = \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的坐标 $(\xi_1^1, \cdots, \xi_1^n), (\xi_2^1, \cdots, \xi_2^n)$ 用 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ 的坐标 $(\tau_1^1, \cdots, \tau_1^m), (\tau_2^1, \cdots, \tau_2^m)$ 借助于雅可比矩阵, 由公式

$$\xi_1^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\tau_1^j, \xi_2^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\tau_2^j$$

表出,$i = 1, \cdots, n$ (其中 j 从 1 到 m 求和).

于是,

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) :&= \omega(\varphi(t))(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \\
&= \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_1^{j_1} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_1^{j_2} \\ \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_2^{j_1} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_2^{j_2} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \begin{vmatrix} \tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2} \\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} - \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \right) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \\ \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} & \dfrac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \end{vmatrix} (t) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).
\end{aligned}$$

因此, 我们证明了

$$\varphi^*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2})}{\partial(t^{j_1}, t^{j_2})}(t) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}.$$

如果利用形式转移运算的性质 (18),(19)[①], 并将上例使用的推导过程用于一般

①如果逐点利用 (19) 式, 就得到

$$\varphi^*(a(x)\omega) = a(\varphi(t))\varphi^*\omega.$$

情形, 就得到下面的等式

$$\varphi^*\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\right)$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant m}} a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\cdot\frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_p})}{\partial(t^{j_1},\cdots,t^{j_p})}dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_p}. \tag{21}$$

注意, 如果在记号 φ^* 后面的括号里, 形式地作替换 $x=x(t)$, 将微分 $dx^1,\cdots,dx^n$ 用微分 $dt^1,\cdots,dt^m$ 表出, 并用外积的性质将得到的式子化简, 那么, 正好得到 (21) 式的右端.

实际上, 对于每组固定指标 $i_1,\cdots,i_p$,

$$\begin{aligned}
&a_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\\
&=a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}dt^{j_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_p}\right)\\
&=a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_p}\\
&=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant m} a_{i_1\cdots i_p}(x(t))\frac{\partial(x^{i_1},\cdots,x^{i_p})}{\partial(t^{j_1},\cdots,t^{j_p})}dt^{j_1}\wedge\cdots\wedge dt^{j_p}.
\end{aligned}$$

对所有序组 $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n$ 将这些等式求和, 就得到 (21) 式的右端.

这样, 我们证明了以下的在计算技巧上很重要的关系.

命题　*若在区域 $V\subset\mathbb{R}^n$ 内给定了微分形式 ω, 而 $\varphi: U\to V$ 是区域 $U\subset\mathbb{R}^m$ 到 $V\subset\mathbb{R}^n$ 内的光滑映射, 则形式 $\varphi^*\omega$ 的坐标表示, 可以从形式 ω 的坐标表示*

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n} a_{i_1\cdots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

直接经变量替换 $x=\varphi(t)$ (并利用外积的性质) 得到.

例 14　特别地, 当 $m=n=p$ 时, (21) 式化作

$$\varphi^*(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)=\det\varphi'(t)dt^1\wedge\cdots\wedge dt^n. \tag{22}$$

这表示, 如果把重积分号下的 $f(x)dx^1\cdots dx^n$ 改成 $f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 则当微分同胚保定向 (即 $\det\varphi'(t)>0$) 时, 重积分里的变量替换公式

$$\int_{V=\varphi(U)} f(x)dx=\int_U f(\varphi(t))\det\varphi'(t)dt$$

能用形式的替换 $x=\varphi(t)$ 自动地得到. 类似于一维的情况, 可赋予它下面的形式:

$$\int_{\varphi(U)}\omega=\int_U\varphi^*\omega. \tag{23}$$

作为结尾, 我们指出, 设区域 $U\subset\mathbb{R}^m, V\subset\mathbb{R}^n_x, \varphi:U\to V$ 将 U 映入 V 内. 若在 V 内取得形式 ω的次数 p 大于 U 的维数 m, 那么, 与 ω 对应的 U 内的形式 $\varphi^*\omega$ 显然为零. 因此, 一般地说, 映射 $\varphi^*:\Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$ 不必是内射.

另一方面, 如果 $\varphi:U\to V$ 有光滑逆映射 $\varphi^{-1}:V\to U$, 则由关系式 (20) 与等式 $\varphi^{-1}\circ\varphi=e_U, \varphi\circ\varphi^{-1}=e_V$ 得到 $\varphi^*\circ(\varphi^{-1})^*=e_U^*, (\varphi^{-1})^*\circ\varphi^*=e_V^*$; 又因 e_U^* 与 e_V^* 分别是 $\Omega^p(U)$ 与 $\Omega^p(V)$ 内的恒等映射, 所以, 映射 $\varphi^*:\Omega^p(V)\to\Omega^p(U), (\varphi^{-1})^*:\Omega^p(U)\to\Omega^p(V)$ 正是我们所期望的, 是互逆映射. 即此时 φ^* 是双射.

最后注意, 除了上面指出的性质 (18)—(20) 外, 还可验证, 将形式映为形式的映射 φ^*, 还满足关系

$$\varphi^*(d\omega)=d(\varphi^*\omega). \tag{24}$$

特别地, 这个具有根本意义的重要等式说明, 我们用坐标形式定义的微分形式的微分运算, 实际上, 与我们在什么坐标系中写出微分形式 ω 是无关的. 第 15 章还将详细地讨论这个问题.

5. 曲面上的形式

定义 3 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是**光滑曲面**. 如果在每点 $x\in S$ 处, 在曲面 S 的切向量空间 TS_x 上定义了一个 $p-$ 形式 $\omega(x)$, 就说在 S 上给定了一个**微分 $p-$ 形式** ω.

例 15 如果光滑曲面 S 位于区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内, 在 D 内定义了形式 ω, 那么, 由于在每点 x 处,$TS_x\subset TD_x$ 成立, 所以能够讨论 ω 在 TS_x 上的限制. 于是在 S 上产生了形式 $\omega|_S$, 自然把它叫做**形式 ω 在曲面 S 上的限制**.

我们知道, 用参数形式可局部地或整体地给定曲面. 设 $\varphi:U\to S=\varphi(U)\subset D$ 是区域 D 内的参数化光滑曲面, 而 ω 是 D 内的形式. 这时, 可把形式 ω 转移到参数域 U 内, 并根据上面建立的算法将 $\varphi^*\omega$ 写成坐标形式. 显然这时在 U 内得到的形式 $\varphi^*\omega$ 与形式 $\varphi^*(\omega|_S)$ 一致.

注意, 一旦 $\varphi'(t):TU_t\to TS_x$ 在每点 $t\in U$ 处都是 TU_t 到 TS_x 上的同构, 就能把形式从 S 转移到 U 上, 又能从 U 转移到 S 上, 所以, 正像曲面本身通常是局部地或整体地用参量表出, 曲面上的形式, 归根结底是在局部图的参变域上给出的.

例 16 设 $\omega^2_{\mathbf{V}}$ 是例 8 内讨论的流形式, 它是由定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的区域 D 内流速向量场 $\mathbf{V}$ 产生的. 若 S 是 D 内的定向光滑曲面, 则能讨论形式 $\omega^2_{\mathbf{V}}$ 在 S 上的限制. 这时, 所得的形式 $\omega^2_{\mathbf{V}}|_S$ 刻画了通过 S 的每个曲面元素的流量.

设 $\varphi: I \to S$ 是曲面 S 的局部图, 则在形式 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 的坐标表示式 (12) 中做变量替换 $x = \varphi(t)$, 就将得到定义在正方形 I 上的形式 $\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2 = \varphi^*(\omega_{\boldsymbol{V}}^2|_S)$ 在曲面给定的局部坐标内的坐标表示.

例 17 设 $\omega_{\boldsymbol{F}}^1$ 是例 7 中所讨论的功形式, 它是由作用在欧氏空间的区域 D 内的力场 $\boldsymbol{F}$ 产生的. 设 $\varphi: I \to \varphi(I) \subset D$ 是光滑路径 (φ 不必是同胚). 这时, 根据区间 I 上形式的限制与转移的一般原理, 产生了线段 I 上的形式 $\varphi^*\omega_{\boldsymbol{F}}^1$, 它的坐标表示 $a(t)dt$, 可从形式 $\omega_{\boldsymbol{F}}^1$ 的坐标表示 (11), 经变量替换 $x = \varphi(t)$ 得到.

练 习

1. 计算下面的 $\mathbb{R}^n$ 内的微分形式 ω 在给定的向量组上的值.

a) $\omega = x^2dx^1$ 在向量 $\xi = (1, 2, 3) \in T\mathbb{R}^3_{(3,2,1)}$ 上的值.

b) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1dx^2 \wedge dx^4$ 在向量序对 $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbb{R}^4_{(1,0,0,0)}$ 上的值. 其中 $\xi_1 = (-1, 0, 1, 1), \xi_2 = (0, -1, 0, 1)$.

c) $\omega = df$, 这里 $f = x^1 + 2x^2 + \cdots + nx^n$, 在 $\xi = (1, -1, \cdots, (-1)^{n-1}) \in T\mathbb{R}^n_{(1,1,\cdots,1)}$ 的值.

2. a) 验证: 如果指标 $i_1, \cdots, i_k$ 不是各不相同, 则形式 $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 恒等于零.

b) 说明为什么在 n 维向量空间上, 没有 $p > n$ 次非零的斜对称形式.

c) 化简以下形式.

$$2dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + 3dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1.$$

d) 脱括号, 并合并同类项

$$(x^1dx^2 + x^2dx^1) \wedge (x^3dx^1 \wedge dx^2 + x^2dx^1 \wedge dx^3 + x^1dx^2 \wedge dx^3).$$

e) 将形式 $df \wedge dg$ 写成 $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}, 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3$ 的组合, 其中 $f = \ln(1 + |x|^2), g = \sin|x|, x = (x^1, x^2, x^3)$.

f) 验证在 $\mathbb{R}^n$ 内

$$df^1 \wedge \cdots \wedge df^n(x) = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

g) 进行全部计算以证明当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时

$$df^1 \wedge \cdots \wedge df^k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{i_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^k}{\partial x^{i_1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^k}{\partial \lambda^{i_k}} \end{vmatrix} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

3. a) 证明偶次形式 α 与任何次形式可交换, 即 $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

b) 设 $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$ 且 $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n 次). 验证

$$\begin{aligned}\omega^n &= n! dp_1 \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq^n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dp_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n.\end{aligned}$$

4. a) 试将形式 $\omega = df$ 写成形式 $dx^1, \cdots, dx^n$ 的组合, 这里 $f(x) = (x^1) + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^n$, 并求 ω 的微分.

b) 验证, 对于任何函数 $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, 必有 $d^2 f \equiv 0$, 其中 $d^2 = d \circ d$, 而 d 为外微分算子.

c) 证明, 若形式 $\omega = a_{i_1 \cdots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 的系数 $a_{i_1 \cdots i_k}$ 属于 $C^2(D, \mathbb{R})$, 则在区域 D 内 $d^2\omega \equiv 0$.

d) 在形式 $\dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ 的定义域内, 求它的外微分.

5. 如果把重积分号下的乘积 $dx^1 \cdots dx^n$ 理解为形式 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 则根据例 14 之结果, 可以形式地得出在重积分内做变量替换后的积分号下的表达式. 试据此介绍的方法, 做从笛卡儿坐标到以下各种坐标的变换:

a) $\mathbb{R}^2$ 内的极坐标;

b) $\mathbb{R}^3$ 内的柱坐标;

c) $\mathbb{R}^3$ 内的球坐标.

6. 求以下各形式的限制:

a) dx^i 在超平面 $x^i = 1$ 上的限制.

b) $dx \wedge dy$ 在曲线 $x = x(t), y = y(t), a < t < b$ 上的限制.

c) $dx \wedge dy$ 在由 $x = c$ 定义的 $\mathbb{R}^3$ 的平面上的限制.

d) $dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准单位方体的边界上的限制.

e) $\omega_i = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的标准单位方体的界面上的限制, 这里位于微分 dx^i 上的记号 $\frown$, 表示从所写的乘积中删去 dx^i.

7. 在 $\mathbb{R}^3$ 的球面坐标下, 表出以下各形式在以原点为中心、 R 为半径的球面上的限制:

a) dx.

b) dy.

c) $dy \wedge dz$.

8. 映射 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 由 $(u, v) \longmapsto (u \cdot v, 1) = (x, y)$ 给出. 试求:

a) $\varphi^*(dx)$.

b) $\varphi^*(dy)$.

c) $\varphi^*(ydx)$.

9. 验证: 外微分 $d : \Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D)$ 具有以下性质:

a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$, 其中 $\deg\omega_1$ 是形式的次数.

c) $\forall \omega \in \Omega^p, d(d\omega) = 0.$

d) $\forall f \in \Omega^0, df = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$

试证, 具有性质 a), b), c), d) 的映射 $d : \Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D)$ 是唯一的.

10. 验证, 与映射 $\varphi : U \to V$ 对应的映射 $\varphi^* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, 具有以下性质:

a) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2.$

b) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2.$

c) $d\varphi^*\omega = \varphi^* d\omega.$

d) 若又有映射 $\psi : V \to W$, 则 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$

11. 试证, 光滑的 k 维曲面可定向, 当且仅当在它上边存在无处退化的 $k-$ 形式.

第十三章　曲线积分与曲面积分

§1　微分形式的积分

1. 原始问题, 启发性想法, 例子

a. 场做的功

设 G 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. $\boldsymbol{F}(x)$ 是在 G 内作用的力的连续向量场. 场内试验质点的位移与所做的功有关. 我们来计算, 当单位试验质点沿着已知的轨道, 准确地说, 沿着光滑路径 $\gamma: I \to \gamma(I) \subset G$ 移动时, 场所做的功.

我们曾在讨论定积分的应用时, 涉及过这一问题, 所以在这里我们只是回想一下问题的解法, 指出某些典型的和在后面有用的构成要素.

我们知道, 在定常场 $\boldsymbol{F}$ 中移动一个向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所做的功为 $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi} \rangle$.

设 $t \longmapsto \boldsymbol{x}(t)$ 是定义在闭区间 $I = \{t \in \mathbb{R} | a \leqslant t \leqslant b\}$ 上的光滑映射 $\gamma: I \to G$.

取闭区间 $[a, b]$ 的足够细的分法. 这时, 在该分法的每个小区间 $I_i = \{t \in I | t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$ 上, 以更高阶无穷小精度成立等式

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_i) \approx \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)(t - t_i).$$

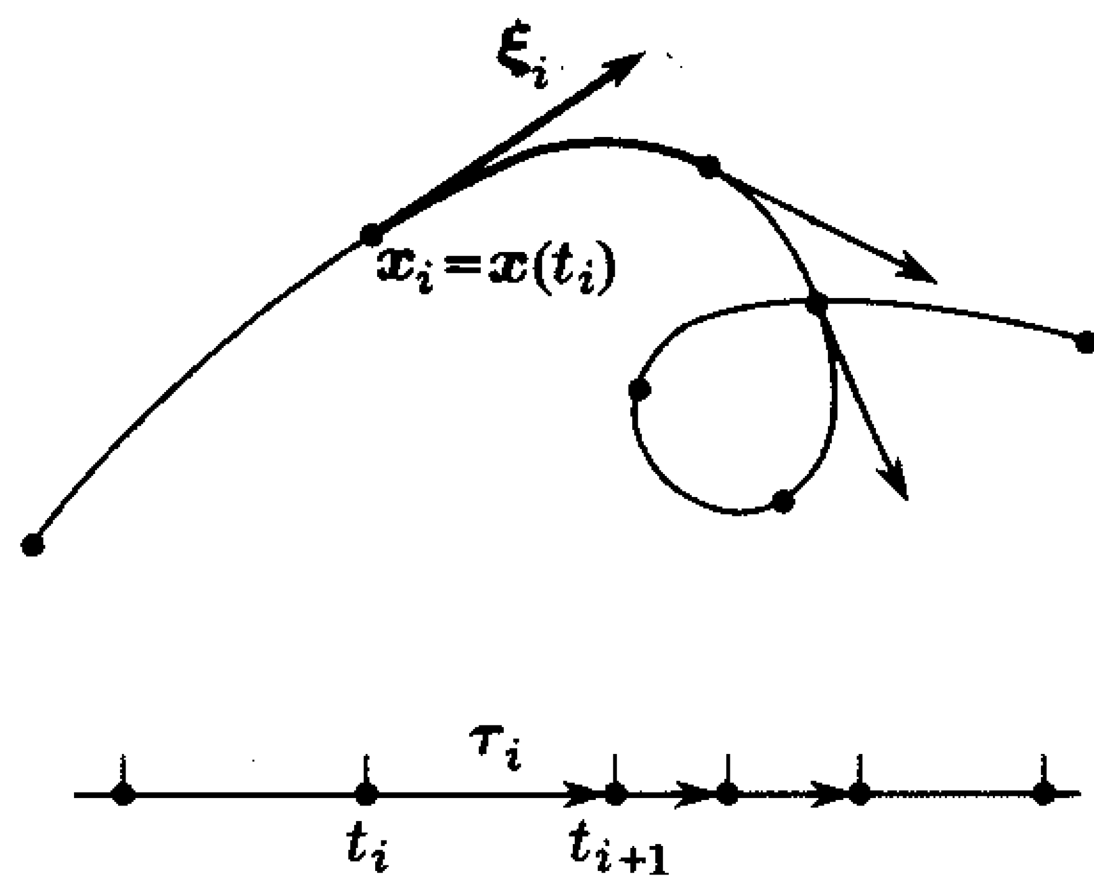


图 83

从 t_i 到 t_{i+1} 的平移向量 $\boldsymbol{\tau}_i = t_{i+1} - t_i$(图 83) 对应着空间 $\mathbb{R}^n$ 中从点 $\boldsymbol{x}(t_i)$ 出发的平移向量 $\Delta \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i$, 不计指出的误差, 可认为此向量与轨道在点 $\boldsymbol{x}(t_i)$ 处的切向量 $\boldsymbol{\xi}_i = \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\Delta t_i$

一致. 由场 $\boldsymbol{F}(x)$ 的连续性, 可以认为它是局部常向量, 因此与 (时间的) 间隔 I_i 相对应的功 ΔA_i 能够按下式

$$\Delta A_i \approx \langle \boldsymbol{F}(x_i), \boldsymbol{\xi}_i \rangle$$

或

$$\Delta A_i \approx \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)), \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\Delta t_i \rangle$$

计算, 而相对误差很小.*

这就是说

$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)), \dot{\boldsymbol{x}}(t_i) \rangle \Delta t_i$$

由此, 令线段 I 的分法无限地加细而取极限, 就得到

$$A = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(x(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t) \rangle dt. \tag{1}$$

如果把式子 $\langle \boldsymbol{F}(x(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t) \rangle dt$ 改写成 $\langle \boldsymbol{F}(x), d\boldsymbol{x} \rangle$ 的形式, 则当 $\mathbb{R}^n$ 内的坐标是笛卡儿坐标时, 这式子就能写成

$$F^1 dx^1 + \cdots + F^n dx^n$$

的形式; 此后, 公式 (1) 就能写成

$$A = \int_\gamma F^1 dx^1 + \cdots + F^n dx^n \tag{2}$$

或写成

$$A = \int_\gamma \omega_{\boldsymbol{F}}^1. \tag{2'}$$

公式 (1) 给出了 (2) 和 (2′) 中功的 1− 形式沿路径 γ 的积分的确切含义.

例 1 考察力场 $\boldsymbol{F} = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$, 它的定义域是除坐标原点之外的整个平面 $\mathbb{R}^2$. 给定曲线

$$\gamma_1 : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

及

$$\gamma_2 : x = 2 + \cos t, y = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

计算此场沿曲线 γ_1 及 γ_2 所做的功.

* 译者注. 该近似等式的误差应是比 $|t_{i+1} - t_i|$ 高阶的无穷小量.

根据公式 (1),(2),(2′), 得

$$\int_{\gamma_1} \omega_{\boldsymbol{F}}^1 = \int_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t} + \frac{\cos t\cdot \cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right)dt = 2\pi.$$

及

$$\int_{\gamma_2} \omega_{\boldsymbol{F}}^1 = \int_{\gamma_2} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t)+(2+\cos t)\cos t}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}dt$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}dt + \int_{-\pi}^{0} \frac{1+2\cos(2\pi-u)}{5+4\cos(2\pi-u)}du$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}dt - \int_0^{\pi} \frac{1+2\cos u}{5+4\cos u}du = 0$$

例 2 设 $\boldsymbol{r}$ 为点 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 的径向量, 而 $r=|\boldsymbol{r}|$, 设在 $\mathbb{R}^3$ 除坐标原点外, 处处给出形如 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$ 的力场. 这是所谓的*中心场*. 今求场 $\boldsymbol{F}$ 沿路径 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3\backslash O$ 所做的功. 利用 (2) 式得

$$\int_\gamma f(r)(xdx+ydy+zdz) = \frac{1}{2}\int_\gamma f(r)d(x^2+y^2+z^2)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(r(t))dr^2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(\sqrt{u(t)}\ )du(t)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{r_0^2}^{r_1^2} f(\sqrt{u}\ )du = \Phi(r_0,r_1).$$

我们看到, 这里记 $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=r^2(t), r^2(t)=u(t), r_0=r(0), r_1=r(1)$.

这样, 在任何中心场内, 沿路径 γ 所做的功, 只与从场的中心 O 到路径的始点及终点的距离 r_0,r_1 有关.

特别地, 对于位于坐标原点的单位质点所产生的重力场 $\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$, 得到

$$\Phi(r_0,r_1) = \frac{1}{2}\int_{r_0^2}^{r_1^2} \frac{1}{u^{3/2}}du = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}.$$

b. 通过曲面的流量

设在定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的区域 G 中有稳定液 (或气) 流, 而 $x\longmapsto \boldsymbol{V}(x)$ 是该流动在区域 G 中的速度场. 此外, 在 G 中取光滑定向曲面 S. 为确定起见, 我们认

为 S 的定向由法向量场给出. 要求确定通过曲面 S 的液体 (体积) 流量, 更准确地说, 就是要求在单位时间内, 有多大体积的液体通过曲面 S 流向曲面的法向量场指向的一方.

为了解决这一问题, 注意, 如果流速场是常场且等于 $\boldsymbol{V}$, 则在单位时间内, 通过由一对向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 张成的平行四边形 Π 的流量, 等于由向量 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 构成的平行六面体的体积. 若 $\boldsymbol{\eta}$ 是 Π 的法向量, 而液体通过 Π 流向 $\boldsymbol{\eta}$ 指向的方向, 则当 $\boldsymbol{\eta}$ 与标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 给出与 Π 同样的定向时 (即当 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的定向标架时), 此体积等于混合积 $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$. 而如果此标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 在 Π 上的定向与法向量 $\boldsymbol{\eta}$ 反向时, 则按法向量 $\boldsymbol{\eta}$ 指向的流量等于 $-(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$.

现在回到最初提的问题. 为简单起见, 假定整个曲面 S 能够光滑地参数化: $\varphi: I \to S \subset G$, 这里 I 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的二维区间. 将 I 分成许多小区间 I_i, 它们由沿坐标轴方向的位移向量 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ 张成 (图 84). 每个这样的小区间的像 $\varphi(I_i)$ 可用 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\xi}_2 = \varphi'(t_2)\boldsymbol{\tau}_2$ 张成的平行四边形近似. 假定 $\boldsymbol{V}(x)$ 在曲面片 $\varphi(I_i)$ 的范围内变动很小, 从而可用这个平行四边形代替 $\varphi(I_i)$, 可以认为通过曲面片 $\varphi(I_i)$ 的流量 ΔF_i 与以常速通过由向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 张成的平行四边形的流量是一样的; 这样做时, 二者的相对误差是很小的.* 如果在 S 上给出的标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的定向与 $\boldsymbol{\eta}$ 同方向, 得

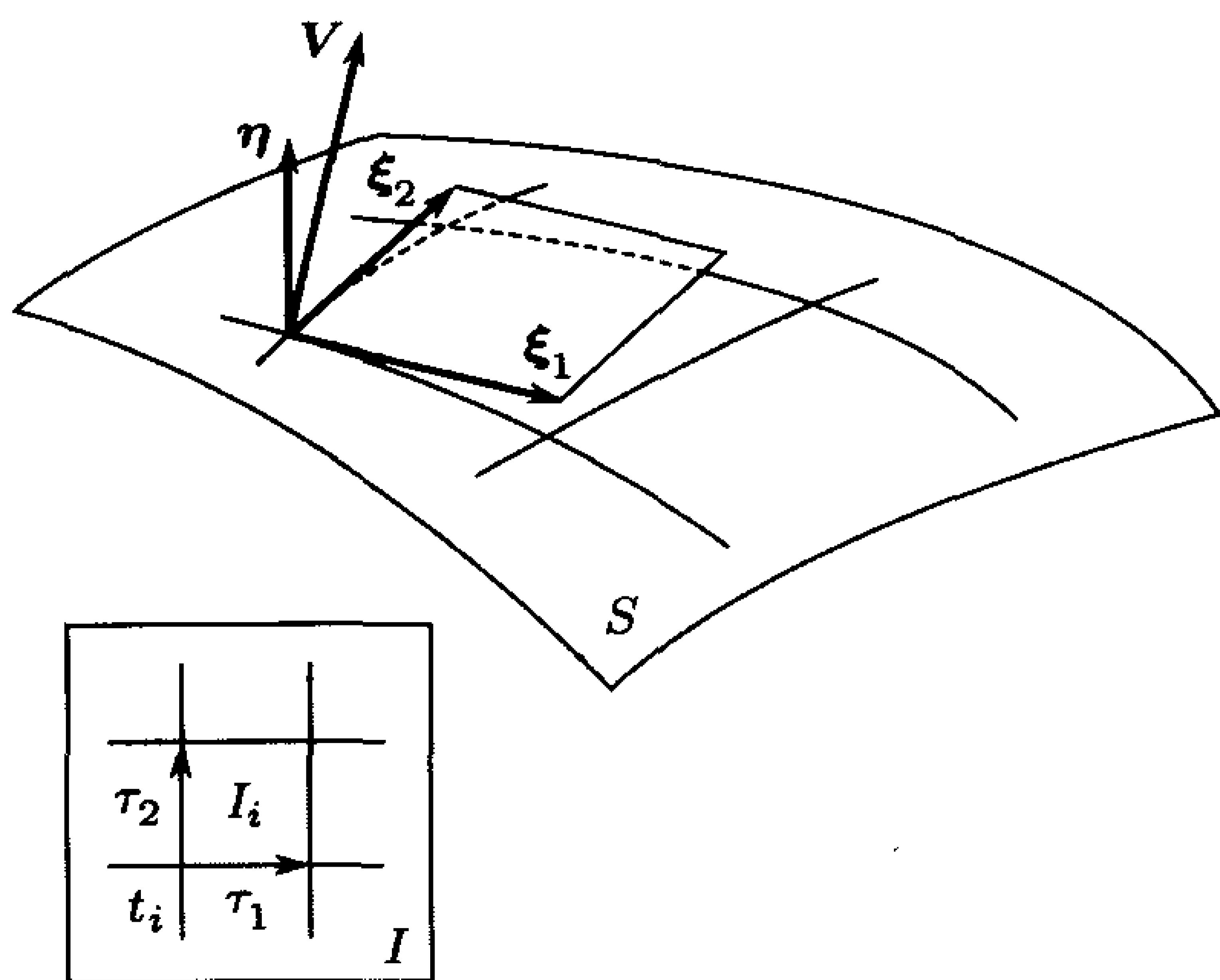


图 84

$$\Delta F_i \approx (\boldsymbol{V}(x_i), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2).$$

将这些元流量求和, 就得到

$$F = \sum_i \Delta F_i \approx \sum_i \omega_{\boldsymbol{V}}^2(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2),$$

这里 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x) = (\boldsymbol{V}(x), \cdot, \cdot)$ (见第 12 章 §5 例 8) 是流量 2− 形式. 如果 (取区间 I 的越来越细的分法 P) 取极限, 那么, 自然认为

$$F := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum \omega_{\boldsymbol{V}}^2(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) =: \int_S \omega_{\boldsymbol{V}}^2 \tag{3}$$

最后这个记号是 2− 形式 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 沿定向曲面 S 的积分.

---

* 参看前一个译者注.

利用形式 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 在笛卡儿坐标中的坐标表示(参看第12 章§5 公式(12)), 我们能把 F 写成

$$F=\int_S V^1dx^2\wedge dx^3+V^2dx^3\wedge dx^1+V^3dx^1\wedge dx^2. \tag{4}$$

我们只是讨论了解决所提问题一般原理. 实在说, 我们只是给出了流量 F 的精确定义 (3), 并引入了一些表示式 (3),(4), 但暂时还没得到类似于功的公式 (1) 那样的有效计算公式.

注意, 公式 (1) 是把表达式 (2) 中的 $x^1,\cdots,x^n$, 换成给定路径 γ 的函数 $(x^1,\cdots,x^n)(t)=x(t)$ 而得来的. 我们记得 (参看第 12 章 §5), 这种替换解释为把在 G 内给出的形式 $\omega_{\boldsymbol{F}}^1$ 变成线段 $I=[a,b]$ 上的形式.

完全类似, 计算流量的公式也可用在 (4) 式中直接代入曲面的参数方程的方法得到.

实际上,

$$\begin{aligned}\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)&=\omega_{\boldsymbol{V}}^2(\varphi(t_i))(\varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1,\varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_2)\\&=(\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)\end{aligned}$$

从而

$$\sum_i\omega_{\boldsymbol{V}}^2(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\sum_i(\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2).$$

形式 $\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 定义在二维区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上. 在 I 中, 任何 2−形式具有 $f(t)dt^1\wedge dt^2$ 的形式, 这里 f 是 I 上依赖于形式的函数, 所以

$$\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)=f(t_i)dt^1\wedge dt^2(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2).$$

但 $dt^1\wedge dt^2(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)=\tau_1^1\cdot\tau_2^2$ 是正交向量 $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2$ 所张成的矩形 I_i 的面积. 因此,

$$\sum_i f(t_i)dt^1\wedge dt^2(\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2)=\sum_i f(t_i)|I_i|.$$

当越分越细, 取极限, 得到

$$\int_I f(t)dt^1\wedge dt^2=\int_I f(t)dt^1dt^2, \tag{5}$$

由 (3) 式知, (5) 式左边是 2− 形式 $\omega^2=f(t)dt^1\wedge dt^2$ 沿最简定向曲面 I 的积分, 而右端是函数 f 在矩形 I 上的积分.

还要记住, 由形式 $\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 的坐标式直接做变量替换 $\boldsymbol{x}=\varphi(t)$, 就得到形式 $\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2$ 的坐标表示 $f(t)dt^1\wedge dt^2$, 这里的 $\varphi:I\to G$ 是曲面的图.

从 (4) 式出发, 施行这个替换, 就得到

$$F=\int_{S=\varphi(I)}\omega_{\boldsymbol{V}}^2=\int_I\varphi^*\omega_{\boldsymbol{V}}^2$$
$$=\int_I\left(V^1(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^2}{\partial t^1}&\frac{\partial x^3}{\partial t^1}\\\frac{\partial x^2}{\partial t^2}&\frac{\partial x^3}{\partial t^2}\end{vmatrix}+V^2(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^3}{\partial t^1}&\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\\\frac{\partial x^3}{\partial t^2}&\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left.+V^3(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}&\frac{\partial x^2}{\partial t^1}\\\frac{\partial x^1}{\partial t^2}&\frac{\partial x^2}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right)dt^1\wedge dt^2.$$

最后这个积分, 正像等式 (5) 所指出的那样, 是在矩形 I 上的普通黎曼积分.

于是, 我们求出

$$F=\int_I\begin{vmatrix}V^1(\varphi(t))&V^2(\varphi(t))&V^3(\varphi(t))\\\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^1}(t)&\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^1}(t)&\frac{\partial\varphi^3}{\partial t^1}(t)\\\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^2}(t)&\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}(t)&\frac{\partial\varphi^3}{\partial t^2}(t)\end{vmatrix}dt^1dt^2,\qquad(6)$$

这里 $x=\varphi(t)=(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)(t^1,t^2)$ 是曲面 S 的图, 给它的定向就是 S 的法向量场指示的定向. 如果图 $\varphi:I\to S$ 在 S 上给出了相反的定向, 则等式 (6) 一般不成立, 但从本段开头的讨论即可知道, 那时, 左、右两端只不过相差一个符号.

显然, 公式 (6) 是我们所熟知的, 用坐标 t^1,t^2 表出的流量元素 $\Delta F_i\approx(\boldsymbol{V}(x_i),\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$ 的和式极限的简单准确写法.

我们已讨论了由一张图给出的曲面的情况, 在一般情况下, 曲面 S 可以分成实质上不相交的一些光滑曲面片 S_i, 并把通过 S 的流量作为通过各片的流量之和去求解.

例 3 设介质以常速 $\boldsymbol{V}=(1,0,0)$ 做平移运动. 若在流体所在空间区域内任取闭曲面, 则因介质密度不变, 所取闭曲面包围的体积内的物质的量应当不变. 这就是说, 介质流经曲面的总量应为零.

现在, 我们取球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 做为 S, 来检验公式 (6).

在球面 S 上有一个零面积的集, 从而在我们讨论的问题中可把它忽略, 并用参数式

$$x=R\cos\psi\sin\varphi,$$
$$y=R\cos\psi\sin\varphi,$$
$$z=R\sin\psi$$

表示这个球面, 这里 $0 < \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \psi < \pi/2$.

将这些式子和 $\boldsymbol{V} = (1,0,0)$ 代入 (6) 后, 得到

$$F = \int_I \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} d\varphi d\psi = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0.$$

由于积分为零, 所以无需考虑沿什么方向 (即流入还是流出) 进行流量的计算.

例 4 设在空间 $\mathbb{R}^3$ 内有运动着的介质. 它的速度场用笛卡儿坐标表示是

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = (V^1, V^2, V^3)(x,y,z) = (x,y,z).$$

在这种情况下, 试求通过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 而进入球内的介质量.

取上例中所用的球面参数式, 并在 (6) 式右端做替换, 得到

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{vmatrix} R\cos\psi \sin\varphi & R\cos\psi\sin\varphi & R\sin\psi \\ -R\cos\psi\sin\varphi & R\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ R\sin\psi\cos\varphi & -R\sin\psi\sin\varphi & R\cos\psi \end{vmatrix} d\psi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3 \cos\psi d\psi = 4\pi R^3.$$

现在, 我们来检查一下, 用曲线坐标 (φ, ψ) 给出的球面的定向, 是否与用内法线给出的定向一致. 容易断定二者不一致. 因此所求的流量 $F = -4\pi R^3$.

在这种情况所得的这个结果容易予以验证: 因为在球面的每一点处, 流速向量 $\boldsymbol{V}$ 的大小是 R, 而方向垂直于球面且向外, 所以从内向外的流量等于球面面积 $4\pi R^2$ 乘以 R, 因而所要的沿反方向的流量就等于 $-4\pi R^3$.

2. 形式沿定向曲面积分的定义

第 1 段讨论的问题的解决, 导致 $k-$ 形式沿定向 k 维曲面的积分的定义.

首先我们假定 S 是 $\mathbb{R}^n$ 内的用一个标准图 $\varphi: I \to S$ 给出的 k 维曲面. 设 ω 是定义在 S 上的一个 $k-$ 形式. 形式 ω 沿参数化曲面 $\varphi: I \to S$ 的积分用以下方式建立.

取 k 维标准区间 $I \subset \mathbb{R}^k$ 的分法 P, 它由 I 在各个坐标轴上的射影 (线段) 的分法导出. 在分法 P 的每个区间 I_i 中取顶点 t_i, 它的坐标值最小, 以及 k 个向量 $\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_k$, 它们从 t_i 出发, 沿坐标轴指向 I_i 的与 t_i 相邻的诸顶点 (见图 84). 我们求切空间 $TS_{x_i=\varphi(t_i)}$ 的向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_k$, 计算

$$\omega(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) =: (\varphi^*\omega)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_k),$$

做出积分和 $\sum\limits_i \omega(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$ 并令分法 P 的参数 $\lambda(P)$ 趋于零求极限.

因此, 我们采用

定义 1 ($k-$ 形式 ω 沿用图 $\varphi: I \to S$ 给定的 k 维光滑曲面的积分).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i \omega(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k)$$
$$= \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i (\varphi^*\omega)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \cdots, \boldsymbol{\tau}_k). \tag{7}$$

若将此定义应用于 I 上的 $k-$ 形式 $f(t)dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k$(这时 φ 是恒等映射), 显然得到

$$\int_I f(t)dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k = \int_I f(t)dt^1 \cdots, dt^k. \tag{8}$$

这样, 由 (7) 式推出

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi^*\omega, \tag{9}$$

而如从 (8) 式可见, 最后这个积分, 可化为与形式 $\varphi^*\omega$ 对应的, 区间 I 上的函数 f 的普通重积分.

我们从定义 1 导出了重要公式 (8) 和 (9), 但它们本身也能取做原始定义. 特别当 D 是 $\mathbb{R}^k$ 内的任意区域 (不一定是区间) 时, 为了不再去重复求和的手续, 我们直接就令

$$\int_D f(t)dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k := \int_D f(t)dt^1 \cdots dt^k, \tag{8'}$$

而对于用 $\varphi: D \to S$ 给出的光滑曲面及其上的 $k-$形式 ω, 令

$$\int_{S=\varphi(D)} \omega := \int_D \varphi^*\omega. \tag{9'}$$

设 S 是任意的分片光滑 k 维曲面,ω 是定义在 S 的光滑小块上的 $k-$形式, 那么, 我们把 S 表为一些光滑参数化曲面的并集 $\bigcup\limits_i S_i$, 各 S_i 只可能有低维的交集, 令

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega \tag{10}$$

如果没有具体物理意义或其他能用关系式 (10) 式解决的问题, 这样的定义就会提出所得的积分值与分解式 $\bigcup\limits_i S_i$ 及各片上选用的参数表示是否无关的问题.

我们来验证所下定义的合理性.

◀ 首先讨论 S 是 $\mathbb{R}^k$ 中的区域 D_x, 而 $\varphi: D_t \to D_x$ 是域 $D_t \subset \mathbb{R}^k$ 到域 D_x 上的微分同胚这种最简单的情况. 在 $D_x = S$ 内, $k-$形式 ω 具有 $f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$ 的形状. 这时, 一方面由 (8) 式有

$$\int_{D_x} f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k = \int_{D_x} f(x)dx^1 \cdots dx^k,$$

另一方面, 由 (9′),(8′) 二式, 成立

$$\int_{D_x}\omega := \int_{D_t}\varphi^*\omega = \int_{D_t} f(\varphi(t))\det\varphi'(t)dt^1\cdots dt^k.$$

但若在 D_t 内 $\det\varphi'(t)>0$, 则据重积分的变量替换的定理, 有等式

$$\int_{D_x=\varphi(D_t)} f(x)dx^1\cdots dx^k = \int_{D_t} f(\varphi(t))\det\varphi'(t)dt^1\cdots dt^k.$$

这就是说, 我们已经证明了, 若在 $S=D_x$ 上有同类定向的坐标 $x^1,\cdots,x^k$ 与曲线坐标 $t^1,\cdots,t^k$, 则积分 $\int_S\omega$ 的值与用哪一组坐标计算无关.

我们注意, 假如曲线坐标 $t^1,\cdots,t^k$ 在 S 上给出另一类定向, 即当 $\det\varphi'(t)<0$ 时, 显然, 最后这个等式的左右两端异号. 因此, 只有在积分曲面是定向曲面时, 才能讨论积分定义的正确性问题.

今设 $\varphi_x: D_x\to S, \varphi_t: D_t\to S$ 是同一个 k 维光滑曲面 S 的两种参数表示, 而 ω 是 S 上的 k–形式. 我们来比较积分

$$\int_{D_x}\varphi_x^*\omega \quad 与 \quad \int_{D_t}\varphi_t^*\omega. \tag{11}$$

因为 $\varphi_t=\varphi_x\circ(\varphi_x^{-1}\circ\varphi_t)=\varphi_x\circ\varphi$, 这里

$$\varphi=\varphi_x^{-1}\circ\varphi_t: D_t\to D_x$$

是 D_t 到 D_x 上的微分同胚, 所以 $\varphi_t^*\omega=\varphi^*(\varphi_x^*\omega)$(见第 12 章 §5 等式 (20)). 因此,D_t 内的形式 $\varphi_t^*\omega$ 能从形式 $\varphi_x^*\omega$ 用替换 $x=\varphi(t)$ 得到. 然而我们刚刚验证了, 在这种情况下, 当 $\det\varphi'(t)>0$ 时,(11) 中的两个积分一样, 而当 $\det\varphi'(t)<0$ 时, 二者异号.

因此, 我们证明了, 若 $\varphi_t: D_t\to S, \varphi_x: D_x\to S$ 是曲面 S 的同一定向类的参数表示, 则 (11) 式内的两个积分相等. 这样, 积分与曲面 S 上的和谐曲线坐标选取的无关性得证.

沿定向分片光滑曲面 S 的积分与将 S 分解为 $\bigcup_i S_i$ 时的分法的无关性, 可由通常的重积分的可加性得到 (只要根据两种分法做出更细致的分法, 并验证在此分法下, 积分的值与原有的每种分法下的积分值都一样就行了). ►

在上述讨论的基础上, 现在, 理所当然地形成了如下一串形式化的定义, 它们对应于在定义 1 中所讲的微分形式的积分的结构.

定义 1′ (*形式沿定向曲面 $S\subset\mathbb{R}^n$ 的积分*).

a) 若在区域 $D\subset\mathbb{R}^k$ 内给出了形式 $f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k$, 则

$$\int_D f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k := \int_D f(x)dx^1\cdots dx^k.$$

b) 若 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是定向 k 维光滑曲面,$\varphi : D \to S$ 是它的参数表示, 而 ω 是 S 上的 $k-$ 形式, 则

$$\int_S \omega := \pm \int_D \varphi^* \omega,$$

而且, 当 φ 的参数表示与 S 的给定方向和谐时取 + 号, 否则取 − 号.

c) 若 S 是 $\mathbb{R}^n$ 内的分片光滑 k 维定向曲面, ω 是 S 上的 $k-$形式 (在 S 有切平面的那些点上有定义), 则

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega,$$

这里 $S_1, \cdots, S_m, \cdots$ 是 S 分解为光滑参数表示时的 k 维光滑面片, 片与片之交充其量只能是较低维的分片光滑曲面.

特别地, 我们看到, 改变曲面的定向将导致积分变号.

练 习

1. a) 设 x, y 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上的笛卡儿坐标. 试说明, 形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

是怎样的向量场的功形式.

b) 试求 a) 中的形式 ω 沿下列路径 γ_i 的积分:$[0,\pi] \ni t \overset{\gamma_1}{\longmapsto} (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$; $[0,\pi] \ni t \overset{\gamma_2}{\longmapsto} (\cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^2$; 路径 γ_3 由诸点 $(1,0), (1,1), (-1,1), (-1,0)$ 依次用线段连接而成; 路径 γ_4 由诸点 $(1,0), (1,-1), (-1,-1), (-1,0)$ 依次用线段连接而成.

2. 设 f 是在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内定义的光滑函数,γ 为 D 内以 $p_0 \in D$ 为始点, $p_1 \in D$ 为终点的光滑路径. 试求形式 $\omega = df$ 沿路径 γ 的积分.

3. a) 求形式 $\omega = dy \wedge dz + dz \wedge dx$ 沿 $\mathbb{R}^3$ 内标准单位方体的边界的积分, 边界用外法向定向.

b) 指出一个速度场, 使得 a) 中的形式 ω 是它的流量形式.

4. a) 设 x, y, z 是 $\mathbb{R}^3$ 内的笛卡儿坐标. 试求速度场, 使形式

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

是它的流量形式.

b) 求 a) 中的形式沿球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 的积分, 球面按外法向定向.

c) 试证, 场 $\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ 通过球面 $(x-2)^2+y^2+z^2 = 1$ 的流量为零.

d) 验证: c) 中的场, 通过环面 (它的参数方程见第 12 章 §1 例 4) 的流量也等于零.

5. 已知一定量的物质的压力 P、体积 V 及温度 T 之间, 存在着关系 $f(P,V,T) = 0$, 在热力学中叫做*状态方程*. 例如, 一克分子 (摩尔) 的理想气体, 其状态方程用*克拉珀龙公式* $\dfrac{PV}{T} - R = 0$ 表示, 其中 R 是普适气体常数.

因为这些量 P, V, T 由状态方程联系着, 所以知道了其中两个量, 原则上就能知道第三个. 即是说, 任何一个系统的状态都能用, 譬如, V, P 坐标平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点 (V, P) 刻画; 这时, 系统状态的演化过程, 作为时间 t 的函数, 对应着此平面上的一条路径.

设汽缸内装有气体, 可无摩擦地平移运动. 改变活塞位置, 靠消耗机械功, 可以改变包含于活塞与缸壁间的气体的状态. 反之, 改变气体的状态 (例如, 给它加热), 就能迫使气体完成机械功 (例如, 靠气体膨胀举起重物). 在本题以及下面的第 6、7、8 题中, 我们将认为所有过程进行的是如此缓慢, 以致在每个具体的时刻, 压力与温度的变化总是施于全部物质上. 因此在每个时刻, 系统都满足状态方程. 这就是所谓**拟静态过程**.

a) 设 γ 是 V, P 平面上的一条路径, 它对应于缸壁与活塞间的气体从状态 V_0, P_0 到 V_1, P_1 之拟静态过程. 试证, 在此路径上, 气体所做的机械功 A 由曲线积分 $A = \int_\gamma P dV$ 确定.

b) 试求一克分子理想气体由状态 V_0, P_0 沿以下诸路径变到状态 V_1, P_1 (图 85) 时所做的机械功. 路径 γ_{OLI} : 先是等压线 $OL(P = P_0)$, 然后是等容线 $LI(V = V_1)$; γ_{OKI} : 先是等容线 $OK(V = V_0)$, 再是等压线 $KI(P = P_1)$; γ_{OI} : 等温线 $T =$ 常数 (在这假定下, $P_0V_0 = P_1V_1$).

c) 试证, a) 中所得之活塞与缸壁间的气体所作的机械功的公式, 事实上这是一个普遍公式, 亦即, 这个公式对于任何由变形薄膜包裹的气体所做的机械功都有效.

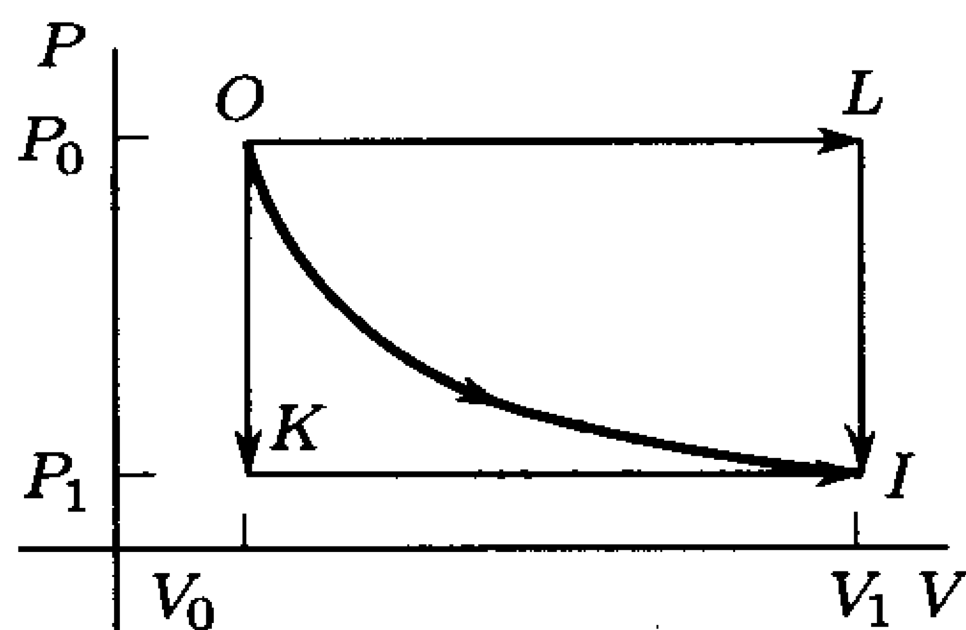


图 85

6. 系统因其状态的变化所获得的热量, 像其所做的机械功那样, 不仅与系统的初始及终结状态有关, 而且与转变的路径有关. 热容量是物质获得的热量与其温度变化之比, 它是物质及其热力学过程的重要特征. 热容量的精确定义可如下给出. 设 x 是状态平面 F 上的点 (坐标为 V, P 或 V, T, 或 P, T), 而 $e \in TF_x$ 是指示从 x 出发的位移方向的向量. 设 t 为小参数. 今考察由状态 x 沿平面 F 上的线段到状态 $x + te$ 的位移. 设 $\Delta Q(x, te)$ 是在此过程中物质所获得的热量, $\Delta T(x, te)$ 为物质温度的改变.

称量 $C(x, e) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta Q(x, te)}{\Delta T(x, te)}$ 为物质 (或系统) 对应于状态 x 及从这个状态出发的位移方向 e 的热容量.

特别地, 如果系统是绝热的, 亦即它与外面的介质没有热交换. 这就是**绝热过程**. 在状态平面 F 上, 与这种过程对应的曲线, 叫**绝热曲线**.

当状态沿着等温线 ($T =$ 常数) 变动时, 其对应的热容量为无限大.

特别常用的是, 沿着等容线 ($V =$ 常数) 及等压线 ($P =$ 常数) 变动时的热容量 $C_V = C(x, e_V), C_P = C(x, e_P)$. 实验表明, 对给定质量的一种物质, 在其状态变化得相当大的范围

内, 可以认为 C_V 与 C_P 实际上不变. 一克分子给定物质的热容量, 叫做**克分子热容量**, 并用大写字母表示 (不用小写, 以便与其他的热容量区别). 我们假定下边讨论的总是一克分子的物质.

据能量守恒定律, 在一定的过程中, 物质所得的热能 ΔQ, 内能的改变 ΔU 及它所做的机械功 ΔA 之间, 成立着关系 $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. 因此, 从状态 $x \in F$ 出发的小的变化 te 下, 物质所获热能, 应该是在点 x 处的形式 $\delta Q = dU + PdV$ 在向量 $te \in TF_x$ 的值 (参看问题 5c) 中的功的公式 PdV). 这就是说, 如果把 T 和 V 看成是状态的坐标, 而取 T 作为变化的参数 (沿非等温方向变动), 那么可得

$$C = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T} + P\frac{dV}{dT}.$$

导数 $\dfrac{dV}{dT}$ 确定了以 T, V 为坐标的状态平面上的点 x 所作的位移的方向. 特别地, 当 $\dfrac{dV}{dT} = 0$ 时, 则变动沿等容线 $V =$ 常数的方向进行. 于是得到 $C_V = \dfrac{\partial U}{\partial T}$. 如果 $P =$ 常数, 则 $\dfrac{dV}{dT} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=\text{常数}}$ (在一般情况下, $V = V(P,T)$ 是状态方程 $f(P,V,T) = 0$ 关于 V 解出的形式). 因此

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

这里右端的下标 P, V, T, 指出了当求各偏导数时, 固定那个状态参数, 把得到的 C_V 的式子代入 C_P, 即见

$$C_P - C_V = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

气体实验 (Joule①-Thomson 试验) 说明, 内能只与温度 T 有关, 亦即 $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$. 尔后, 在理想气体模型中, 把此取作假定. 这样一来, 对于理想气体, $C_P = C_V\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. 考虑到对于一克分子的理想气体有 $PV = RT$, 由此得到关系式 $C_P - C_V = R$, 称之为**迈耶②热力学方程**.

由于一克分子的气体的内能只与温度有关, 故可将形式 δQ 写成

$$\delta Q = \frac{\partial U}{\partial T}dT + PdV = C_V dT + PdV.$$

为了计算一克分子气体在状态沿路径 γ 变化时所获得的热量, 就需求形式 $C_V dT + PdV$ 沿 γ 的积分. 有时使用变量 V、P 对此形式更方便. 如果利用状态方程 $PV = RT$ 及关系式 $C_P - C_V = R$, 则得

$$\delta Q = C_P\frac{P}{R}dV + C_V\frac{V}{R}dP.$$

①焦耳 (Joule) (1818—1889) 英国物理学家, 他发现了电流的热效应定律, 并与迈耶各自独立地确定了热功当量.

②迈耶 (R. Mayer) (1814—1878) 德国学者, 就教育背景而言是位医生, 他提出了能量守恒和转化定律. 发现了热功当量.

a) 试求当气体沿其状态平面 F 上的路径 γ 改变其状态时, 一克分子气体所获热量的公式.

b) 把 C_P, C_V 看做常数, 试求沿问题 5 之 b) 指出的每条路径 $\gamma_{OLI}, \gamma_{OKI}, \gamma_{OI}$ 所对应的 Q 值.

c) 试(遵循泊松的思路)求出在坐标为 V, P 的状态平面 F 上, 通过点 (P_0, V_0) 的**绝热方程**. (泊松求出了, 在绝热情况, PV^{C_P/C_V} = 常数. 称 C_P/C_V 为给定气体的**绝热常数**. 空气的绝热常数 $C_P/C_V \approx 1.4$). 然后计算使一克分子与外面的介质绝热且处于状态 (V_0, P_0) 的气体的体积变成

$$V_1 = \frac{1}{2}V_0,$$

需做多少功.

7. 我们知道, 热机工质 (例如, 汽缸中在活塞作用下的气体) 状态变化的卡诺[①]循环是如下热力学过程 (图 86). 现有两个能量容量很大的物体, 加热物与冷却物 (例如蒸汽罐与大气) , 它们分别处于常温 $T_1, T_2 (T_1 > T_2)$ 下. 被考察的热机的工质 (气体), 具有温度 T_1, 且处于状态 1. 在与加热物接触, 由于沿等温线外压力减小, 气体就拟静力学地膨胀变为状态 2. 同时机器从加热物吸收了热量 Q_1, 并反抗外力做了功 A_{12}. 在状态 2 下, 气体绝热拟静态膨胀到状态 3, 它的温度暂时还没达到冷却物的温度 T_2. 这时机器也反抗外力作功 A_{23}. 在状态 3 下, 气体接触冷却物, 用增加压力的方法等温地压缩到状态 4. 这时对气体做了功 A_{34}, 而气体对冷却物放出了热量 Q_2. 状态 4 是这样选取的, 使从它能沿绝热线拟稳压缩回到原来的状态. 这样, 气体由状态 4 回到了状态 1. 这时, 对气体做了功 A_{41}. 经过这样一个循环 (卡诺循环), 气体 (即机器的工质) 的内能显然不变 (因为我们已经恢复到初始状态), 所以, 机器净作功 $A = A_{12} + A_{23} - A_{34} - A_{41} = Q_1 - Q_2$.

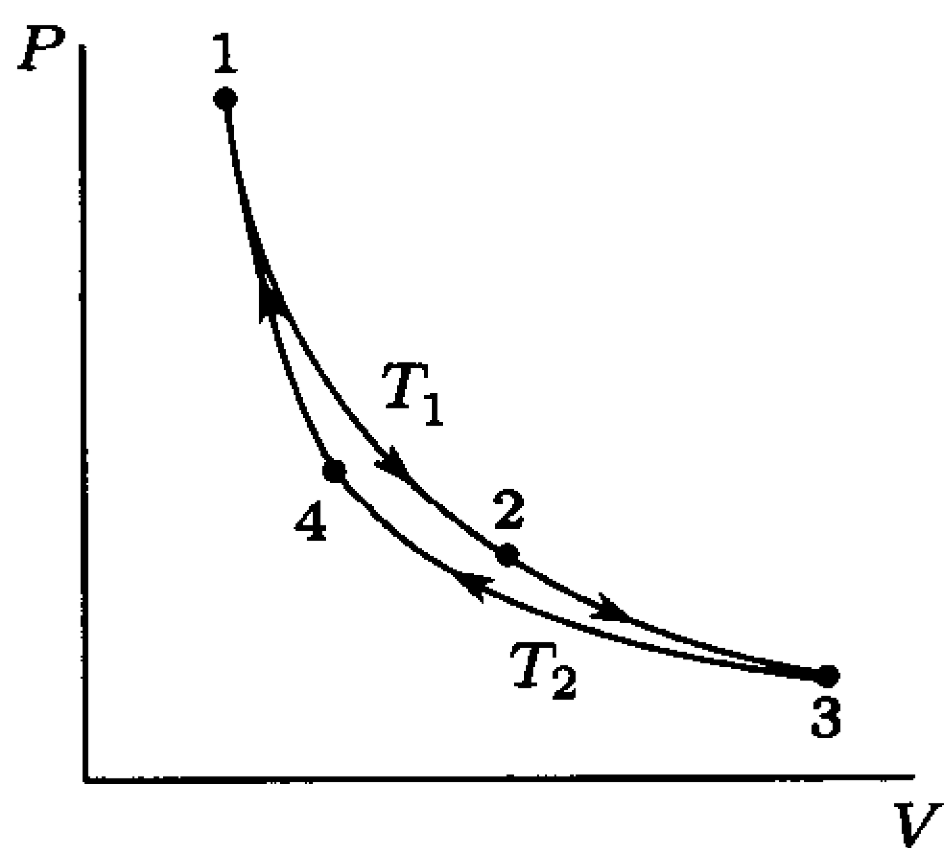


图 86

所加的热量 Q_1 只有一部分变成了所作的功 A. 自然地把 $\eta = \dfrac{A}{Q_1} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ 叫做**热机效率**.

a) 利用问题 6 之 a) 与 c) 所得的结果, 证明对于卡诺循环来说, 等式

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

成立.

① 卡诺(S. Carnot) (1796—1832) 法国工程师, 热力学创始人之一.

b) 试证卡诺第一定理 (卡诺的两个著名定理之一). *依卡诺循环工作的热机效率, 只与加热温度 T_1 及冷却温度 T_2 有关 (与机器的构造及工质的形式无关).*

8. 设有某个热机, 它的工质的状态平面为 F (参看问题 7), γ 是 F 上的闭路径, 它与热机的一个工作周期相对应. 工质与外部介质交换的热量及其交换时的温度满足*克劳修斯* [①] 不等式 $\int_\gamma \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0$. 这里 δQ 是在问题 6 中已谈及的热交换形式.

a) 证明, 对卡诺循环来说, (参看第 7 题) 克劳修斯不等式变成等式.

b) 试证: 如果热机工作周期 γ 可按反方向进行, 那么克劳修斯不等式将成为等式.

c) 设路径 γ 分成 γ_1 与 γ_2 两段, 在 γ_1 上热机的工质从外部获得热量, 而在 γ_2 上向周围介质散发热量. 又设 T_1 是热机的工质在 γ_1 上的最高温度, T_2 是它在 γ_2 上的最低温度. 最后, 设 Q_1 是在 γ_1 上获得的热量, Q_2 是在 γ_2 上放出的热量. 试根据克劳修斯不等式证明: $\frac{Q_2}{Q_1} \leqslant \frac{T_2}{T_1}$.

d) 试证, 对任何热机的热机效率成立估计式 $\eta < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ (见问题 7). 这是*卡诺第二定理*. (顺便估计蒸汽机的热效率, 已知蒸汽的最高温度不超过 150 ℃, 即 $T_1 = 423\mathrm{K}$, 而冷却器 —— 环境介质 —— 20℃, 即 $T_2 = 293\mathrm{K}$).

e) 比较问题 7,b) 与 8, d) 中的结果, 并验证, 当给定 T_1, T_2 的值时, 按卡诺循环工作的热机具有最大的热效率.

9. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ 叫做*可分离变量的方程*. 通常把它写成形如

$$g(y)dy = f(x)dx$$

的 "变量分离" 形式, 然后使它们的原函数相等

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx,$$

以 "解" 它. 试用微分形式语言给这一算法一个具有更广泛意义的数学论证.

§2 体积形式, 第一型积分与第二型积分

1. 物质曲面的质量

设 S 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内物质曲面. 假定已知曲面 S 上质量分布的 (面) 密度 $\rho(x)$, 要求确定整个曲面的质量.

为了解决这个问题, 首先应当注意, 在点 $x \in S$ 的面密度, 是点 x 的邻域里的曲面部分的质量 Δm 与这部分曲面的面积 $\Delta\sigma$ 之比 $\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}$, 当此邻域收缩趋于点 x 时的极限.

[①] 克劳修斯(Clausius) (1822—1888)是德国物理学家, 他奠定了热理论的力学基础. 在热力学中, 内能及熵的概念属于他, 在气体动力学理论中, 分子自由程的基本概念也属于他.

将曲面分成许多小块, 并假定 ρ 是 S 上的连续函数, 从而, 可以忽略在每小块上 ρ 的改变, 用关系式

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i)\Delta\sigma_i$$

求出 S_i 的质量, 其中 $\Delta\sigma_i$ 是曲面 S_i 的面积, 而 $\boldsymbol{x}_i \in S_i$.

将这些近似等式求和, 并将分法无限加细求极限, 就得到

$$m = \int_S \rho d\sigma. \tag{1}$$

显然对这里的沿曲面积分的记号需要加以说明, 应能导出具体计算公式.

我们注意, 根据问题提法本身, 等式 (1) 的左边与曲面 S 的定向无关, 因此, 在等式右边的积分也应这样. 一眼就看出, 这与我们在 §1 里详细讨论的曲面积分不一样. 这个问题的答案在于面积元素 $d\sigma$ 的定义. 下面就来分析这个问题.

2. 作为形式的积分的曲面面积

将 §1 中形式的积分定义 1 与引导我们作出面积定义的一整套论述 (第 12 章,§4) 加以比较, 就看到, 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内, 用参数式 $\varphi: D \to S$ 给出的 k 维曲面 S 的面积是某个形式 Ω 的积分. 我们暂时约定称这个形式为曲面 S 上的**体形式**或**体元素**.由第 12 章 §4 的 (5) 式, 在曲线坐标 $\varphi: D \to S$ 下 (即当转到参数域 D 时), 形式 Ω(严格说是 $\varphi^*\Omega$) 应有以下表达式:

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}(t)dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k, \tag{2}$$

其中 $g_{ij}(t) = \left\langle \dfrac{\partial\varphi}{\partial t^i}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial t^j} \right\rangle(t), i,j = 1,\cdots,k.$

在这个曲面的另一参数式 $\widetilde{\varphi}: \widetilde{D} \to S$ 下, 它用于沿区域 $\widetilde{D}$ 计算 S 的面积, 相应地, 则所要的对形式

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}(\tilde{t})d\tilde{t}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{t}^k, \tag{3}$$

进行积分, 其中 $\tilde{g}_{ij}(\tilde{t}) = \left\langle \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}^i}, \dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial \tilde{t}^j} \right\rangle(\tilde{t}), i,j = 1,\cdots,k.$

用 ψ 表微分同胚 $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}: \widetilde{D} \to D$, 这是从曲面 S 的坐标 $\tilde{t}$ 到坐标 t 的变换. 过去, 我们已算出 (参看第 12 章 §4 注 5)

$$\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}(\tilde{t}) = \sqrt{\det(g_{ij})}(\psi(\tilde{t})) \cdot |\det\psi'(\tilde{t})|. \tag{4}$$

同时显然有

$$\psi^*\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}(\psi(\tilde{t}))\det\psi'(\tilde{t})d\tilde{t}^1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{t}^k. \tag{5}$$

比较等式 (2)—(5), 即可看到, 若 $\det\psi'(\tilde{t}) > 0$, 则 $\psi^*\omega = \tilde{\omega}$; 若 $\det\psi'(\tilde{t}) < 0$, 则 $\psi^*\omega = -\tilde{\omega}$. 如果 ω 与 $\tilde{\omega}$ 是由 S 上的同一形式 Ω 分别用转移 $\varphi^*, \tilde{\varphi}^*$ 得来的, 则等式 $\psi^*(\varphi^*\Omega) = \tilde{\varphi}^*\Omega$, 或同样的, $\psi^*\omega = \tilde{\omega}$ 成立.

于是我们得到以下结论: 定义在参数化曲面 S 上、为求这个曲面的面积需要对其积分的那些形式, 当曲面的参数表示在 S 上给出不同的定向时, 彼此相差一个符号. 对于属于 S 的同一定向类的参数表示来说, 这些形式是一样的.

这样, S 上的体形式 Ω, 不仅由位于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面 S 本身确定, 还与 S 的定向有关.

这可能显得很离奇: 按照我们的观念, 曲面面积不应与曲面的定向有关!

但是, 要知道, 我们已得到了某个形式的积分给出的参数化曲面面积定义. 因此, 如果计算结果不应与曲面的定向有关, 那么, 由积分的性质, 对于曲面的不同定向, 我们就应该对不同的形式做积分.

我们来把以上考虑表述成确切的定义.

3. 体积形式

定义 1 设 $\mathbb{R}^k$ 为具有内积 $\langle\ ,\ \rangle$ 的定向欧氏空间, 而 Ω 是斜对称 $k-$ 形式. 那么, 称 Ω 是 $\mathbb{R}^k$ 上与给定的定向和内积相应的**体形式**, 如果它在 $\mathbb{R}^k$ 的给定定向类的标准正交标架上的值为 1.

显然, $k-$ 形式在标架 $e_1,\cdots,e_k$ 上的值, 完全确定了这个形式.

还应注意, 形式 Ω 不是由个别的标准正交标架确定, 而是由它的定向类来确定.

◀ 实际上, 如果 $e_1,\cdots,e_k$ 及 $\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_k$ 是同一定向类中的两个标架, 则从第二组基底变到第一组基底的变换 O 是正交矩阵, 且 $\det O=1$. 因此,

$$\Omega(e_1,\cdots,e_k)=\det O\cdot\Omega(\tilde{e}_1,\cdots\tilde{e}_k)=\Omega(\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_k)=1.\ ▶$$

如果在 $\mathbb{R}^k$ 中固定一个正交标准基 $e_1,\cdots,e_k$, 而 $\pi^1,\cdots,\pi^k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中向相应坐标轴的射影, 则显然有

$$\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^k(e_1,\cdots,e_k)=1$$

且

$$\Omega=\pi^1\wedge\cdots\wedge\pi^k.$$

因此,

$$\Omega(\xi_1,\cdots,\xi_k)=\begin{vmatrix}\xi_1^1 & \cdots & \xi_1^k\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_k^1 & \cdots & \xi_k^k\end{vmatrix}.$$

这是由有序的诸向量 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 所张成的平行多面体的体积.

定义 2 设 S 为位于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑 $k-$ 维定向曲面, 则在 S 的每个切平面 TS_x 上, 存在着与 S 的定向和谐的定向, 以及由 $\mathbb{R}^n$ 中的数量积诱导出的数量积, 而这表明, 也存在体形式 $\Omega(x)$. 这时在 S 上产生的微分 $k-$ 形式 Ω 叫做 S 上由 S 到 $\mathbb{R}^n$ 中的嵌入诱导出的**体形式** (或**体元素**).

定义 3 *定向光滑曲面的面积*是与曲面上选定的定向相应的体形式沿此曲面的积分.

当然, 这个用形式言语叙述的、直至每个细节都很确切的面积定义, 与第 12 章 §4 定义 1 是一致的. 那个定义是在讨论用参数式给出的 $k-$ 维光滑曲面 $S \subset \mathbb{R}^n$ 时做出的.

◀ 实际上, 曲面的参数表示确定了曲面的定向和曲面的一切平面 TS_x 的定向. 如果 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k$ 是 TS_x 的标架, 且属 TS_x 内固定的定向类, 那么, 由体形式 Ω 的定义 2 与定义 3, 得

$$\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) > 0.$$

但这时 (参看第 12 章 §4, 等式 (2))有

$$\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_k) = \sqrt{\det(\langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \rangle)}. \quad ▶ \tag{6}$$

注意, 形式 $\Omega(x)$ 本身在 TS_x 的任一组向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_h$ 上有定义, 但等式 (6) 只在 TS_x 的定向类中的标架有效.

还要注意, 体形式只对定向曲面有定义, 所以, 例如对 $\mathbb{R}^3$ 中的默比乌斯带谈体形式就没有意义, 虽然能在此曲面的每个有向小块内讨论这种形式.

定义 4 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k-$ 维分片光滑 (定向或不定向) 曲面, $S_1, \cdots, S_m, \cdots$ 是 S 的有限个或可数个光滑参数化的小曲面, 任二者如果相交, 只能是不高于 $k-1$ 维的曲面, 且 $S = \bigcup\limits_i S_i$. 称所有曲面 S_i 的面积之和为*曲面 S 的面积*(或*$k-$ 维体积*).

在这种意义下, 我们能够谈 $\mathbb{R}^3$ 中默比乌斯带的面积, 或同样地也可求其质量, 假定这个物质曲面具有单位面密度的话.

定义 4 的正确性 (即所得面积值与 S 分为 $S_1, \cdots, S_m, \cdots$ 的分法的无关性) 可用传统的论证方法去验证.

4. 在笛卡儿坐标下体积形式的表示

设 S 为定向欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑超曲面 ($n-1$ 维). 以它的连续单位法向量场 $\boldsymbol{\eta}(x) (x \in S)$ 做为 S 的定向. 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 ($n-$ 维) 体形式,Ω 是 S 上的 (($n-1$)$-$ 维) 体形式.

如果在切空间 TS_x 中从由 TS_x 的单位法向量 $\boldsymbol{\eta}(x)$ 给定的定向类中取标架 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$, 则显然可得下面等式:

$$V(x)(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}) = \Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}). \tag{7}$$

◀ 因为, 在所设条件下, 两边都非负, 而它们在数量上相等的原因在于, 由向量 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ 张成的平行体的体积等于底面积 $\Omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-1})$ 乘以高 $|\boldsymbol{\eta}| = 1$. ▶

但是,

$$V(x)(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=\begin{vmatrix}\eta^1 & \cdots & \eta^n\\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_{n-1}^1 & \cdots & \xi_{n-1}^n\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\eta^i(x)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}).$$

这里 $x^1,\cdots,x^n$ 是 x 关于定向标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的笛卡儿坐标, 而微分 dx^i 上方的弧表示在这一项中不出现 dx^i.

这样, 定向超曲面 $S\subset\mathbb{R}^n$ 的体形式有以下坐标表示式:

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\eta^i(x)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}).\tag{8}$$

从几何方面考虑得知, 对于固定的 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 有

$$\langle\boldsymbol{\eta}(x),\boldsymbol{e}_i\rangle\Omega(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1})=V(x)(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}).\tag{9}$$

最后的这个等式说明,

$$\eta^i(x)\Omega(x)=(-1)^{i-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n(\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-1}).\tag{10}$$

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的二维曲面 S, 常用 $d\sigma$ 或 dS 表示它的体元素. 不应把它理解为某个形式 σ 或 S 的微分, 这只是一个记号. 如果 x,y,z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡儿坐标, 则用这些记号,(8) 与 (10) 式可写成:

$$d\sigma=\cos\alpha_1 dy\wedge dz+\cos\alpha_2 dz\wedge dx+\cos\alpha_3 dx\wedge dy,$$

$$\cos\alpha_1 d\sigma=dy\wedge dz,$$

$$\cos\alpha_2 d\sigma=dz\wedge dx,\quad \text{(在坐标面上的射影的面积)}.$$

$$\cos\alpha_3 d\sigma=dx\wedge dy$$

这里 $(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3)(x)$ 是 S 在 $x\in S$ 处单位法向量的方向余弦 (坐标). 在这些等式中, 其实, 在等式 (8) 和 (9) 中也一样, 为了避免误解, 当然, 更好是在右方置以记号 $|_S$, 表明相应的形式在曲面 S 上的限制, 但是为了不使公式过于繁杂, 我们还是省掉了这些记号.

5. 第一型与第二型积分

在一系列问题中都会出现第 (I) 型积分, 上面所讨论的已知面密度求曲面质量的问题是它们的典型代表. 常把它们叫做*函数沿曲面的积分或第一型积分*.

定义 5 称微分型式 $\rho\Omega$ 的积分

$$\int_S \rho\Omega \tag{11}$$

为函数 ρ 沿定向曲面 S 的积分, 其中 Ω 是 S 上 (与计算积分时所选的 S 的定向相应) 的体形式.

显然, 这样定义的积分 (11) 与 S 的定向无关, 因为 S 的定向的改变已反映在相应的体形式的替换中了.

我们要强调, 实质上这里说的不是函数的积分, 而是一种特殊的形式沿着定义了体形式的曲面 S 的积分.

定义 6 设 S 是分片光滑的 (定向或无定向) 曲面,ρ 是 S 上的函数. 将 S 做定义 4 中所描述的分解: $S = \bigcup\limits_i S_i$. 则称函数 ρ 沿各个 S_i 积分之和 $\sum\limits_i \int_{S_i} \rho\Omega$ 为函数 ρ 沿曲面 S 的积分 (11).

通常, 称积分 (11) 为*第一型曲面积分*.

例如, 用物质沿曲面分布的面密度 ρ 来表示曲面质量的积分 (1), 就是这样的曲面积分.

为了把第一型积分具有与曲面定向无关的特点标识出来, 常称形式沿定向曲面的积分为*第二型曲面积分*.

注意, 因为在线性空间上, 次数等于空间的维数的诸斜对称形式都成比例, 所以在 k 维定向曲面 S 上给定的任何 $k-$ 形式 ω 与 S 上的体形式 Ω 满足关系 $\omega = \rho\Omega$, 其中 ρ 是 S 上与 ω 有关的函数. 因此,

$$\int_S \omega = \int_S \rho\Omega,$$

亦即任何第二型积分都能写成相应的第一型积分的形式.

例 1 §1 中, 积分 (2′) 表示的是场 $\boldsymbol{F}$ 在路径 $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 上的功, 它可以写成第一型积分

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}\rangle ds, \tag{12}$$

这里 s 是 γ 上的自然参数, ds 是长度元素 (1− 形式), 而 $\boldsymbol{e}$ 是单位速度向量, 其本身并没有 γ 定向的任何信息. 从用积分 (12) 研究的问题的物理意义的角度看, 与 §1 的积分 (1) 一样, 它也有很强的表现力.

例 2 设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是用单位法向量 $\boldsymbol{n}(x)$ 定向的曲面.§1 内速度场 $\boldsymbol{V}$ 通过 S 的流量 (3), 能写成第一型曲面积分

$$\int_S \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma, \tag{13}$$

这里 S 定向的信息包含在法向场 $\boldsymbol{n}$ 的方向之中.

(13) 式中积分号下的表达式的几何和物理含义, 如同 §1 纯粹的计算公式 (6) 中积分号下的表达式的相应意义一样, 是明晰可见的.

我们提醒读者注意, 经常遇到 $d\boldsymbol{s} := \boldsymbol{e}ds, d\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{n}d\sigma$ 这两种记号, 这里引入了长度向量元素与面积向量元素. 用这种表示法, 积分 (12) 与 (13) 就可写成

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle \text{ 与 } \int_S \langle \boldsymbol{V}, d\boldsymbol{\sigma}\rangle.$$

从物理的角度来说, 这是最合适的写法. 为了简单, 向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的内积 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle$, 经常写作 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

例 3 法拉第[①]定律断言, 变化着的磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的闭导线 Γ 内产生的电动力, 与通过闭路 Γ 所围曲面 S 的磁通量的变化速度成正比. 设 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度向量. 考虑到问题中物理量的定向关系以及上边采用的记号, 法拉第定律可以表示成如下的等式

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

沿着 Γ 积分的积分号上的那个圆圈, 是为了强调积分是沿闭回路作的. 场沿闭回路做的功, 常被称为*场沿此闭路的环流量*. 因此, 按法拉第定律, 由变动的磁场所产生的电场强度向量的环流量, 等于通过闭曲线 Γ 包围的曲面 S 的磁通量的变化速度的相反数.

例 4 安培[②]定律

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

(其中 $\boldsymbol{B}$ 是磁感应向量, $\boldsymbol{j}$ 是电流密度向量, ε_0, c 都是量纲常数) 断言, 由电流产生的磁场沿回路 Γ 的磁感应环量与流过回路 Γ 所围曲面 S 的电流强度成比例.

我们已经讨论了第一型积分与第二型积分. 读者会注意到, 这两个术语的差别非常有限. 实际上, 如果积分确与用以计算它的坐标系的选择无关的话, 我们能积分而且只积分微分形式. 此外并没有什么其他东西的积分.

练 习

1. 对等式 (7) 与等式 (9) 给以正式的证明.

2. 设 γ 是光滑曲线, ds 是 γ 上的长度元素.

[①]法拉第(M. Faraday) (1791—1867) 杰出的英国物理学家, 电磁场学说的创始人.

[②]安培 (A. M. Ampère) (1775—1836). 法国物理学家与数学家. 现代电动力学奠基人之一.

a) 试证 $\left|\int_\gamma f(s)ds\right| \leqslant \int_\gamma |f(s)|ds$, 这里 f 是定义在 γ 上并且使不等式两端都有意义的函数.

b) 设在 γ 上 $|f(s)| \leqslant M$, 而 l 是曲线 γ 的长. 试证 $\left|\int_\gamma f(s)ds\right| \leqslant Ml$.

c) 关于沿着 $k-$ 维光滑曲面的第一型积分, 叙述并证明类似于问题 a), b) 的一般性命题.

3. a) 设分布在曲线 γ 上的质量的线密度为 $\rho(x)$. 试证, 其质量中心的坐标 (x_0^1, x_0^2, x_0^3) 由下面关系式确定:

$$x_0^i \int_\gamma \rho(x)ds = \int_\gamma x^i \rho(x)ds, i = 1, 2, 3.$$

b) 写出 $\mathbb{R}^3$ 中螺旋线的方程, 并求出一段螺旋线的质量中心的坐标. 在这里, 我们认为曲线上质量分布的线密度是等于 1 的常数.

c) 设曲面 S 的面密度为 ρ, 试求 S 的质量中心公式, 并计算沿半球面均匀分布的质量中心.

d) 设曲面 S 上以面密度 ρ 分布着质量. 试求其惯性矩公式.

e) 车轮外胎的质量为 30 kg, 形如环面, 外径 1 m, 内径 0.5 m. 在保持轮子平衡的条件下把它安装在平衡架上, 拨转它到速度大致相当 100 km/h 时, 然后用闸瓦将它制动; 这些闸瓦散靠在一个直径为 40 cm 而宽为 2 cm 的钢盘上. 假定将轮子制动停止时, 转动轮胎的全部动能都变成了钢盘的热. 试估计这个钢盘温度升高多少. 钢的比热假定等于 $c = 420\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}$

4. a) 设在点 (x_0, y_0, z_0) 处有质量为 m_0 的质点, 又有物质曲线 γ, 其线密度为 ρ. 试证 γ 作用于 m_0 的力 $\boldsymbol{F}$ 的公式为

$$\boldsymbol{F} = G_{m_0} \int_\gamma \frac{\rho}{|\boldsymbol{r}|^3} \boldsymbol{r} ds,$$

其中 G 是引力常数, $\boldsymbol{r}$ 是以 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 为坐标的向量.

b) 对质量分布于曲面 S 上的情况, 求相应的公式.

c) 求均匀物质直线的引力场.

d) 求均匀物质球面的引力场 (包括球面所界球体之外场和内场).

e) 求均匀物质球在空间产生的引力场 (包括球内场和球外场).

f) 把地球看作是液态球. 点距球心之距离记作 r, 试用 r 表出在任一点处的压力 (地球半径为 6 400 km, 平均密度为 $6\mathrm{g/cm^3}$).

5. 设 γ_1 与 γ_2 是两条闭导线, 沿 γ_1, γ_2 分别有电流 J_1, J_2. 设 $d\boldsymbol{s}_1, d\boldsymbol{s}_2$ 是这些导线的长度向量元素, 其方向与电流方向一致, $\boldsymbol{R}_{12}$ 是从 $d\boldsymbol{s}_1$ 到 $d\boldsymbol{s}_2$ 的方向向量, 而 $\boldsymbol{R}_{21} = -\boldsymbol{R}_{12}$.

据毕奥 – 萨伐尔①定律, 由第一个向量元素对第二个向量元素的感应力等于

$$d\boldsymbol{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c_0^2 |\boldsymbol{R}_{12}|^3} [d\boldsymbol{s}_2, [d\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{R}_{12}]],$$

其中方括号表示向量的向量积, 而 c_0 为量纲常数.

a) 证明, 局限在人为构造的毕奥 – 萨伐尔微分公式的水平上, 可能发生 $d\boldsymbol{F}_{12} \neq d\boldsymbol{F}_{21}$ 的情形, 即 "作用不等于反作用".

---

①毕奥 (Biot) (1774—1862), 萨伐尔 (Savart) (1791—1841) 都是法国物理学家.

b) 试对于导线 γ_1 与 γ_2 间的全部的相互作用力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 与 $\boldsymbol{F}_{21}$, 写出 (积分) 公式来, 并确认 $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

6. 余面积公式 (柯劳恩洛德 – 费德罗公式)

设 M^m 和 N^n 分别是高维欧氏空间中的 m 和 n 维光滑曲面 (M^m, N^n 也可以是抽象黎曼流形. 但现在这并不重要). 假设 $m \geqslant n$.

设 $f: M^m \to N^n$ 是光滑映射. 当 $m > n$ 时, 映射 $df(x): T_xM^m \to T_{f(x)}N^n$ 有非空核 $\ker df(x)$. 用记号 $T_x^\perp M^m$ 表示 $\ker df(x)$ 的正交补, 而用 $J(f,x)$ 表示映射 $df(x)|_{T_x^\perp M^m}: T_x^\perp M^m \to T_{f(x)}N^n$ 的雅可比. 如果 $m = n$, 则 $J(f,x)$ 就与通常的雅可比一致.

设 $dv_k(p)$ 表示 $k-$ 维曲面在点 p 处的体积形式.

a) 试利用 (如果需要) 富比尼定理和秩定理 (光滑曲面的局部标准形式) 证明以下柯劳恩洛德 –费德罗公式:

$$\int_{M^m} J(f,x)dv_m(x) = \int_{N^n} v_{m-n}(f^{-1}(y))dv_n(y).$$

b) 试证, 如果 A 是 M^m 的可测子集, 则

$$\int_A J(f,x)dv_m(x) = \int_{N^n} v_{m-n}(A \cap f^{-1}(y))dv_n(y).$$

这是一般的柯劳恩洛德 –费德罗公式.

c) 试证以下加强的萨德定理 (在萨德定理最简单的变形中断言光滑映射的临界点集合的像的测度为零). (参看第 11 章 §5 练习 8).

如前, 设 $f: M^m \to N^n$ 是光滑映射, 而 K 是 M^m 中的紧集, 且对一切 $x \in K$ 有 $\text{rang}df(x) < n$. 那么, $\int_{N^n} v_{m-n}(K \cap f^{-1}(y))dv_n(y) = 0$. 试由此再一次推出上述的萨德定理的最简单的变形.

d) 验证, 如果 $f: D \to \mathbb{R}$ 和 $u: D \to \mathbb{R}$ 是定义在正则区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的两个光滑函数, 而且 u 在 D 中没有临界点, 则

$$\int_D f dv = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{u^{-1}(t)} f \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

e) 设 $V_f(t)$ 是集合 $\{x \in D | f(x) > t\}$ 的 (体积) 测度且函数 f 在区域 D 中非负、有界.

试证, $\int_D f dv = -\int_{\mathbb{R}} t dV_f(t) = \int_0^\infty V_f(t)dt$.

f) 设 $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ 且 $\varphi(0) = 0$, 而 $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$ 且 $V_{|f|}(t)$ 是集合 $\{x \in D \,|\, |f(x)| > t\}$ 的测度. 试证:

$$\int_D \varphi \circ f dv = \int_0^\infty \varphi'(t)V_{|f|}(t)dt.$$

§3 分析的基本积分公式

我们知道, 牛顿 – 莱布尼茨公式是分析学的最重要的公式. 本节将得到格林公式, 高斯 – 奥斯特洛格拉得斯基公式以及斯托克斯公式. 这些公式, 一方面是牛顿 – 莱布尼茨公式的推广, 另一方面, 它们合在一起构成积分学中最有用的部分.

在本节前三段中, 不追求叙述的普遍性, 而是就一些直观材料得到分析中的三个古典积分公式. 在第四段中, 我们将把它们归纳成一个普遍的斯托克斯公式, 从形式上, 可以认为它独立于前三个公式.

1. 格林公式[①]

格林公式如下:

命题 1 设 $\mathbb{R}^2$ 是建立了 x, y 坐标系的平面, $\overline{D}$ 是这平面内的紧区域, 它的边界是一条光滑曲线; 又设 P, Q 是闭区域 $\overline{D}$ 上的光滑函数. 这时, 成立以下关系

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial \overline{D}} Pdx + Qdy, \tag{1}$$

其中右端是沿区域 $\overline{D}$ 的边界 $\partial\overline{D}$ 的积分, $\partial\overline{D}$ 的方向与区域 $\overline{D}$ 本身的方向和谐.

首先考察 $\overline{D}$ 是正方形

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

而在 I 内 $Q \equiv 0$ 的情况. 这时格林公式呈以下形式:

$$\iint\limits_{I} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial I} Pdx, \tag{2}$$

现在我们来证明它.

◀ 把重积分变为累次积分, 并应用牛顿 – 莱布尼茨公式, 就得到

$$\iint\limits_{I} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} dy$$
$$= \int_0^1 (P(x, 1) - P(x, 0))dx = -\int_0^1 P(x, 0)dx + \int_0^1 P(x, 1)dx.$$

证明到这里就完成了, 剩下的就是定义与解释所得到的公式了. 问题在于最后两个积分的差, 恰好就是等式 (2) 右端的积分.

①格林 (D. Green) (1793—1841) 英国数学家和数学物理学家. 在威斯敏斯特的牛顿墓被五个小墓碑环抱着, 上边写着五个光辉的名字: 法拉第, 汤姆森 (凯尔文勋爵), 格林, 麦克斯韦, 狄拉克.

实际上, 分段光滑的曲线 ∂I 分成了四段 (图 87), 可以把它们看做是以下用参数表示的曲线

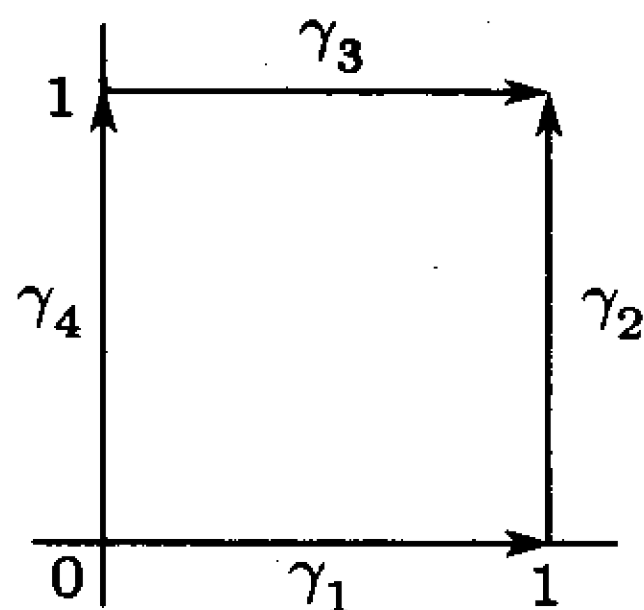


图 87

$$\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \text{ 其中 } x \overset{\gamma_1}{\longmapsto} (x,0),$$
$$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \text{ 其中 } y \overset{\gamma_2}{\longmapsto} (1,y),$$
$$\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \text{ 其中 } x \overset{\gamma_3}{\longmapsto} (x,1),$$
$$\gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \text{ 其中 } y \overset{\gamma_4}{\longmapsto} (0,y).$$

根据 1- 形式 $\omega = Pdx$ 沿曲线积分的定义, 有

$$\int_{\gamma_1} P(x,y)dx := \int_{[0,1]} \gamma_1^*(P(x,y)dx) := \int_0^1 P(x,0)dx,$$
$$\int_{\gamma_2} P(x,y)dx := \int_{[0,1]} \gamma_2^*(P(x,y)dx) := \int_0^1 0dy = 0,$$
$$\int_{\gamma_3} P(x,y)dx := \int_{[0,1]} \gamma_3^*(P(x,y)dx) := \int_0^1 P(x,1)dx,$$
$$\int_{\gamma_4} P(x,y)dx := \int_{[0,1]} \gamma_4^*(P(x,y)dx) := \int_0^1 0dy = 0.$$

此外, 根据命题 1 中指出的对区域边界定向的取法, 以及曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 所标出的定向, 显然有

$$\begin{aligned}\int_{\partial I} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{-\gamma_3} \omega + \int_{-\gamma_4} \omega \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_4} \omega,\end{aligned}$$

其中 $-\gamma_i$ 是曲线 γ_i, 但其定向与由映射 γ_i 给定的定向相反.

因此等式 (2) 成立 ►

类似地可验证

$$\iint\limits_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\partial I} Qdy \tag{3}$$

将 (2),(3) 两式相减, 就得到关于正方形 I 的格林公式

$$\iint\limits_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial I} Pdx + Qdy. \tag{1'}$$

注意, P, Q 在格林公式 (1) 及等式 (2),(3) 中都不是对称的. 这种非对称性与 x, y 的非对称性有关, 因为 x, y 是有顺序的, 这种顺序确定了 $\mathbb{R}^2$ 上的以及 I 上的定向.

证得的关系式 (1′), 如果用微分形式语言表达, 就可写成

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega, \tag{1''}$$

这里的 ω 是 I 上任意的光滑 1− 形式. 上式右端是形式 ω 在 I 的边界 ∂I 上的限制的积分.

显然可以把 (2) 式的证明推广: 如果 D_y 不是正方形, 而是"曲线四边形", 它的两个侧边是两条竖直的线段 (也有可能蜕化为点), 而其他两边是 x 轴的线段 $[a,b]$ 上的分片光滑函数 $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ 的图像, 那么

$$\iint\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\partial D_y} Pdx. \tag{2'}$$

与此类似, 如果有关于 Oy 轴的这样的一个"四边形" D, 即有两水平边的曲边四边形, 那么对它就成立等式

$$\iint\limits_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial D_x} Qdy. \tag{3'}$$

今假定区域 $\overline{D}$ 能分为有限个 D_y 型区域 (图 88). 这时, 对于这个区域公式 (2′) 也成立.

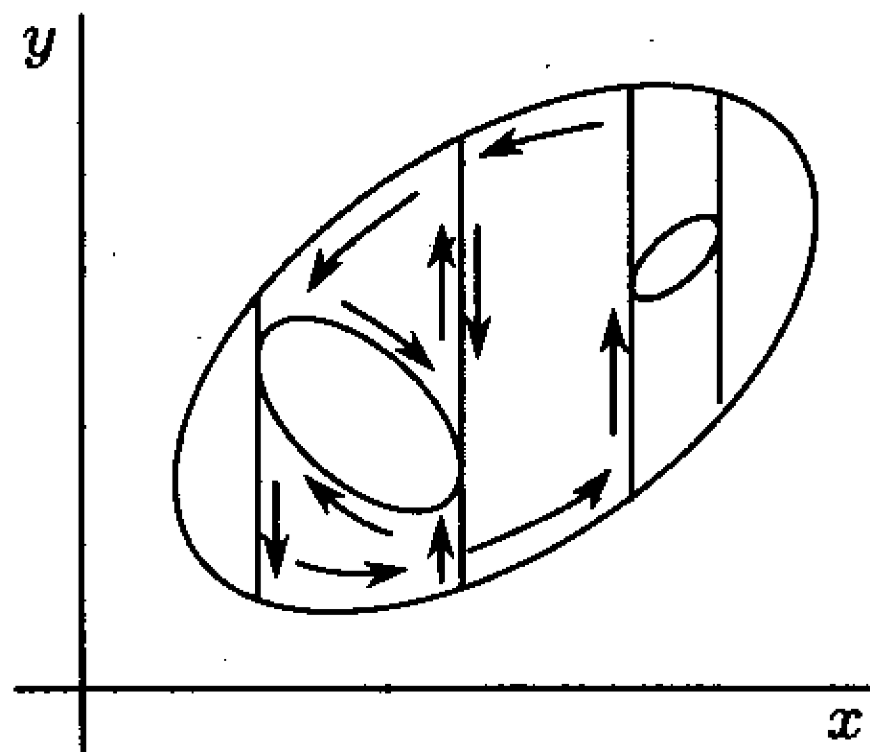


图 88

◀ 实际上, 根据重积分的可加性, 沿区域 $\overline{D}$ 的重积分等于沿 $\overline{D}$ 分解成的一切 D_y 型小区域上的积分的和. 对于每个小区域来说 (2′) 成立, 即沿着它的重积分等于形式 Pdx 沿着它的定向边界的积分. 但是在相邻两块小区域的公共边界部分上诱导的定向彼此相反, 所以在把沿着所有区域的边界的积分相加的结果中, 它们彼此抵消, 显然留下来的只有沿区域 $\overline{D}$ 的边界 $\partial\overline{D}$ 本身的积分. ▶

类似地, 如果区域 $\overline{D}$ 能分解成 D_x 型区域, 那么对 $\overline{D}$ 来说,(3′) 型的等式就成立.

我们约定把既能分解成 D_x 型小区域, 又能分解成 D_y 型小区域的区域, 暂时叫做**简单区域**.实际上, 对于一切实用目的, 这已是足够丰富的一类区域了.

对于简单区域, 把两个关系式 (2′), (3′) 都写出来, 相加之后即得 (1) 式

于是对于简单区域格林公式得证.

在这里我们不打算对它进行更加细致的讨论 (关于这一点, 请参看后面的习题 2), 而来展示另一条更好的非常有成效的途径. 建立等式 (1′) 与 (1″) 以后, 即可沿这条途径进行研究.

设 C 是用正方形 I 上的光滑映射 $\varphi: I \to C$ 得到的区域. 如果 ω 是 C 上的光滑 1− 形式, 就有

$$\int_C d\omega := \int_I \varphi^* d\omega = \int_I d\varphi^*\omega \overset{!}{=} \int_{\partial I} \varphi^*\omega =: \int_{\partial C} \omega, \tag{4}$$

其中惊叹号是表示我们已证明过这个等式 (参看 (1″)).(4) 中两头的两个等式是定义或定义的直接推论; 余下的就是左边第二个等式涉及外微分关于坐标系的无关性.

这是说, 格林公式对区域 C 也成立.

最后, 如果定向区域 $\overline{D}$ 能分成有限多个 C 型域, 那么, 根据上面已知, 沿着区域 C_i 的边界上的积分中, 包含在 D 内的部分上的积分必互相抵消, 就得到

$$\int_{\overline{D}} d\omega = \sum_i \int_{C_i} d\omega = \sum_i \int_{\partial C_i} \omega = \int_{\partial \overline{D}} \omega. \tag{5}$$

亦即, 对于区域 $\overline{D}$, 格林公式也成立.

能够证明, 任何具分片光滑边界的区域必属于上述这类区域, 但我们不去证它, 因为稍后 (第 15 章) 将叙述一种行之有效的技巧, 避免与之类似的几何上的困难, 而代之以解较简单的分析问题.

我们给出几个使用格林公式的例子.

例 1 设在 (1) 中 $P=-y, Q=x$. 则得

$$\int_{\partial D} -ydx + xdy = \int_D 2dxdy = 2\sigma(D),$$

其中 $\sigma(D)$ 表示区域 D 的面积. 于是, 利用格林公式即可得到我们曾经遇到过的用沿着区域的定向边界的线积分来表示该区域面积的公式

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy = -\int_{\partial D} ydx = \int_{\partial D} xdy.$$

特别地, 将它用于热机作功问题时, 即可推知当热机的工质状态沿着闭回路 γ 改变时, 热机所做的功 $A = \int_\gamma PdV$ 等于在 P, V 状态平面上的曲线 γ 所包围的区域的面积 (见 §1, 习题 5).

例 2 设 $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leqslant 1\}$ 是平面上的闭圆盘. 试证, 闭圆盘到自身的任何光滑映射 $f: \overline{B} \to \overline{B}$, 至少有一个不动点 (即使得 $f(p)=p$ 的点 $p \in \overline{B}$).

◀ 假如映射 f 没有不动点. 则对于任何 $p \in \overline{B}$, 恰好存在一条以 $f(p)$ 为顶点并且过 p 的射线, 此射线与圆盘 $\overline{B}$ 的边界交于点 $\varphi(p) \in \partial B$. 因此, 得到一个映射 $\varphi: \overline{B} \to \partial\overline{B}$. 容易看出, 它在圆的边界 $\partial\overline{B}$ 上是个恒等映射, 而在整个圆盘上, 它与映射 f 有一样的光滑性. 现在我们来证明这样的映射 φ 不可能存在.

在区域 $\mathbb{R}^2 \setminus O$ (去掉原点的平面) 中, 我们来研究一下在 §1 例1中已经见到的那个形式 $\omega = \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. 直接验证即知 $d\omega = 0$. 因为 $\partial\overline{B} \subset \mathbb{R}^2 \setminus O$, 所以当存在映射 $\varphi: \overline{B} \to \partial\overline{B}$ 时, 就能得到 $\overline{B}$ 上的形式 $\varphi^*\omega$, 并且有 $d\varphi^*\omega = \varphi^* d\omega = \varphi^* 0 = 0$. 因此据格林公式就有

$$\int_{\partial\overline{B}} \varphi^*\omega = \int_{\overline{B}} d\varphi^*\omega = 0.$$

但是, φ 在 $\partial\overline{B}$ 上的限制是恒等映射, 所以

$$\int_{\partial\overline{B}}\varphi^*\omega=\int_{\partial\overline{B}}\omega$$

但据 §1 例 1, 最后这个积分不是零. 所得的矛盾说明上边陈述的命题成立. ▶

当然, 这个命题对于任意维数的球 $\overline{B}$ 都正确 (见例 5). 此外, 它不只是对光滑映射正确, 对任何连续映射 $f:\overline{B}\to\overline{B}$ 也正确. 在这种普遍情况下, 它叫做布劳威尔①*不动点定理*.

2. 高斯 – 奥斯特罗格拉德斯基公式

格林公式把沿平面区域边界的积分与沿该区域的积分联系了起来. 与此类似, 下面我们引进高斯 – 奥斯特罗格拉德斯基公式, 它把沿着空间区域边界的积分与沿着该区域的积分联系起来.

命题 2 *设 $\mathbb{R}^3$ 是具坐标系 x,y,z 的空间; $\overline{D}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内的紧区域, 它的边界是分片光滑的曲面; P,Q,R 是闭域 $\overline{D}$ 上的光滑函数.*

那么, 成立下面关系

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_{\overline{D}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\\ =&\iint\limits_{\partial\overline{D}}Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy.\end{aligned}}\tag{6}$$

高 – 奥公式 (6) 的推证, 可逐步地重复格林公式的推导, 当然要做一些明显的改变. 为了使这种重复不是那么完全逐字逐句的, 我们立即考察的不是 $\mathbb{R}^3$ 中的小立方体, 而是图 89 中画的区域 D_z, 它是由母线平行于 z 轴的柱面, 以及定义在同一个区域 $G\subset\mathbb{R}^2_{xOy}$ 上的分片光滑函数 φ_1,φ_2 的图像做成的两个帽形曲面包围而成的区域. 我们验证以下的公式对区域 D_z 成立

$$\iiint\limits_{D_z}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{\partial D_z}Rdx\wedge dy.\tag{7}$$

◀ $$\iiint\limits_{D_z}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint\limits_{G}dxdy\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz$$

$$=\iint\limits_{G}(R(x,y,\varphi_2(x,y))-R(x,y,\varphi_1(x,y)))dxdy$$

$$=-\iint\limits_{G}R(x,y,\varphi_1(x,y))dxdy+\iint\limits_{G}R(x,y,\varphi_2(x,y))dxdy.$$

①布劳威尔 (L. E. Brouwer) (1881—1966), 著名的荷兰数学家. 他的名字与拓扑学的一系列基本定理, 以及导致所谓直觉主义数学哲学概念的数学基础的分析联系在一起.

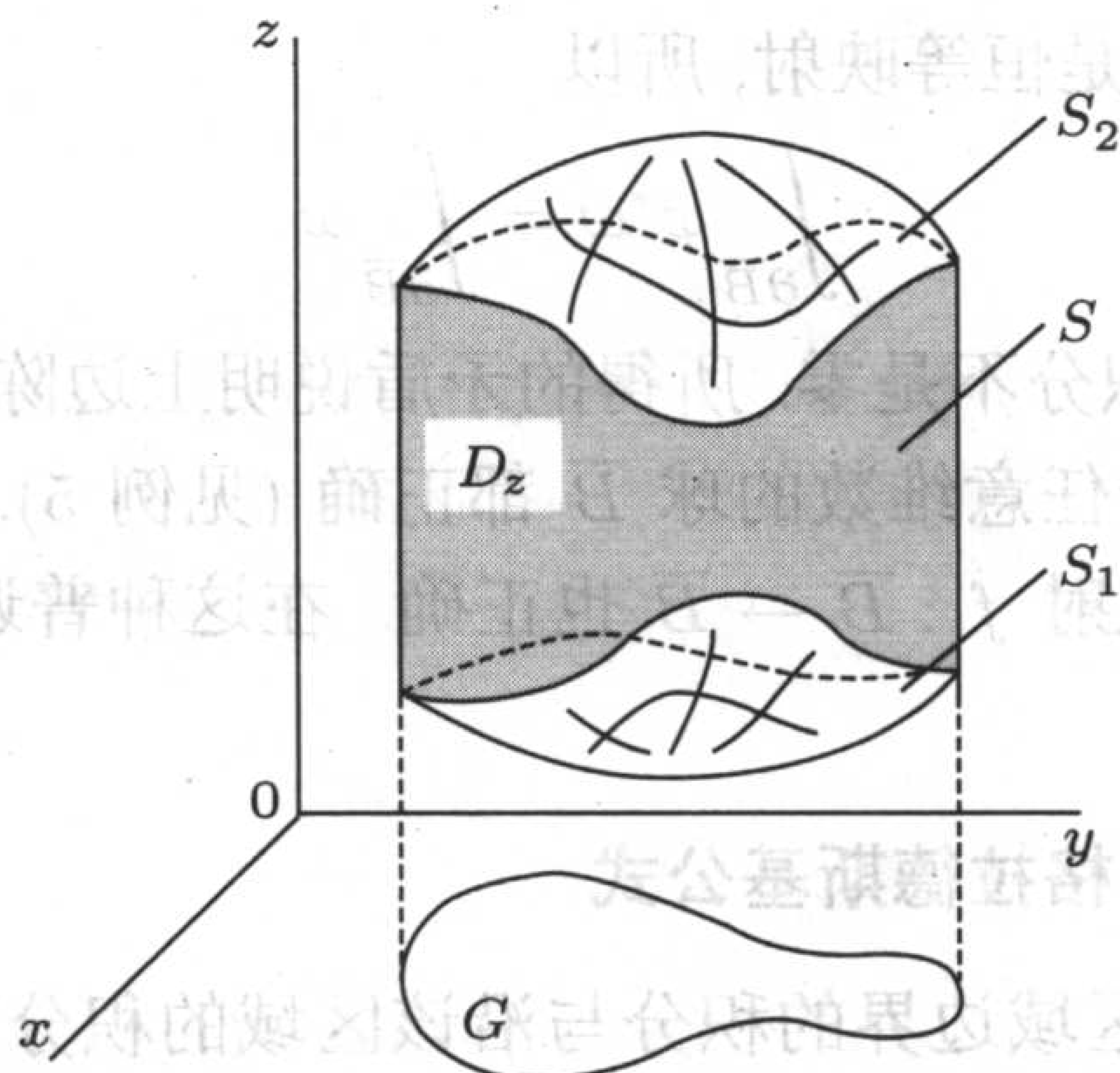


图 89

曲面 S_1, S_2 分别有以下参数表示式:

$$S_1 : (x, y) \longmapsto (x, y, \varphi_1(x, y)),$$

$$S_2 : (x, y) \longmapsto (x, y, \varphi_2(x, y)).$$

S_1 上的曲线坐标 (x, y) 给出的定向与区域 $\overline{D}_z$ 诱导出的定向是相反的, 而 S_2 上的定向与 $\overline{D}_z$ 诱导出的定向相同. 因此, 如果把 S_1 与 S_2 看做是区域 $\overline{D}_z$ 的用命题 2 所说的方式予以定向的边界的部分, 那么, 最后那两个积分 (连同它们的符号), 可以分别理解为形式 $Rdx \wedge dy$ 沿 S_1 及沿 S_2 的积分.

柱面 S 有参数表示 $(t, z) \longmapsto (x(t), y(t), z)$, 所以, 形式 $Rdx \wedge dy$ 在 S 上的限制是零, 因此, 形式沿 S 上的积分为零.

这样, 对区域 D_z, 关系式 (7)成立. ▶

如果定向区域 $\overline{D}$ 能分解为有限多个 D_z 型区域, 则因在两个这种区域的邻接面上诱导出的定向相反, 所以, 将沿这些界面的积分在相加时就抵消了, 结果只剩下了沿原区域 $\overline{D}$ 的定向界面 $\partial\overline{D}$ 的积分.

因此, 公式 (7) 对于能分成 D_z 型区域的区域也正确.

类似地, 可以引入区域 D_y 与 D_x, 它们的柱形界面的母线分别平行于 Oy 轴与 Ox 轴, 并可证明: 如果区域 $\overline{D}$ 能分解成 D_y 型或 D_x 型的区域, 则对于 $\overline{D}$ 成立以下两个关系式:

$$\iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_{\partial\overline{D}} Qdz \wedge dx, \tag{8}$$

$$\iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_{\partial\overline{D}} Pdy \wedge dz. \tag{9}$$

于是, 如果 $\overline{D}$ 是简单区域, 即能作 D_x 型,D_y 型,D_z 型的每一种分解, 那么, 将 (7),(8),(9) 三式相加, 即得对 $\overline{D}$ 成立的等式 (6).

根据在推导格林公式时已经指出的原因, 我们现在也不去研究区域成为简单区域的条件, 也不再把已证明的结果进一步的精确化 (对此可参看习题 8 或第 17 章 §5 的例 12).

然而请注意, 用非坐标的微分形式语言, 可将奥 – 高公式表示成如下形式:

$$\int_{\overline{D}} d\omega = \int_{\partial \overline{D}} \omega, \tag{6'}$$

其中 ω 是区域 $\overline{D}$ 上的光滑 2– 形式.

因为对于立方体 $I = I^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, 我们已经证明了公式 (6′), 所以, 它往更一般的区域类的推广, 当然可借助公式 (4) 和 (5) 的标准计算进行.

例 3 **阿基米德定律.** 今计算均匀液体对浸入其中的物体 D 的压力所产生的合力.

在 $\mathbb{R}^3$ 中选取笛卡儿坐标使 x, y 平面与液体的表面一致, 而 z 轴指向液体的外面. 设物体 D 的表面 S的面积元素为 $d\sigma, d\sigma$ 的深度坐标为 z, 则作用于 $d\sigma$ 的压力为 $\rho g z \boldsymbol{n} d\sigma$, 其中 ρ 为液体密度, g 是重力加速度, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 在曲面元素 $d\sigma$ 处的单位外法向量. 于是要求的合力可用积分

$$\boldsymbol{F} = \iint\limits_S \rho g z \boldsymbol{n} d\sigma$$

表示.

设 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x \cos\alpha_x + \boldsymbol{e}_y \cos\alpha_y + \boldsymbol{e}_z \cos\alpha_z$, 则

$$\boldsymbol{n} d\sigma = \boldsymbol{e}_x dy \wedge dz + \boldsymbol{e}_y dz \wedge dx + \boldsymbol{e}_z dx \wedge dy$$

(见 §2 第 4 段). 这样, 利用高 – 奥公式 (6) 就得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{e}_x \rho g \iint\limits_S z dy \wedge dz + \boldsymbol{e}_y \rho g \iint\limits_S z dz \wedge dx + \boldsymbol{e}_z \rho g \iint\limits_S z dx \wedge dy \\
&= \boldsymbol{e}_x \rho g \iiint\limits_{\overline{D}} 0 dx dy dz + \boldsymbol{e}_y \rho g \iiint\limits_{\overline{D}} 0 dx dy dz + \boldsymbol{e}_z \rho g \iiint\limits_{\overline{D}} dx dy dz \\
&= \rho g V \boldsymbol{e}_z,
\end{aligned}$$

这里 V 是 D 的体积, 而这表示 $P = \rho g V$ 是物体所排开的液体的重量. 我们得到了阿基米德定律: $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{e}_z$.

例 4 利用高 – 奥公式 (6), 可得以曲面 ∂D 为边界的物体 D 的体积 $V(D)$ 的

公式:

$$V(D)=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial D} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$$
$$=\iint\limits_{\partial D} xdy\wedge dz=\iint\limits_{\partial D} ydz\wedge dx=\iint\limits_{\partial D} zdx\wedge dy.$$

3. $\mathbb{R}^3$ 中的斯托克斯公式

命题 3 *设 S 是位于区域 $G\subset\mathbb{R}^3$ 内以 ∂S 为边界的定向分片光滑紧二维曲面, 在 G 内给定了 1- 形式*

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz.$$

这时, 成立下面的关系式

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz\\ +\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy,\end{aligned}} \tag{10}$$

其中边界 ∂S 的定向取得与曲面 S 的定向和谐.

(10) 式的另一种写法是

$$\int_S d\omega=\int_{\partial S}\omega \tag{10'}$$

◀ 如果 C 是 $\mathbb{R}^3$ 内由映射 $\varphi: I\to C$ 得到的标准参数化曲面, 这里 I 是 $\mathbb{R}^2$ 的正方形, 那么, 关于 C 的关系式 (10), 从 (4) 的几个等式, 并考虑到其中对正方形已经被证明且在这些等式中被利用的格林公式, 即可推出.

如果定向曲面 S 能分解成上述形式的简单曲面, 则可在等式 (5) 中用 S 代替 $\overline{D}$推出, (10) 式对于这样的曲面也成立. ▶

像前面一样, 我们在这里也不去证明, 分片光滑曲面能做上面所说的分解, 等等.

现在来看, 当用坐标记法时, 公式 (10) 的证明是怎样的. 为了避开实在是繁杂得很的式子, 我们只把它的三部分中的第一部分, 也是基本的一部分详细地加以分析, 而且还作一些简化. 这就是, 我们用 x^1, x^2, x^3 表示点 $x\in\mathbb{R}^3$ 的坐标, 而只验证

$$\int_{\partial S} P(x)dx^1=\iint\limits_{S}\frac{\partial P}{\partial x^2}dx^2\wedge dx^1+\frac{\partial P}{\partial x^3}dx^3\wedge dx^1,$$

因为 (10) 式左端的其余两项都可类似地讨论. 为了简单, 我们认为 S 是由定义在 D 中的光滑映射 $x=x(t)$ 得到的, 其中 D 是变元 t^1, t^2 的平面 $\mathbb{R}^2$ 中的区域, 它的边界 $\gamma=\partial D$ 是一条借助映射 $t=t(\tau)(\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta)$ 参数化的光滑曲线 (图 90). 这时曲面 S 的边界 $\varGamma=\partial S$ 可以写成 $x=x(t(\tau))$, 其中 τ 在线段 $[\alpha,\beta]$ 上变动. 利用沿曲线积分的定义, 平面区域 D 的格林公式以及沿参数化曲面积分的定义, 依次得到

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} P(x)dx^1 &:= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t(\tau)))\left(\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\frac{dt^1}{d\tau}+\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\frac{dt^2}{d\tau}\right)d\tau\\
&= \int_{\gamma}\left(P(x(t))\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)dt^1+\left(P(x(t))\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\right)dt^2\\
&\overset{!}{=} \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial t^1}\left(P\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial t^2}\left(P\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)\right]dt^1\wedge dt^2\\
&= \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial t^1}\frac{\partial x^1}{\partial t^2}-\frac{\partial P}{\partial t^2}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)dt^1\wedge dt^2\\
&= \iint\limits_{D}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^1}\frac{\partial x^1}{\partial t^2}-\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^2}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)dt^1\wedge dt^2\\
&= \iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^1}+\frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t^1}\right)\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^2}+\frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right]dt^1\wedge dt^2\\
&= \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}+\frac{\partial P}{\partial x^3}\begin{vmatrix}\frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2}\\ \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right)dt^1\wedge dt^2\\
&=: \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial x^2}dx^2\wedge dx^1+\frac{\partial P}{\partial x^3}dx^3\wedge dx^1\right).\end{aligned}$$

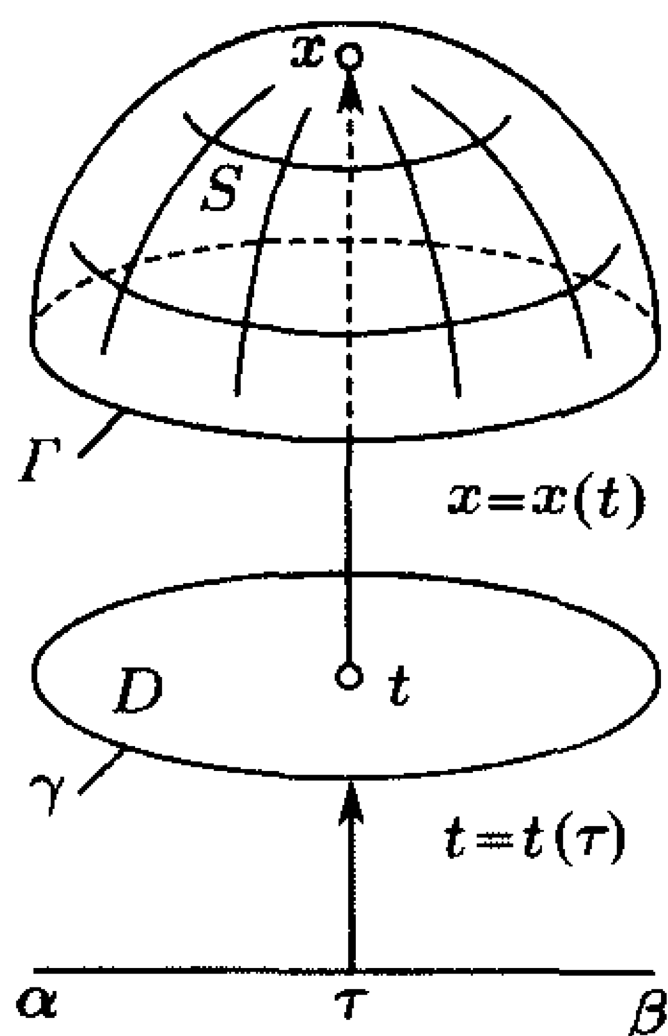


图 90

这里的两个点表示根据定义相等, 而惊叹号表示利用已证的格林公式所作的推导. 其余的都是根据恒等变换.

这样一来, 利用 (10′) 式证明的基本思想, 我们就能直接验证 (不是援引 $\varphi^*d = d\varphi^*$, 而是在现在的情形下实际地去证明它), 公式 (10) 对于简单参数曲面确实成立. 表面上我们只对 Pdx 这一项做了验证, 但显然对于 (10) 式左边积分号下的其余两项 1– 形式, 也可完全一样地去验证.

4. 一般的斯托克斯公式

公式 (1),(6),(10) 的外表是不同的, 可是它们的非坐标记法 (1″), (5), (6′), (10′) 却完全一样. 这使我们有理由设想, 我们所遇到的是某个普遍规律的特殊表现. 现在, 我们很容易猜到它.

命题 4 *设 S 是连同其边界 ∂S 都包含在区域 $G\subset\mathbb{R}^n$ 内的定向分片光滑 k 维紧曲面, 在 G 内给定了光滑 $(k-1)$– 形式 ω.*

这时关系式

$$\boxed{\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega} \tag{11}$$

成立, 其中边界 ∂S 的定向, 取得与曲面 S 的定向和谐.

◀ 显然, 一旦对于 k 维区间

$$I^k = \{x = (x^1, \cdots, x^k) \in \mathbb{R}^k | 0 \leqslant x^i \leqslant 1, i = 1, \cdots, k\}$$

(11) 式成立, 就能像借助 (4),(5) 的普通推理证明斯托克斯公式 (10′) 那样, 去证明公式 (11). 我们就来验证, 对 I^k 公式 (11) 确实成立.

因为在 I^k 上,$(k-1)-$ 形式 ω 有如下形式:

$$\omega = \sum_i a_i(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$$

(对于 $i = 1, \cdots, k$ 求和, 第 i 项舍去了微分 dx^i). 所以只要对每一项单独地证明 (11) 式就行了. 设

$$\omega = a(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k.$$

这时,$d\omega = (-1)^{i-1} \dfrac{\partial a}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^k$. 现在进行计算:

$$\begin{aligned}
\int_{I^k} d\omega &= \int_{I^k} (-1)^{i-1} \frac{\partial a}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^k \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}(x) dx^i \\
&= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} (a(x^1, \cdots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \cdots, x^k) \\
&\quad - a(x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \cdots, x^k)) dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\
&= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} a(t^1, \cdots, t^{i-1}, 1, t^i, \cdots, t^{k-1}) dt^1 \cdots, dt^{k-1} \\
&\quad + (-1)^i \int_{I^{k-1}} a(t^1, \cdots, t^{i-1}, 0, t^i, \cdots, t^{k-1}) dt^1 \cdots dt^{k-1}.
\end{aligned}$$

如同 $\mathbb{R}^k$ 中的 I^k, 在这里 I^{k-1} 是 $\mathbb{R}^{k-1}$ 内的 $k-1$ 维方体; 此外, 这里做了变量替换

$$x^1 = t^1, \cdots, x^{i-1} = t^{i-1}, x^{i+1} = t^i, \cdots, x^k = t^{k-1}.$$

映射

$$I^{k-1} \ni t = (t^1, \cdots, t^{k-1}) \longmapsto (x^1, \cdots, x^{i-1}, 1, x^i, \cdots, x^{k-1}) \in I^k,$$
$$I^{k-1} \ni t = (t^1, \cdots, t^{k-1}) \longmapsto (x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{k-1}) \in I^k$$

分别是方体 I^k 的上界面 Γ_{i1}, 下界面 Γ_{i0} 的参数化表示, 它们都与 Ox^i 轴正交. 这两个面上的坐标确定的定向标架都是 $e_1,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_k$, 它较 $\mathbb{R}^k$ 的标架 $e_1,\cdots,e_k$ 缺了一个 e_i. 界面 Γ_{i1} 上的向量 e_i 是 I^k 的外法向量, Γ_{i0} 上的 $-e_i$ 也是 I^k 的外法向量. 把标架 $e_i,e_1,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_k$ 中的 e_i, 逐次向后调换, 经 $i-1$ 次, 就变成了 $\mathbb{R}^k$ 中的标架 $e_1,\cdots,e_k$. 这说明这些标架的定向是否一样, 就完全看 $(-1)^{i-1}$ 是正还是负. 因此, 上面的参数表示, 给了 Γ_{i1} 那样一种定向, 如果给它添加一个矫正系数 $(-1)^{i-1}$ 就与 I^k 的定向和谐了 (即当 i 为奇数时, 定向不变; 当 i 为偶数时, 定向改变).

用类似的讨论就得到, 对于界面 Γ_{i0}, 取矫正系数 $(-1)^i$, 得 Γ_{i0} 的参数表示给出的定向.

因此, 最后这两项积分 (连同它前面的系数) 可分别解释为形式 ω 沿着方体 I^k 的面 Γ_{i1} 及 Γ_{i0} 的积分, 而 Γ_{i0},Γ_{i1} 取 I^k 在其上诱导的定向.

现在注意, 在区间 I^k 的其余的每个界面上, 坐标 $x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^k$ 中有一个为常数. 因此, 在这个界面上相应的微分恒等于零. 这样一来, 在 Γ_{i0} 和 Γ_{i1} 以外的所有界面上, 形式 $d\omega$ 等于零, 它沿这些界面的积分也等于零.

这就是说, 上边得到的沿界面 Γ_{i0} 和 Γ_{i1} 的积分之和, 可理解为形式 ω 沿方体 I^k 的边界 ∂I^k 的积分, ∂I^k 的定向与方体 I^k 的定向和谐.

因此, 公式

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega$$

得证, 同时 (11) 式也得证 ►

我们看到, 公式 (11) 是牛顿 – 莱布尼茨公式, 重积分化为累次积分的定理以及曲面, 曲面的边界, 定向, 微分形式, 微分形式的微分和转移这样的一整套定义的结果.

格林, 高 – 奥, 斯托克斯公式 (1),(6),(10), 是一般公式 (11) 的特殊情况. 此外, 如果把线段 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上的函数 f 解释成 0– 形式 ω, 而 0– 形式在一定向点处的积分解释为是函数在这一点上的值, 那么, 牛顿 – 莱布尼茨公式就能看成是公式 (11) 的最简单 (但不是推证出来的) 的形态. 因此, 基本关系式 (11) 对一切维数 $k\geqslant 1$都成立.

通常把公式 (11) 叫做*一般的斯托克斯公式*. 我们在这里摘引 M. 斯皮瓦克的书 (见文献目录) 中序言里的一段话, 作为历史资料备查.

“这个定理[①]的表述, 首先出现在威廉 · 汤姆森爵士 (William Thomson; 即后来的凯尔文勋爵 Lord Kirven) 1850 年 7 月 2 日给斯托克斯的信末附笔中. 作为斯密斯奖学金考试的第八题, 它公开出现于 1854 年. 这个竞赛考试, 每年由剑桥大学最好的数学系学生参加, 从 1849 年到 1882 年斯托克斯教授主持了它; 到他去世

①指的是经典的斯托克斯公式 (10).

之时, 这个结果就以斯托克斯定理之名而普遍地为人所知了. 他的同时代人至少给出过三个证明: 汤姆森发表了第一个, 另一个见于汤姆森和泰特所著《自然哲学》(Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy), 麦克斯韦 (Maxwell) 在《电与磁》中又给出了一个证明. 此后, 有更加广泛得多的结果都用斯托克斯的名字命名, 这些结果在一些数学分枝的发展中起过突出作用. 斯托克斯定理对深入思考、综合、推广的价值提供了例证".

我们指出, 形式的现代语言起源于 E. J. 嘉当①, 而对于 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面的形如 (11) 的一般的斯托克斯公式, 看来首先是由庞加莱提出的. 对 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域的公式, 奥斯特罗格拉德斯基已经知道, 而莱布尼茨写出了第一批微分形式.

因此, 当时把一般的斯托克斯公式 (11) 叫做*牛顿 – 莱布尼茨 – 格林 – 高斯 – 奥斯特罗格拉德斯基 – 斯托克斯 – 庞加莱公式*并不是偶然的. 由上面所说的可以知道, 即便这样写也远没有把它的名称写完全.

现在我们利用这一公式推广例 2 中得到的结果.

例 5 试证闭球 $\overline{B} \subset \mathbb{R}^m$ 到自身的任何光滑映射 $f : \overline{B} \to \overline{B}$, 至少有一个不动点.

◀ 假如映射 f 没有不动点, 于是像例 2 中那样, 可以作一个光滑映射 $\varphi : \overline{B} \to \partial\overline{B}$. 它在球面 $\partial\overline{B}$ 上是恒等映射. 在区域 $\mathbb{R}^n \setminus 0$ 中考察向量场 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}$ (这里 $\boldsymbol{r}$ 是点 $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m \setminus 0$ 的向径), 以及与这个场对应的流量形式

$$\omega = \left\langle \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}, \boldsymbol{n} \right\rangle \Omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m}{((x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2)^{m/2}}$$

(参看 §2 公式 (8)). 记球 $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leqslant 1\}$, $\partial\overline{B}$ 表示它的边界. 于是这个场 ω 通过球面沿外法线方向的流量显然等于球面 $\partial\overline{B}$ 的面积, 这说明 $\int_{\partial\overline{B}} \omega \neq 0$. 但是, 用直接计算很容易验证, 在 $\mathbb{R}^m \setminus O$ 内 $d\omega = 0$. 由此, 就像例 2 那样, 利用一般的斯托克斯公式推知

$$\int_{\partial\overline{B}} \omega = \int_{\partial\overline{B}} \varphi^* \omega = \int_{\overline{B}} d\varphi^* \omega = \int_{\overline{B}} \varphi^* d\omega = \int_{\overline{B}} \varphi^* 0 = 0.$$

这导致了矛盾, 从而完成了定理的证明. ▶

练 习

1. a) 如果将坐标系 x, y 变为坐标系 y, x, 问格林公式 (1) 是否会改变?

b) 这时公式 $(1'')$ 是否改变?

---

① 嘉当(Cartan, E. J.) (1869—1951) 杰出的法国几何学家.

2. a) 试证, 当函数 P, Q 在闭正方形上连续, 其偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在正方形内部连续, 且公式 $(1')$ 中的二重积分 (即使作为反常积分) 是存在的, 则公式 (1) 仍成立.

b) 设 $\overline{D}$ 是紧区域, 它的边界为分片光滑曲线. 试证, 对于与 a) 类似的假设下, 公式 (1) 仍有效.

3. a) 详细证明公式 $(2')$

b) 试证, 如果紧区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 的边界由有限多条只有有限多个拐点的光滑曲线组成, 则对于任一对坐标轴来说, D 都是简单区域.

c) 若平面区域的边界由光滑曲线构成, 试问, 能否在 $\mathbb{R}^2$ 中选出坐标轴, 使得这个区域关于它们是简单区域.

4. a) 试证, 如果格林公式中的函数 P, Q 满足 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, 则区域 D 的面积 $\sigma(D)$, 可用公式 $\sigma(D) = \int_{\partial D} P dx + Q dy$ 求得.

b) 设 x, y 是平面上的笛卡儿坐标, γ 是平面上一条曲线 (可能不闭). 说明积分 $\int_\gamma y dx$ 的几何意义. 由此出发, 重新解释公式

$$\sigma(D) = -\int_{\partial D} y dx$$

c) 利用这个公式求区域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ 的面积, 以验证 b) 中的公式.

5. a) 设 $x = x(t)$ 是从区域 $D_t \subset \mathbb{R}^2_t$ 到区域 $D_x \subset \mathbb{R}^2_x$ 上的微分同胚. 利用问题 4 的结果, 以及曲线积分关于路径的容许参数变换之无关性, 试证:

$$\int_{D_x} dx = \int_{D_t} |x'(t)| dt,$$

其中 $dx = dx^1 dx^2, dt = dt^1 dt^2, |x'(t)| = \det x'(t)$.

b) 由 a) 导出二重积分中的变量替换公式

$$\int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_t} f(x(t)) |\det x'(t)| dt.$$

6. 设 $f(x, y, t)$ 是在定义域内满足条件 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \neq 0$ 的光滑函数. 这时, 对于参数 t 的每个固定值, 方程 $f(x, y, t) = 0$ 确定平面 $\mathbb{R}^2$ 内的一条曲线 γ_t. 于是在平面上产生出了一个依赖于参数 t 的曲线族 $\{\gamma_t\}$, 称用参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ 给出的光滑曲线 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ **是曲线族** $\{\gamma_t\}$ **的包络**, 如果对于 $\{\gamma_t\}$ 与函数 $x(t), y(t)$ 的公共定义域中的任何值 t_0, 点 $x(t_0), y(t_0)$ 位于对应曲线 γ_{t_0} 上, 且曲线 Γ 与 γ_{t_0} 相切于此点.

a) 设 x, y 是平面上的笛卡儿坐标, 试证, 上面给出的包络函数 $x(t), y(t)$ 应满足方程组

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0, \end{cases}$$

从几何观点看, 包络本身就是空间 $\mathbb{R}^3_{(x,y,t)}$ 中的曲面 $f(x, y, t) = 0$ 在平面 $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ 上的射影的边界.

b) 设在以 x, y 为笛卡儿坐标的平面中, 给定了直线族

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0.$$

这里的参数是极角 α. 试指出参量 $p(\alpha)$ 的几何意义, 并求出当

$$p(\alpha) = c + a\cos\alpha + b\sin\alpha$$

时, 此曲线族的包络, 其中 a, b, c 是常数.

c) 高射炮射出炮弹时, 与水平面所成的角度 $\varphi \in [0, \pi/2]$, 试求其射程所及的区域.

d) 试证, 如果 b) 中的函数 $p(\alpha)$ 是以 2π 为周期的函数, 则相应的包络 Γ 是一条闭曲线.

e) 利用习题 4, 证明 d) 中所得的闭曲线 Γ 的长度为

$$L = \int_0^{2\pi} p(\alpha)d\alpha$$

(假定 $p(\alpha) \in C^{(2)}$).

f) 再证 d) 中所得闭曲线 Γ 所包围的区域的面积 σ 可按以下公式计算:

$$\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2 - \dot{p}^2)(\alpha)d\alpha,$$

其中 $\dot{p}(\alpha) = \frac{dp}{d\alpha}(\alpha)$.

7. 讨论积分 $\int_\gamma \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}ds$, 其中 γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑曲线,$\boldsymbol{r}$ 为点 $(x, y) \in \gamma$ 的向径, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$,$\boldsymbol{n}$ 为 γ 在点 (x, y) 处的单位法向量且沿 γ 连续变动, ds 为曲线的长度元素. 这个积分叫做*高斯积分*.

a) 将高斯积分写成平面向量场 $\boldsymbol{V}$ 通过曲线 γ 的流量 $\int_\gamma \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}\rangle ds$.

b) 试证, 在笛卡儿坐标 x, y 下, 高斯积分可据 §1 例 1 写成熟知的形式 $\pm\int_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, 这里符号由法向量场 $\boldsymbol{n}$ 的选取而定.

c) 对闭曲线 γ 是绕原点一次及它所围区域不含原点两种情况, 分别计算高斯积分.

d) 试证: $\frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}ds = d\varphi$, 这里 φ 是向径 $\boldsymbol{r}$ 的极角; 并指出当 γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的闭曲线及为任意曲线时, 高斯积分值的几何意义.

8. 当推导高 – 奥公式时, 我们曾认为 $\overline{D}$ 是简单区域, 而函数 P, Q, R 属于 $C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R})$ 类. 试改进推理, 证明, 当 $\overline{D}$ 为具有分片光滑边界的紧区域, 并且 $P, Q, R \in C(\overline{D}, \mathbb{R})$, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z} \in C(D, \mathbb{R})$, 而三重积分 (即便是作为反常积分) 存在, 则公式 (6) 仍成立.

9. a) 设 (6) 式中的函数 P, Q, R 还满足条件 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, 则可按下述公式计算区域 D 的体积 $V(D)$:

$$V(D) = \iint\limits_{\partial D} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy.$$

b) 设 $f(x,t)$ 为变量 $x \in D_x \subset \mathbb{R}^n_x, t \in D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ 的光滑函数, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) \neq 0.$$

用条件 $f(x,t) = 0, t \in D_t$ (参看练习 6) 给出曲面族 $\{S_t\}$, 其包络为 $\mathbb{R}^n_x$ 中的 $n-1$ 维曲面. 试写出此包络面所应满足的方程组.

c) 把单位球上的点取作参数 t; 试在 $\mathbb{R}^3$ 中找出以 t 为参数的平面族, 使它的包络为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

d) 试证, 如果闭曲面 S 是平面族

$$\cos\alpha_1(t)x + \cos\alpha_2(t)y + \cos\alpha_3(t)z - p(t) = 0$$

的包络, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是平面的法线与坐标轴之间的夹角, 参数 t 是单位球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上的变点, 则曲面 S 的面积 σ 可用公式 $\sigma = \int_{S^2} p(t)d\sigma$ 求出.

e) 试证 d) 中的曲面 S 所包围的体积, 可以用公式

$$V = \frac{1}{3}\int_S p(t)d\sigma$$

求出.

f) 用 e) 中的公式, 求出椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ 的体积, 以检验这一公式.

g) 与 d), e) 中的公式在 n 维空间中的类似的公式是怎样的?

10. a) 利用高 – 奥公式验证场 $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过曲面 S 的流量等于它通过球面 $|x| = \varepsilon$ 的流量, 这里 $\boldsymbol{r}$ 是点 $x \in \mathbb{R}^3$ 的向径, $r = |\boldsymbol{r}|$, S 为与球同胚且包含坐标原点的光滑曲面, $\varepsilon > 0$ 为充分小的数.

b) 证明 a) 中所说的流量等于 4π.

c) 将高斯积分 $\int_S \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r^3} ds$ 解释为场 $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 通过曲面 S 的流量.

d) 分别对原点含于紧区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内及在区域之外两种情况, 计算沿紧区域 D 的边界的高斯积分.

e) 比较习题 7 和 10a)—d), 指出 n 维高斯积分和相应的向量场是怎样的? 给出问题 a)—d) 的相应的 n维提法, 并予以验证.

11. a) 试证, 当作用在闭刚性曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 上的压力分布均匀时, 曲面保持平衡 (根据静力学原理, 问题归结为验证等式

$$\iint_S \boldsymbol{n}d\sigma = 0, \iint_S [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}]d\sigma = 0,$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 为单位法向量, $\boldsymbol{r}$ 为向径, $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}]$ 为 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的向量积).

b) 体积为 V 的固体, 完全沉没在比重为 1 的液体中. 试证, 液体在物体上的压力的全部静力学效应可归结为一个大小等于 V 的力 $\boldsymbol{F}$, 其方向竖直向上, 并作用在物体所占区域的质心上.

12. 设 $\Gamma: I^k \to D \subset \mathbb{R}^n$ 是区间 $I^k \subset \mathbb{R}^k$ 到空间 $\mathbb{R}^n$ 的区域 D 中的光滑映射 (但不一定同胚), D 中定义了 $k-$ 形式 ω. 与一维情形类似, 称映射 Γ 为 $k-$ 道路, 并按定义令 $\int_\Gamma \omega = \int_{I^k} \Gamma^* \omega$. 考察一般斯托克斯公式的证明, 并确认它不仅对 k 维曲面正确, 对于 $k-$ 道路也正确.

13. 利用一般的斯托克斯公式, 用归纳法证明重积分中的变量替换公式 (证明的原则, 已在练习 5, a) 中指出了).

14. 重积分中的分部积分法.

设 D 是 $\mathbb{R}^m$ 中的具正则 (光滑或分片光滑) 边界面的有界区域, 边界面由外单位法向量 $\boldsymbol{n} = (n^1, \cdots, n^m)$ 定向.

设 f, g 是 $\overline{D}$ 中的光滑函数.

a) 试证

$$\int_D \partial_i f dv = \int_{\partial D} f n^i d\sigma.$$

b) 试证以下分部积分公式:

$$\int_D (\partial_i f) g dv = \int_{\partial D} f g n^i d\sigma - \int_D f(\partial_i g) dv.$$

第十四章　向量分析与场论初步

§1　向量分析的微分运算

1. 数量场与向量场

在场论中研究那样一些函数 $x \mapsto T(x)$, 它们使对区域中的每个固定点 x, 有一个特定的叫做*张量*的对象 $T(x)$ 与之对应. 如果在区域 D 上给定了这样的函数, 就说在 D 上给出了一个*张量场*. 我们在这里不打算给张量下定义 —— 在代数及微分几何中将研究它们. 我们仅指出, 数值函数 $D \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$, 以及向量函数

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto V(x) \in T\mathbb{R}^n_x \approx \mathbb{R}^n$$

都是特殊的张量场, 并分别叫做*数量场*与*向量场* (这些术语我们早就用过)

D 中的微分 $p-$ 形式 ω 是函数

$$\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto \omega(x) \in \mathfrak{L}((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R})$$

可以称之为区域 D 中的 $p-$ *次形式场*. 这也是特殊的张量场.

在这里, 我们最为关心的是定向欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的数量场与向量场. 这些场在许多应用分析数学的自然科学中起着重要作用.

2. $\mathbb{R}^3$ 中的向量场与形式

我们知道, 在具有数量积 $\langle\ ,\ \rangle$ 的欧氏向量空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 在线性函数 $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 与向量 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^3$ 之间, 有一个对应关系, 它使每个这样的函数具有 $A(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ 的形式, 这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中完全确定的向量.

如果空间还是定向的, 那么, 每个双线性函数 $B: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, 就可唯一地写成 $B(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ 的形式, 这里 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中某个完全确定的向量, 而 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ 照常是表示向量 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的混合积, 或者说它是这些向量的体积形式的值.

因此, 在定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内, 对于其每个向量, 能用上面所说的方法联系上一个线性形式或双线性形式, 而给定线性形式或双线性形式, 就等价于在 $\mathbb{R}^3$ 中给出相应的向量.

如果在 $\mathbb{R}^3$ 内有数量积, 则在任一切空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 中, 也以自然的方式产生出内积. 我们记得, $T\mathbb{R}^3_x$ 由附于点 $x \in \mathbb{R}^3$ 处的向量组成, 而 $\mathbb{R}^3$ 的定向确定了每个空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 的定向.

因此, 如果在 $T\mathbb{R}^3_x$ 内给出 1- 形式 $\omega^1(x)$ 或 2- 形式 $\omega^2(x)$, 则在上面的条件下, 这就等价于在 $T\mathbb{R}^3_x$ 内给出了与形式 $\omega^1(x)$ 对应的向量 $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, 或给出了与形式 $\omega^2(x)$ 对应的向量 $\boldsymbol{B}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$.

于是, 在定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的区域 D 内给出 1– 形式 ω^1 或 2– 形式 ω^2, 等价于在 D 中给出与这些形式对应的向量场 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$.

这个对应可由下面的式子明确地表示出来

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x)(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{\xi} \rangle \tag{1}$$

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \langle \boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \rangle \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B}(x), \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in TD_x$.

我们已见过为我们所熟悉的向量场 $\boldsymbol{A}$ 的功形式 $\omega^1 = \omega^1_{\boldsymbol{A}}$, 及向量场 $\boldsymbol{B}$ 的流量形式 $\omega^2 = \omega^2_{\boldsymbol{B}}$.

数量场 $f: D \to \mathbb{R}$ 可用下述方法使 D 内的 0– 形式或 3– 形式与之对应:

$$\omega^0_f = f, \tag{3}$$

$$\omega^3_f = f dV, \tag{4}$$

其中 dV 是定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的体积元素 (体积形式).

根据对应关系 (1)—(4), 形式的运算有确定的向量场或数量场的运算与之对应. 不久就会清楚, 这种看法在技术上非常有用.

命题 1 同次形式的线性组合, 与这些形式所对应的场的线性组合相对应.

◀ 命题 1 成立是明显的事. 然而, 我们还是以 1– 形式为例, 写出完整的证明:

$$\begin{aligned}\alpha_1\omega^1_{\boldsymbol{A}_1} + \alpha_2\omega^1_{\boldsymbol{A}_2} &= \alpha_1\langle \boldsymbol{A}_1, \cdot \rangle + \alpha_2\langle \boldsymbol{A}_2, \cdot \rangle \\ &= \langle \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2, \cdot \rangle = \omega^1_{\alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2}. \blacktriangleright\end{aligned}$$

由证明可见, 可以把 α_1 及 α_2 看成是定义在给定的形式或场的定义域 D 内的函数 (不必是常数)

为了写起来简单, 我们用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 内的向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的数量积与向量积; 以前它们是用 $\langle\ ,\ \rangle$ 及 $[\ ,\ ]$ 表示的.

命题 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是欧氏定向空间 $\mathbb{R}^3$ 内的向量场, 则有

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{A}_2}=\omega^1_{\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2},\tag{5}$$

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}.\tag{6}$$

换句话说, 对由场 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 产生的 1– 形式的外积有这些场的向量积 $\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2$ 与之对应, 因为正是这个向量积产生所得的 2– 形式.

同样, 对由向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别产生的 1– 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 与 2– 形式 $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$ 的外积, 有这些场的数量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 与之对应.

◂ 在 $\mathbb{R}^3$ 内固定一个正交标准基底及与之相应的笛卡儿坐标 x^1,x^2,x^3.

在笛卡儿坐标下

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x)(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A}(x)\cdot\boldsymbol{\xi}=\sum_{i=1}^{3}A^i(x)\xi^i=\sum_{i=1}^{3}A^i(x)dx^i(\boldsymbol{\xi}),$$

即

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}=A^1dx^1+A^2dx^2+A^3dx^3,\tag{7}$$

及

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)&=\begin{vmatrix}B^1(x)&B^2(x)&B^3(x)\\ \xi_1^1&\xi_1^2&\xi_1^3\\ \xi_2^1&\xi_2^2&\xi_2^3\end{vmatrix}\\&=(B^1(x)dx^2\wedge dx^3+B^2(x)dx^3\wedge dx^1+B^3(x)dx^1\wedge dx^2)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2),\end{aligned}$$

即

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}=B^1dx^2\wedge dx^3+B^2dx^3\wedge dx^1+B^3dx^1\wedge dx^2.\tag{8}$$

因此, 在笛卡儿坐标下, 考虑到 (7) 式与 (8) 式就得到

$$\begin{aligned}\omega^1_{\boldsymbol{A}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{A}_2}&=(A_1^1dx^1+A_1^2dx^2+A_1^3dx^3)\wedge(A_2^1dx^1+A_2^2dx^2+A_2^3dx^3)\\&=(A_1^2A_2^3-A_1^3A_2^2)dx^2\wedge dx^3+(A_1^3A_2^1-A_1^1A_2^3)dx^3\wedge dx^1\\&\quad+(A_1^1A_2^2-A_1^2A_2^1)dx^1\wedge dx^2=\omega^2_{\boldsymbol{B}},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2$.

在证明中使用坐标, 只是为了求与 2– 形式对应的向量 $\boldsymbol{B}$, 其实等式 (5) 本身与坐标并没有什么关系.

类似地, 将 (7) 式与 (8) 式相乘, 就得到

$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1 \wedge \omega_{\boldsymbol{B}}^2 = (A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \omega_\rho^3.$$

在笛卡儿坐标下, $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内的体积形式, 而在体积形式前面的括号里, 向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的坐标的两两乘积之和是位于定义域的相应点 x 处的这两个向量 $\boldsymbol{A}(x)$,$\boldsymbol{B}(x)$ 的数量积. 由此推知 $\rho(x) = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{B}(x)$. ▶

3. 微分算子 grad, rot, div 及 ∇

定义 1 定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 0– 形式 (函数), 1– 形式, 2– 形式的外微分分别与求数量场的梯度 (grad), 向量场的*旋度* (rot) 与*散度* (div) 的运算相对应, 它们分别定义如下:

$$d\omega_f^0 =: \omega_{\text{grad} f}^1, \tag{9}$$

$$d\omega_{\boldsymbol{A}}^1 =: \omega_{\text{rot}\boldsymbol{A}}^2, \tag{10}$$

$$d\omega_{\boldsymbol{B}}^2 =: \omega_{\text{div}\boldsymbol{B}}^3 \tag{11}$$

根据由等式 (1)—(4) 建立的形式与 $\mathbb{R}^3$ 内的数量场及向量场之间的对应关系; 关系式 (9)—(11) 分别是作用于数量场及向量场的运算 grad, rot 及 div 的正确定义. 这些运算, 或通常说的*场论中的算子*, 都是作用于形式的某个外微分运算, 只不过它们作用于不同次数的形式上罢了.

我们现在就写出这些算子在 $\mathbb{R}^3$ 空间的笛卡儿坐标 x^1, x^2, x^3 下的明显形式来.

我们已经知道, 在这种情况下

$$\omega_f^0 = f, \tag{3'}$$

$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = A^1dx^1 + A^2dx^2 + A^3dx^3, \tag{7'}$$

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2 = B^1dx^2 \wedge dx^3 + B^2dx^3 \wedge dx^1 + B^3dx^1 \wedge dx^2, \tag{8'}$$

$$\omega_\rho^3 = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{4'}$$

因为

$$\omega_{\text{grad} f}^1 := d\omega_f^0 = df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3,$$

所以由 (7′) 得知在此坐标下

$$\text{grad} f = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial f}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial f}{\partial x^3}, \tag{9'}$$

这里 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 内固定的正交标准基底.

因为

$$\begin{aligned}\omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}} :&= d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = d(A^1dx^1 + A^2dx^2 + A^3dx^3)\\ &= \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right)dx^3 \wedge dx^3\\ &\quad + \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)dx^1 \wedge dx^2,\end{aligned}$$

所以由 (8′) 式得知, 在笛卡儿坐标下

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right) + \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right) \tag{10′}$$

为了便于记忆, 我们经常把上式写成如下符号形式:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}. \tag{10″}$$

另外, 因为

$$\begin{aligned}\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}} :&= d\omega^2_{\boldsymbol{B}} = d(B^1dx^2 \wedge dx^3 + B^2dx^3 \wedge dx^1 + B^3dx^1 \wedge dx^2)\\ &= \left(\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3}\right)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,\end{aligned}$$

所以由 (4′) 推知在笛卡儿坐标下

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} \tag{11′}$$

由上面得到的公式 (9′), (10′), (11′) 看到, grad, rot 与 div 都是线性微分运算 (算子). 算子 grad 定义在可微数量场上, 并把它们对应到向量场. 算子 rot 也是向量值的, 但它定义在可微向量场上. 算子 div 定义在可微向量场上, 但它的值域是数量场.

请注意, 在其他坐标下, 这些算子的表达式, 一般说来, 将与上面得到的在笛卡儿坐标下的表达式不一样. 关于这些问题, 在本节第 5 段我们还将讨论.

还要注意, 向量场 rot$\boldsymbol{A}$ 一般叫做 $\boldsymbol{A}$ 的*旋量*, $\boldsymbol{A}$ 的*旋量场*或*旋转量场*. 在最后这种情形, 有时代替记号 rot$\boldsymbol{A}$ 用记号 curl$\boldsymbol{A}$.

作为应用上边所考察的算子的例子, 我们用这些算子写出著名的[1]麦克斯韦方程组[2]. 这个方程组把电磁场分量看作空间点 $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ 和时间 t 的函数, 刻画了它们的状态.

---

①关于这一点, 著名的美国现代物理学家及数学家费因曼 (R. P. Feynman, 1918—1988) 在其物理讲义中以其特有的气质写道: "在人类历史中 (比如说, 一万年内), 19 世纪最重要的事件无疑是麦克斯韦电磁定律之发现. 以这一重要科学发现为背景, 同一个十年内的美国国内战争, 就显得不过是一个很小的州际事件罢了".

②麦克斯韦 (D. K. Maxwell) (1831—1879) —— 著名的苏格兰物理学家, 创立了电磁场的数学理论, 他还以研究气体动力学理论, 光学及力学等而著称.

例 1　(真空中电磁场的麦克斯韦方程组)

$$\begin{aligned}&(1)\ \mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0};\quad (2)\ \mathrm{div}\boldsymbol{B}=0;\\&(3)\ \mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t};\ (4)\ \mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{12}$$

其中 $\rho(x,t)$ 是电荷密度 (单位体积中的电量), $\boldsymbol{j}(x,t)$ 是电流密度向量 (电荷通过单位面积之流动速度), $\boldsymbol{E}(x,t)$ 及 $\boldsymbol{B}(x,t)$ 分别是电场与磁场强度向量, ε_0 及 c 是有量纲的常数 (其中 c 是真空中之光速).

在数学文献中, 尤其是物理文献中, 所谓哈密顿符号向量微分那不拉算子(哈密顿[①]算子)

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x^1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x^2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x^3}\tag{13}$$

与上面引入的算子 grad,rot,div 同样有广泛应用, 其中 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的正交基底, 而 x^1,x^2,x^3 是在 $\mathbb{R}^3$ 内与之相应的笛卡儿坐标.

按定义, 算子 ∇ 作用于数量场 f(即作用于函数) 就得向量场

$$\nabla f=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial f}{\partial x^1}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial f}{\partial x^2}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

这与场 $(9')$ 一致, 亦即, 在梯度的各种表示法中, 用那不拉算子表示是最简单的.

然而, 哈密顿利用了算子 ∇ 写法的向量结构, 模仿向量的代数运算, 提出了它的形式运算系统.

在讨论这些运算之前, 我们指出, 在运用算子 ∇ 时, 必须坚持在运用微分算子 $D=\dfrac{d}{dx}$ 时所坚持的那些原则, 并遵守在运用微分算子 $D=\dfrac{d}{dx}$ 时为避免错误所必须遵守的规则. 例如 φDf 等于 $\varphi\dfrac{df}{dx}$, 而不是 $\dfrac{d}{dx}(\varphi f)$, 也不是 $f\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$. 这就是说, 算子是作用于其右方的那个量上; 左边的乘式起的是系数的作用, 即 φD 是个新的微分算子 $\varphi\dfrac{d}{dx}$, 而不是一个函数 $\dfrac{d\varphi}{dx}$. 此外, $D^2=D\cdot D$, 即 $D^2f=D(Df)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx}f\right)=\dfrac{d^2}{dx^2}f$.

现在, 如果照哈密顿那样把 ∇ 看成是在笛卡儿坐标下给定的向量场, 那么, 比较 (13),$(9')$,$(10'')$及$(11')$ 诸式就得

$$\mathrm{grad}f=\nabla f,\tag{14}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A},\tag{15}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}.\tag{16}$$

[①]哈密顿 (Y. P. Hamilton) (1805—1865), 著名的爱尔兰数学家及力学家, 他陈述了变分原理 (哈密顿原理), 创立了几何光学理论; 他还是四元数理论的创始人及向量分析的鼻祖 (顺便指出, 向量这个术语是他首先使用的).

这样就把算子 grad, rot, div 用哈密顿算子及 $\mathbb{R}^3$ 中的向量运算写了出来.

例 2 在麦克斯韦方程组的写法 (12) 中, 只用了算子 rot 及 div. 利用对算子 $\nabla = \text{grad}$ 所说的使用原则, 可将麦克斯韦方程组写成下面的形式:

$$(1)\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0};\qquad (2)\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0;$$

$$(3)\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial B}{\partial t};\quad (4)\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{12'}$$

4. 向量分析的一些微分公式

在欧氏定向空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 我们曾建立了形式与数量场、向量场之间的联系 (1)—(4). 这就使得形式的外积和微分能够与场的相应的运算对应起来 (参看公式 (5),(6) 及 (9)—(11)).

利用这些对应可以得到向量分析的一系列基本微分公式.

例如, 以下诸关系式成立:

$$\text{rot}(f\boldsymbol{A})=f\text{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\text{grad}f, \tag{17}$$

$$\text{div}(f\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\text{grad}f+f\text{div}\boldsymbol{A}, \tag{18}$$

$$\text{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\text{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\text{rot}\boldsymbol{B}. \tag{19}$$

◀ 我们来验证最后这个等式:

$$\begin{aligned}\omega^3_{\text{div}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}&=d\omega^2_{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}=d\left(\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}}\right)=d\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}}-\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge d\omega^1_{\boldsymbol{B}}\\&=\omega^2_{\text{rot}\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}}-\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\text{rot}\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\boldsymbol{B}\cdot\text{rot}\boldsymbol{A}}-\omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\text{rot}\boldsymbol{B}}\\&=\omega^3_{\boldsymbol{B}\cdot\text{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\text{rot}\boldsymbol{B}}.\end{aligned}$$

前两个式子可类似地去验证. 当然, 所有这些等式, 都能用关于坐标微分的办法直接验证. ▶

如果注意到, 对于任何形式 ω 有 $d^2\omega=0$, 所以, 还能断定成立以下的等式:

$$\text{rot grad}f=0, \tag{20}$$

$$\text{div rot}\boldsymbol{A}=0. \tag{21}$$

◀ 实际上

$$\begin{aligned}\omega^2_{\text{rot grad}f}&=d\omega^1_{\text{grad}f}=d(d\omega^0_f)=d^2\omega^0_f=0,\\ \omega^3_{\text{div rot}\boldsymbol{A}}&=d\omega^2_{\text{rot}\boldsymbol{A}}=d(d\omega^1_{\boldsymbol{A}})=d^2\omega^1_{\boldsymbol{A}}=0.\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

在公式 (17)—(19) 中, 算子 grad,rot,div 被应用了一次, 而在 (20) 及 (21) 式中研究的是二阶算子, 它们是逐次作三个原始运算中的两个运算得到的. 除了 (20) 及 (21) 式引进的运算外, 还可讨论这些运算的如下组合形式:

$$\text{grad div } \boldsymbol{A}, \text{rot rot } \boldsymbol{A}, \text{div grad } f. \tag{22}$$

我们看到, 算子 div grad 是施于数量场上的. 这个算子用字母 Δ("Delta") 表示, 称之为*拉普拉斯算子*①, 或*调和算子*.

由公式 (9′), (11′) 推知, 在笛卡儿坐标下,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^3)^2}. \tag{23}$$

因为算子 Δ 作用在数值函数上, 所以我们可以把它施于向量场 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1 A^1 + \boldsymbol{e}_2 A^2 + \boldsymbol{e}_3 A^3$ 诸坐标分量上, 这里 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的正交标准基. 在这种情况下,

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1 \Delta A^1 + \boldsymbol{e}_2 \Delta A^2 + \boldsymbol{e}_3 \Delta A^3.$$

注意到最后这个等式, 对于 (22) 式中列出的那三个二阶算子, 可得下面的关系式:

$$\text{rot rot} \boldsymbol{A} = \text{grad div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A}, \tag{24}$$

我们不去证明这个式子 (参看练习 2). 在任意的, 不必正交的坐标系中, 等式 (24) 可作为 $\Delta \boldsymbol{A}$ 的定义.

利用向量代数的语言以及公式 (14)—(16), 所有二阶算子 (20)—(22) 都能用哈密顿算子 ∇ 表示出来:

$$\begin{aligned}
&\text{rot grad} f = \nabla \times \nabla f = 0, \\
&\text{div rot} \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0, \\
&\text{grad div} \boldsymbol{A} = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}), \\
&\text{rot rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}), \\
&\text{div grad} f = \nabla \cdot \nabla f.
\end{aligned}$$

从向量代数的观点看, 这些算子中的前两个等于零是非常自然的事.

最后那个等式说明, 在哈密顿算子 ∇ 与拉普拉斯算子 Δ 之间, 有一种简单关系:

$$\Delta = \nabla^2.$$

①拉普拉斯 (P. S. Laplace) (1749—1827) 著名的法国天文学家、数学家及物理学家, 他在天体力学、概率的数学理论、实验物理及数学物理的发展中做出了重大贡献.

*5. 曲线坐标下的向量运算

a. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在球坐标下的方程 $R=a$ 特别简单; 与此例类似, $\mathbb{R}^3$(或 $\mathbb{R}^n$) 中的向量场 $x\mapsto \boldsymbol{A}(x)$ 也常在某一 (异于笛卡儿坐标系的) 坐标系中, 具有最简单的记法. 所以我们现在希望找到一个公式, 根据它, 能在足够广泛的一类曲线坐标下, 求出 grad,rot 及 div 的表示式.

但是首先应当弄清楚, 场 $\boldsymbol{A}$ 的坐标表示应怎样理解.

我们从能说明问题特点的两个启发性的例子入手.

例 3 设在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上取笛卡儿坐标 x^1,x^2. 当我们说在 $\mathbb{R}^2$ 中给定向量场 $(A^1,A^2)(x)$ 时, 就是指在每点 $x=(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2$ 处, 给出了一个向量 $\boldsymbol{A}(x)\in T\mathbb{R}^2_x$; 它在由坐标方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_1(x),\boldsymbol{e}_2(x)$ 构成的基底下, 具有分解式

$$\boldsymbol{A}(x)=A^1(x)\boldsymbol{e}_1(x)+A^2(x)\boldsymbol{e}_2(x)$$

(图 91). 在现在的情况下, 空间 $T\mathbb{R}^2_x$ 的基底 $\{\boldsymbol{e}_1(x),\boldsymbol{e}_2(x)\}$ 实际上与点 x 无关.

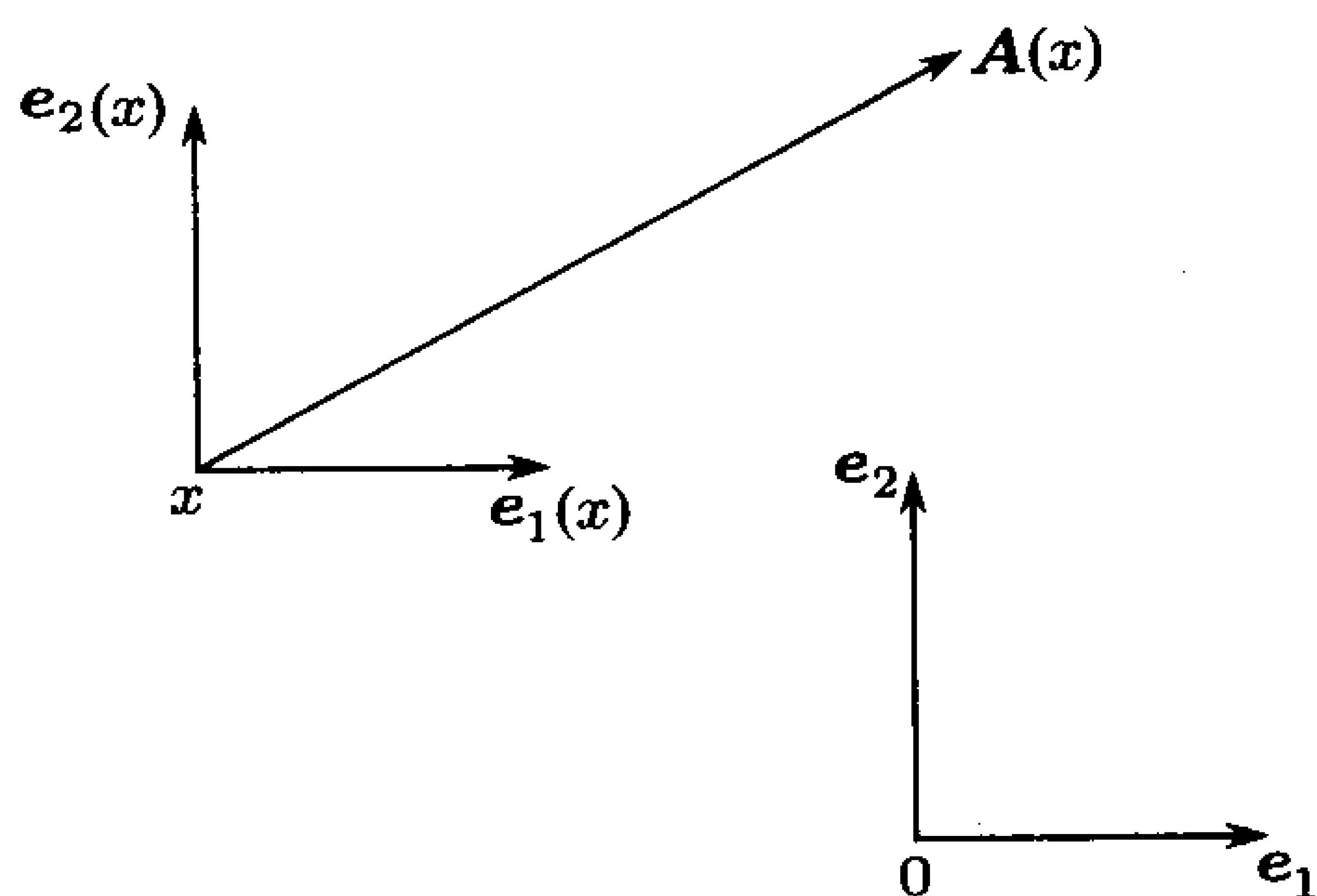


图 91

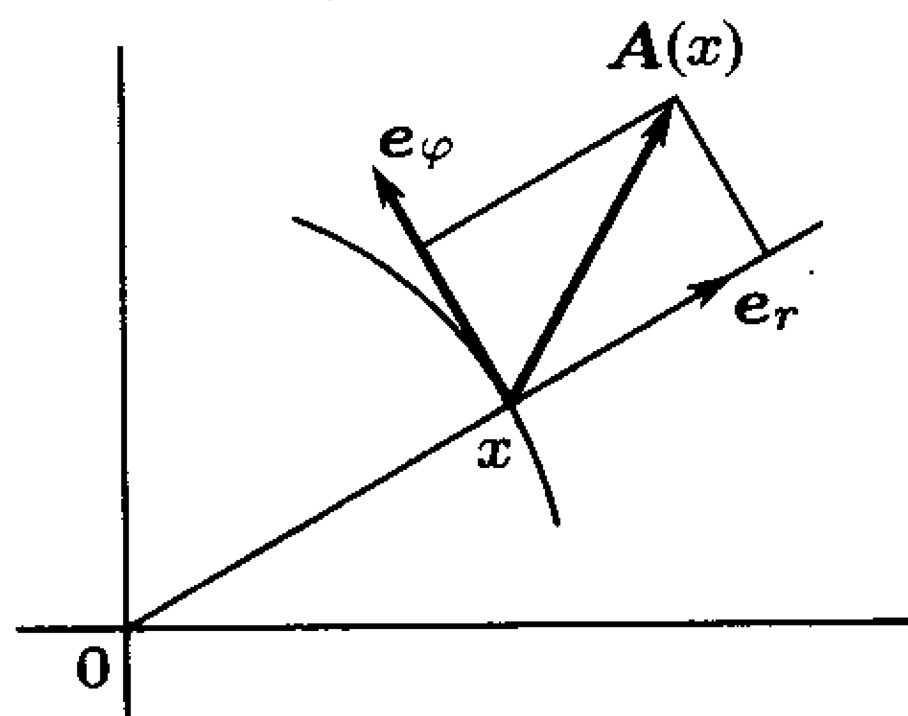


图 92

例 4 仍在平面 $\mathbb{R}^2$ 内讨论. 当给出极坐标系 (r,φ) 时, 在每点 $x\in\mathbb{R}^2\setminus O$ 也可取坐标方向单位向量 $\boldsymbol{e}_1(x)=\boldsymbol{e}_r(x),\boldsymbol{e}_2(x)=\boldsymbol{e}_\varphi(x)$ (图 92) . 它们也组成了 $T\mathbb{R}^2_x$ 内的基底, 我们也能把场 $\boldsymbol{A}$ 的从点 x 出发的向量 $\boldsymbol{A}(x)$, 按这组基底进行分解:

$$\boldsymbol{A}(x)=A^1(x)\boldsymbol{e}_1(x)+A^2(x)\boldsymbol{e}_2(x).$$

这时当然把函数序对 $(A^1,A^2)(x)$ 看作是场 $\boldsymbol{A}$ 在极坐标下的表示.

因此, 如果 $(A^1,A^2)(x)\equiv(1,0)$, 那么这就是 $\mathbb{R}^2$ 中从原点出发, 指向径向方向的单位向量场.

场 $(A^1,A^2)(x)\equiv(0,1)$ 是将上面向量场中每个向量, 沿逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 而得的向量场.

虽然它们的坐标分量都是用常数表出的, 但它们并不是 $\mathbb{R}^2$ 内的常向量场. 问题全在于从一点过渡到另一点时, 场中的向量与据以分解的基底同步地改变.

显然, 这些场在笛卡儿坐标下的表达式的坐标分量完全不是常量. 另一方面, (由一个向量平行移至平面上每个点构成的) 真正的常向量场, 它在笛卡儿坐标下的分量是常量, 但在极坐标下, 它的分量却是变量.

b. 在做了这些带启发性的探讨后, 现在来研究更形式化的曲线坐标系下的向量场问题.

首先注意, 区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 中的曲线坐标系 t^1, t^2, t^3. 欧氏参数空间 $\mathbb{R}^3_t$ 的区域 D_t 到区域 D 上的微分同胚 $\varphi: D_t \to D$, 由于它, 每个点 $x = \varphi(t) \in D$ 都获得了自己的对应点 $t \in D_t$ 的笛卡儿坐标 t^1, t^2, t^3 作为自己的曲线坐标.

因为 φ 是微分同胚, 所以切映射 $\varphi'(t): T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ 是向量空间之间的同构. 空间 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t) = (1,0,0), \boldsymbol{\xi}_2(t) = (0,1,0), \boldsymbol{\xi}_3(t) = (0,0,1)$ 对应到空间 $T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ 中, 由坐标方向向量 $\boldsymbol{\xi}_i(x) = \varphi'(t)\boldsymbol{\xi}_i(t) = \dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial t^i}, i = 1,2,3$ 构成的基底. $T\mathbb{R}^3_x$ 中的任意向量 $\boldsymbol{A}(x)$ 关于这组基底的分解式

$$\boldsymbol{A}(x) = \alpha_1 \boldsymbol{\xi}_1(x) + \alpha_2 \boldsymbol{\xi}_2(x) + \alpha_3 \boldsymbol{\xi}_3(x),$$

对应着向量 $\boldsymbol{A}(t) \in (\varphi')^{-1}\boldsymbol{A}(x)$ 关于 $T\mathbb{R}^3_t$ 中的标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \boldsymbol{\xi}_3(t)$ 的分解式

$$\boldsymbol{A}(t) = \alpha_1 \boldsymbol{\xi}_1(t) + \alpha_2 \boldsymbol{\xi}_2(t) + \alpha_3 \boldsymbol{\xi}_3(t)$$

(它们的分量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一样的!) 当 $\mathbb{R}^3$ 中没有欧氏结构时, 这组数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 关于所考察的曲线坐标系, 就成了向量 $\boldsymbol{A}(x)$ 的最自然的坐标表示.

c. 然而, 这样的坐标表示, 与我们例 4 中的约定不完全符合. 问题在于与 $T\mathbb{R}^3_t$ 内标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \boldsymbol{\xi}_3(t)$ 对应的空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 中的基底 $\boldsymbol{\xi}_1(x), \boldsymbol{\xi}_2(x), \boldsymbol{\xi}_3(x)$. 虽然是由坐标方向向量组成的, 却未必是由单位向量 组成, 亦即, 一般来说, $\langle \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i \rangle(x) \neq 1$.

现在我们来研究在 $\mathbb{R}^3$ 内存在欧氏结构的情况, 从而在每个空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 内也存在欧氏结构.

因为 $\varphi'(t): T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ 是同构映射, 所以对于 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的任意一对向量 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in T\mathbb{R}^3_t$, 令 $\langle \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \rangle := \langle \varphi' \boldsymbol{\tau}_1, \varphi' \boldsymbol{\tau}_2 \rangle$, 即可把空间 $T\mathbb{R}^3_x$ 的欧氏结构转移到 $T\mathbb{R}^3_t$ 中. 特别地由此我们就得到向量长的平方的表达式:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau} \rangle : &= \langle \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}, \varphi'(t)\boldsymbol{\tau} \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^i} \tau^i, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^j} \tau^j \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right\rangle (t) \tau^i \tau^j = \langle \xi_i, \xi_j \rangle (t) \tau^i \tau^j = g_{ij}(t) dt^i(\boldsymbol{\tau}) dt^j(\boldsymbol{\tau}). \end{aligned}$$

二次形式

$$ds^2 = g_{ij}(t) dt^i dt^j, \tag{25}$$

它的系数是标准基底向量的两两数量积, 并且它完全确定了 $T\mathbb{R}^3_t$ 内的数量积. 如果在某区域 $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$ 内的每一点上给出了这个形式, 那么, 如从几何所知, 就说在这区

域上给出了**黎曼度量**. 依旧是在空间 $\mathbb{R}_t^3$ 的直线坐标 t^1, t^2, t^3 下, 黎曼度量能在每个切空间 $T\mathbb{R}_t^3(t \in D_t)$ 内引入自己的欧氏结构, 它对应于区域 D_t 向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 内的"弯曲" 嵌入 $\varphi : D_t \to D$.

如果向量 $\boldsymbol{\xi}_i(x) = \varphi'(t)\boldsymbol{\xi}_i(t) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t^i}(t), i = 1,2,3$, 在 $T\mathbb{R}_x^3$ 内正交, 则当 $i \neq j$ 时, $g_{ij}(t) = 0$. 这就是说我们遇到的是**三正交坐标网**. 按照空间 $T\mathbb{R}_t^3$ 中的术语说, 这就表示, 作为标准基底的向量 $\boldsymbol{\xi}_i(t)(i = 1,2,3)$, 按 $T\mathbb{R}_t^3$ 内的数量积二次型 (25) 的意义, 是正交的. 为了简单, 后面我们将只讨论三正交曲线坐标系. 对于这种坐标系, 我们已经看到, 二次形式 (25) 具有下面特定形式:

$$ds^2 = E_1(t)(dt^1)^2 + E_2(t)(dt^2)^2 + E_3(t)(dt^3)^2, \tag{26}$$

其中 $E_i(t) = g_{ii}(t), i = 1,2,3$.

例 5 在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标 (x,y,z), 柱坐标 (r,φ,z) 及球坐标 (R,φ,θ) 下, 二次形式 (25) 分别为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{26'}$$

$$= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{26''}$$

$$= dR^2 + R^2 \cos^2\theta d\varphi + R^2 d\theta^2. \tag{26'''}$$

因此, 这三种坐标系在各自的定义域内都是三正交坐标系.

$T\mathbb{R}_t^3$ 内的标准基底 (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) 的向量 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \boldsymbol{\xi}_3(t)$, 如同与它们对应的向量 $\xi_i(x) \in T\mathbb{R}_x^3$, 具有模[①] $|\boldsymbol{\xi}_i| = \sqrt{g_{ii}}$. 因此, 坐标方向的单位向量 (即按向量内积意义下的单位向量) 在三正交系 (26) 下, 在 $T\mathbb{R}_t^3$ 内的坐标表示为:

$$\boldsymbol{e}_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}, 0, 0\right),\ \boldsymbol{e}_2(t) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{E_2}}, 0\right),\ \boldsymbol{e}_3(t) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{E_3}}\right). \tag{27}$$

例 6 由公式 (27) 及例 5 的结果可知, 对于笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标系, 三个坐标方向的单位向量分别为

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_y = (0,1,0),\ \boldsymbol{e}_z = (0,0,1), \tag{27'}$$

$$\boldsymbol{e}_r = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_\varphi = \left(0, \frac{1}{r}, 0\right),\ \boldsymbol{e}_z = (0,0,1), \tag{27''}$$

$$\boldsymbol{e}_R = (1,0,0),\ \boldsymbol{e}_\varphi = \left(0, \frac{1}{R\cos\theta}, 0\right),\ \boldsymbol{e}_\theta = \left(0, 0, \frac{1}{R}\right). \tag{27'''}$$

---

①在正交系 (26) 内, $|\xi_i| = \sqrt{E_i} = H_i, i = 1,2,3$. H_1, H_2, H_3 通常叫做**拉梅系数**或**拉梅参数**. 拉梅 (G. Lamé) (1795—1870) 是法国工程师, 数学家, 物理学家.

由上面分析的例 3, 例4 说明, 向量场是关于由沿坐标方向的单位向量所构成的基底来分解的. 因此, 与向量 $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}_x^3$ 对应的向量场 $\boldsymbol{A}(t) \in T\mathbb{R}_t^3$, 不应按标准基底 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t), \boldsymbol{\xi}_3(t)$ 来分解, 而是按照单位坐标方向向量组成的基底 $\boldsymbol{e}_1(t), \boldsymbol{e}_2(t), \boldsymbol{e}_3(t)$ 来分解.

这样, 脱离原来的空间 $\mathbb{R}^3$, 可以认为在区域 $D_t \subset \mathbb{R}_t^3$ 内给定了黎曼度量 (25) 或 (26) 及向量场 $t \to \boldsymbol{A}(t)$, 此场在每点 $t \in D_t$ 处的坐标表示 $(A^1, A^2, A^3)(t)$ 可以这样得到: 在此点处将向量场 $\boldsymbol{A}(t)$ 按单位坐标方向向量进行分解 $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$.

d. 现在我们来详细分析形式. 在 D 内的任何形式, 在微分同胚 $\varphi : D_t \to D$ 下, 自动地转移到区域 D_t 内. 我们知道, 这一转移, 发生于每个点 $x \in D$ 处, 从空间 $T\mathbb{R}_x^3$ 到空间 $T\mathbb{R}_t^3$ 内. 因为我们已把 $T\mathbb{R}_x^3$ 的欧氏结构转移到 $T\mathbb{R}_t^3$ 内, 所以由向量转移与形式转移的定义推知, 比如在 $T\mathbb{R}_x^3$ 内确定的形式 $\omega_{\boldsymbol{A}}^1(x) = \langle \boldsymbol{A}(x), \cdot \rangle$ 刚好对应于 $T\mathbb{R}_t^3$ 内的形式 $\omega_{\boldsymbol{A}}^1(t) = \langle \boldsymbol{A}(t), \cdot \rangle$, 其中 $\boldsymbol{A}(x) = \varphi'(t)\boldsymbol{A}(t)$. 对于形式 $\omega_{\boldsymbol{B}}^2, \omega_\rho^3$ 也可作类似的叙述. 至于 0– 形式 ω_f^0—— 函数, 就更是如此了.

在做了这样的解释之后, 以后的讨论就可以只在 $D_t \subset \mathbb{R}_t^3$ 中进行了; 脱离原来的空间 $\mathbb{R}^3$, 认为在 D_t 内给定了黎曼度量 (25), 给定了数量场 f, ρ 及向量场 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 以及形式 $\omega_f^0, \omega_{\boldsymbol{A}}^1, \omega_{\boldsymbol{B}}^2, \omega_\rho^3$, 它们在每点 $t \in D_t$ 处, 由所给的黎曼度量给出的 $T\mathbb{R}_t^3$ 内的欧氏结构来确定.

例 7　如我们所知, 在曲线坐标 t_1, t_2, t_3 下的体积形式 dV 具有以下形式

$$dV = \sqrt{\det g_{ij}}(t)dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3.$$

对于三正交坐标系, 有

$$dV = \sqrt{E_1\ E_2\ E_3}(t)dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3. \tag{28}$$

特别地, 对于笛卡儿坐标, 柱坐标, 球坐标, 分别有

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz \tag{28'}$$

$$= rdr \wedge d\varphi \wedge dz \tag{28''}$$

$$= R^2 \cos\theta dR \wedge d\varphi \wedge d\theta. \tag{28'''}$$

标量在各种曲线坐标系下都能写成形式 $\omega_\rho^3 = \rho dV$.

e. 我们的主要问题 (现在已经容易解决了) 是, 已知向量 $\boldsymbol{A}(t) \in T\mathbb{R}_t^3$ 沿单位向量 $\boldsymbol{e}_i(t) \in T\mathbb{R}_i^3$ 的分解 $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$, 要求形式 $\omega_{\boldsymbol{A}}^1(t)$ 及 $\omega_{\boldsymbol{A}}^2(t)$ 分别按标准 1– 形式 dt^i 及 2– 形式 $dt^i \wedge dt^j$ 的分解; 其中 $\boldsymbol{e}_i(t)(i = 1, 2, 3)$ 是用黎曼度量 (26) 确定的三正交坐标系的坐标方向单位向量.

因为所有的讨论都是对于任意但固定的点 t 进行的, 所以, 为了书写简单, 可以把标志所研究的向量和形式都是属于 t 点处的切空间的符号 t 省略.

因此 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是 $T\mathbb{R}^3_t$ 内由坐标方向的单位向量 (27) 组成的基底, $\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ 是向量 $\boldsymbol{A} \in T\mathbb{R}^3_t$ 关于此基底的分解式.

首先, 我们注意到, 由公式 (27) 可得,

$$dt^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}\delta^i_j, \quad 其中\ \delta^i_j = \begin{cases} 0, & 当\ i \neq j, \\ 1, & 当\ i = j, \end{cases} \tag{29}$$

$$dt^i \wedge dt^j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{E_i E_j}}\delta^{ij}_{kl}, \tag{30}$$

其中 $\delta^{ij}_{kl} = \begin{cases} 0, & 当\ (i,j) \neq (k,l), \\ 1, & 当\ (i,j) = (k,l). \end{cases}$

f. 因此, 如果 $\omega^1_{\boldsymbol{A}} := \langle \boldsymbol{A}, \cdot \rangle = a_1 dt^1 + a_2 dt^2 + a_3 dt^3$, 则一方面有

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{e}_i) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_i \rangle = A^i,$$

另一方面, 由 (29) 式可知

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{e}_i) = (a_1 dt^1 + a_2 dt^2 + a_3 dt^3)(\boldsymbol{e}_i) = a_i \cdot \frac{1}{\sqrt{E_i}}.$$

因此 $a_i = A^i\sqrt{E_i}$, 于是我们找到了与向量 $\boldsymbol{A}$ 的分解式

$$\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$$

相对应的形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 的分解式

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A^1\sqrt{E_1}dt^1 + A^2\sqrt{E_2}dt^2 + A^3\sqrt{E_3}dt^3. \tag{31}$$

例 8 因为在笛卡儿坐标系、柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \\ &= A_r\boldsymbol{e}_r + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_z\boldsymbol{e}_z \\ &= A_R\boldsymbol{e}_R + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta, \end{aligned}$$

所以从例 6 的结果推知

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A_x dx + A_y dy + A_z dz \tag{31'}$$

$$= A_r dr + A_\varphi r d\varphi + A_z dz \tag{31''}$$

$$= A_R dR + A_\varphi R\cos\varphi d\varphi + A_\theta R d\theta. \tag{31'''}$$

g. 今设 $\boldsymbol{B} = B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3$, 而

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}} = b_1 dt^2 \wedge dt^3 + b_2 dt^3 \wedge dt^1 + b_3 dt^1 \wedge dt^2.$$

这时, 一方面有

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3):=dV(\boldsymbol{B},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$$
$$=\sum_{i=1}^3 B^i dV(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=B^1(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=B^1.$$

其中 dV 为 $T\mathbb{R}_t^3$ 内的体积形式 (参看 (28) 与 (27) 式).

另一方面, 由 (30) 式得

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(b_1dt^2\wedge dt^3+b_2dt^3\wedge dt^1+b_3dt^1\wedge dt^2)(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$$
$$=b_1dt^2\wedge dt^3(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\frac{b_1}{\sqrt{E_2E_3}}.$$

比较所得结果即知 $b_1=B^1\sqrt{E_2E_3}$. 类似地可推知

$$b_2=B^2\sqrt{E_1E_3},\quad b_3=B^3\sqrt{E_1E_2}.$$

这样, 我们求出了与向量 $\boldsymbol{B}=B^1\boldsymbol{e}_1+B^2\boldsymbol{e}_2+B^3\boldsymbol{e}_3$ 相应的形式 $\omega_{\boldsymbol{B}}^2$ 的坐标表示式

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2=B^1\sqrt{E_2E_3}dt^2\wedge dt^3+B^2\sqrt{E_3E_1}dt^3\wedge dt^1+B^3\sqrt{E_1E_2}dt^1\wedge dt^2$$
$$=\sqrt{E_1E_2E_3}\left(\frac{B^1}{\sqrt{E_1}}dt^2\wedge dt^3+\frac{B^2}{\sqrt{E_2}}dt^3\wedge dt^1+\frac{B^3}{\sqrt{E_3}}dt^1\wedge dt^2\right).\tag{32}$$

例 9　利用例 8 中引入的记法及公式 (26′), (26″), (26‴), 在笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标系下分别得到

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2=B_xdy\wedge dz+B_ydz\wedge dx+B_zdx\wedge dy\tag{32′}$$

$$=B_rrd\varphi\wedge dz+B_\varphi dz\wedge dr+B_zrdr\wedge d\varphi\tag{32″}$$

$$=B_RR^2\cos\theta d\varphi\wedge d\theta+B_\varphi Rd\theta\wedge dR+B_\theta R\cos\theta dR\wedge d\varphi\tag{32‴}$$

h. 此外, 根据公式 (28), 还能得到

$$\omega_\rho^3=\rho\sqrt{E_1E_2E_3}dt^1\wedge dt^2\wedge dt^3.\tag{33}$$

例 10　特别地, 公式 (33) 在笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标下分别有

$$\omega_\rho^3=\rho dx\wedge dy\wedge dz\tag{33′}$$

$$=\rho rdr\wedge d\varphi\wedge dz\tag{33″}$$

$$=\rho R^2\cos\theta dR\wedge d\varphi\wedge d\theta.\tag{33‴}$$

现在, 既已得到公式 (31)—(33), 从算子 grad,rot 及 div 的定义 (9)—(11) 出发, 就能容易地得出它们在三正交曲线坐标系下的坐标表示式.

设 $\operatorname{grad} f = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$. 根据定义得到

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f} := d\omega^0_f := df := \frac{\partial f}{\partial t^1}dt^1 + \frac{\partial f}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial f}{\partial t^3}dt^3.$$

据公式 (31) 由此得到

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3. \tag{34}$$

例 11 在笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标系下分别得到

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{34'}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{34''}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial R}\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{R^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{34'''}$$

给定场 $\boldsymbol{A}(t) = (A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3)(t)$, 我们来求旋量场

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{B}(t) = (B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$$

的坐标 B^1, B^2, B^3.

从定义 (10) 及公式 (31) 出发得到

$$\begin{aligned}\omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{A}} &:= d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = d(A^1\sqrt{E_1}dt^1 + A^2\sqrt{E_2}dt^2 + A^3\sqrt{E_3}dt^3)\\ &= \left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right)dt^2\wedge dt^3\\ &\quad + \left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right)dt^3\wedge dt^1 + \left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right)dt^1\wedge dt^2.\end{aligned}$$

据 (32) 式得

$$B^1 = \frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right),$$

$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{E_3E_1}}\left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right),$$

$$B^3 = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2}}\left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right),$$

即

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix}\sqrt{E_1}\boldsymbol{e}_1 & \sqrt{E_2}\boldsymbol{e}_2 & \sqrt{E_3}\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial t^1} & \dfrac{\partial}{\partial t^2} & \dfrac{\partial}{\partial t^3}\\ \sqrt{E_1}A^1 & \sqrt{E_2}A^2 & \sqrt{E_3}A^3\end{vmatrix}. \tag{35}$$

例 12 在笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{35'}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial r A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{35''}$$

$$= \frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos\theta}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial R A_\theta}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial R A_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{35'''}$$

i. 设给定了场 $\boldsymbol{B}(t) = (B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$. 要求 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}$ 的表达式.

根据定义 (11) 及公式 (32), 我们得到 ·

$$\begin{aligned}\omega^3_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}} &:= d\omega^2_{\boldsymbol{B}} = d(B^1\sqrt{E_2E_3}dt^2\wedge dt^3 + B^2\sqrt{E_3E_1}dt^3\wedge dt^1 + B^3\sqrt{E_1E_2}dt^1\wedge dt^2)\\ &= \left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}B^1}{\partial t^1} + \frac{\partial\sqrt{E_3E_1}B^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\sqrt{E_1E_2}B^3}{\partial t^3}\right)dt^1\wedge dt^2\wedge dt^3.\end{aligned}$$

据公式 (33) 推知

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}B^1}{\partial t^1} + \frac{\partial\sqrt{E_3E_1}B^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\sqrt{E_1E_2}B^3}{\partial t^3}\right). \tag{36}$$

由此, 在笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标系下分别得到:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{36'}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{36''}$$

$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta B_R}{\partial R} + \frac{\partial R B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R^2\cos\theta B_\theta}{\partial \theta}\right). \tag{36'''}$$

j. 可利用 (34),(36) 式求拉普拉斯算子 $\Delta = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}$ 在任何三正交坐标系下的表示式:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \mathrm{div}\ \mathrm{grad} f = \mathrm{div}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\right) + \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{\frac{E_3E_1}{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{\frac{E_1E_2}{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\right)\right).\end{aligned} \tag{37}$$

例 13 特别地, 根据公式 (37) 在笛卡儿坐标系, 柱坐标系和球坐标系下分别有

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{37'}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{37''}$$

$$= \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \tag{37'''}$$

练 习

1. 算子 grad, rot, div 及代数运算.

验证以下各式, 并用符号 grad, rot, div 把它们表出:

关于grad:

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

b) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$,

c) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (A\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$,

d) $\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times A)$.

关于 rot:

e) $\nabla\times(f\boldsymbol{A}) = f\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla f\times\boldsymbol{A}$,

f) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$;

关于 div:

g) $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = \nabla f\cdot\boldsymbol{A} + f\nabla\cdot\boldsymbol{A}$,

h) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$.

(提示: $\boldsymbol{A}\cdot\nabla = A^1\frac{\partial}{\partial x^1} + A^2\frac{\partial}{\partial x^2} + A^3\frac{\partial}{\partial x^3}$; $\boldsymbol{B}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$.)

2. a) 将 (20)—(22) 内的算子用笛卡儿坐标写出.

b) 用直接计算的方法验证 (20) 式及 (21) 式.

c) 验证表示成笛卡儿坐标形式的公式 (24).

d) 用算子 ∇ 写出公式 (24), 并用向量代数式验证它.

3. 根据例 2 中研究的麦克斯韦方程组推出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

4. a) 在 $\mathbb{R}^3$ 内, 求出笛卡儿坐标, 柱坐标, 球坐标下的拉梅参数 H_1, H_2, H_3.

b) 利用拉梅参数重写公式 (28),(34)—(37).

5. 试在

a) 笛卡儿坐标下, b) 柱坐标下, c) 球坐标下分别写出场 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

d) 设场 $\boldsymbol{A}$ 如上, 试求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 及 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

6. 设函数 f 在柱坐标下有 $\ln\frac{1}{r}$ 的形式. 试分别在

a) 笛卡儿坐标下, b) 柱坐标下, c) 球坐标下, 写出场 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}f$. d) 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 及 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

7. 在固定的切空间 $T\mathbb{R}^3_p, p \in \mathbb{R}^3$, 试求当从 $\mathbb{R}^3$ 内的笛卡儿坐标系变到

a) 柱坐标, b) 球坐标, c) 任意三正交坐标系时的坐标变换的公式.

d) 应用 c) 中所得公式及公式 (34)—(37), 直接验证向量场 $\operatorname{grad}\boldsymbol{A}, \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ 及数量场 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, Δf 关于为计算它们选取的坐标系是不变的.

8. 设空间 $\mathbb{R}^3$ 做为刚体, 绕某轴以不变的角速度 ω 旋转. 设 $\boldsymbol{v}$ 是在固定的瞬间, 点的线速度场.

a) 在柱坐标下写出场 $\boldsymbol{v}$.

b) 求 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$.

c) 指出场 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 关于旋转轴的方向.

d) 验证: 在空间的任何点处, $|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}| = 2\omega$.

e) 说明 $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ 的几何意义及 d) 中揭示出的这个向量在空间每一点是常向量这一性质的几何意义.

§2 场论的积分公式

1. 用向量表示的经典积分公式

a. 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}, \omega^2_{\boldsymbol{B}}$ 的向量写法

在上一章中, 我们已经看到 (参看那里的 §2, 公式 (23),(24)), 场 $\boldsymbol{F}$ 的功形式 $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ 在有向光滑曲线 (路径)γ 上的限制, 或场 $\boldsymbol{V}$ 的流量形式 $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ 在定向曲面 S 上的限制分别是

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}|_\gamma = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}\rangle ds,\ \omega^2_{\boldsymbol{V}}|_S = \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma,$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 是确定 γ 方向的单位向量, 与沿 γ 运动的速度向量共向, ds 是 γ 上的长度元素 (形式), $\boldsymbol{n}$ 是确定曲面 S 的方向的单位法线向量, 而 $d\sigma$ 是曲面 S 的面积元素 (形式).

在向量分析中, 经常使用曲线长向量元素 $d\boldsymbol{s} := \boldsymbol{e}ds$ 及曲面面积向量元素 $d\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{n}d\sigma$. 使用这些记号，可得

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}|_\gamma = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}\rangle ds = \langle \boldsymbol{A}, d\boldsymbol{s}\rangle = \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{1}$$

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}|_S = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma = \langle \boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\sigma}\rangle = \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

b. 牛顿 – 莱布尼茨公式

设 $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$, 而 $\gamma : [a, b] \to D$ 是区域 D 中的道路.

将斯托克斯公式用于 0– 形式 ω_f^0

$$\int_{\partial\gamma} \omega_f^0 = \int_\gamma d\omega_f^0,$$

一方面它表示的是等式

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_\gamma df,$$

这公式与古典的牛顿 – 莱布尼茨公式

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b df(\gamma(t))$$

一致, 另一方面,据梯度之定义, 它又意味着

$$\int_{\partial\gamma} \omega_f^0 = \int_\gamma \omega_{\text{grad} f}^1. \tag{3}$$

因此, 利用 (1) 式, 即可把牛顿 – 莱布尼茨公式重新写成

$$\boxed{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_\gamma (\text{grad} f) \cdot d\boldsymbol{s}} \tag{3'}$$

的形式. 在这样的写法下, 它表示.

函数在道路上的增长, 等于此函数的梯度场沿该道路做的功.

这是一个相当方便且内涵丰富的记法. 除了明显看出, 梯度场 $\text{grad} f$ 沿路径 γ 所做的功只与路径的起点、终点有关外, 它还使我们得到一个比较精细的结果. 这就是, 当沿函数 f 的等值面 $f = c$ 运动时, 场 $\text{grad} f$ 不做任何的功, 因为这时 $\text{grad} f \cdot d\boldsymbol{s} = 0$. 此外, 如公式左端所指出的, 场 $\text{grad} f$ 所做的功, 与其说与路径的起点与终点有关, 倒不如说与这些点在 f 的哪些等值面上有关.

c. 斯托克斯公式

我们记得, 场在闭路上做的功, 叫做场在该闭路上的*环流量*. 为了强调积分是沿闭路进行的, 常常用 $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ 代替传统的记法 $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$. 如果 γ 是平面曲线, 有时还用记号 $\circlearrowleft\!\!\int_\gamma, \circlearrowright\!\!\int_\gamma$, 其中的箭头指出了沿曲线 γ 运动的方向.

有时在谈到沿有限多个闭路组成的路径积分时, 也使用环流量这个词. 例如, 在沿某个带边紧曲面的边界积分时, 就使用这个术语.

设 $\boldsymbol{A}$ 是定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的区域 D 内的光滑向量场, 而 S 是 D 中有边 (分片) 光滑定向紧曲面, 将斯托克斯公式应用于 1– 形式$\omega_{\boldsymbol{A}}^1$, 并考虑到向量场旋度的定义, 就得到等式

$$\int_{\partial S} \omega_{\boldsymbol{A}}^1 = \int_S \omega_{\text{rot}\boldsymbol{A}}^2. \tag{4}$$

利用关系式 (2), 即可把公式 (4) 改写为经典形式的斯托克斯公式

$$\boxed{\oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_S (\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}} \tag{4'}$$

在这种写法下, 它表示的是

向量场在曲面边界上的环流量, 等于此场的旋量通过该曲面的流量.

照例, 这时在 ∂S 上选与 S 的定向和谐的定向.

d. 高斯–奥斯特罗格拉德斯基公式

设 V 是定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的紧区域, V 的边界是有界 (分片) 光滑曲面 ∂V. 若 $\boldsymbol{B}$ 是 V 中的光滑场, 则根据场的散度的定义, 斯托克斯公式就给出了等式

$$\int_{\partial V} \omega_{\boldsymbol{B}}^2 = \int_V \omega_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}^3. \tag{5}$$

借助 (2) 式, 并用 $\mathbb{R}^3$ 中的体积形式 dV 取代形式 ω_ρ^3 的记法 ρdV, 可把等式 (5) 改写成经典的高 - 奥公式的形式

$$\boxed{\iint_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{B} dV.} \tag{5'}$$

在这种写法下, 它表示的是

向量场通过区域边界的流量, 等于此场的散度在该区域的积分.

e. 经典积分公式摘要

我们把分析的三个经典积分公式的向量写法总结如下:

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_\gamma (\nabla f) \cdot d\boldsymbol{s} \text{ (牛顿 – 莱布尼茨公式)} \tag{3''}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{(斯托克斯公式)} \tag{4''}$$

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) dV \quad \text{(高 – 奥公式)} \tag{5''}$$

2. div, rot, grad 的物理解释

a. 散度

公式 (5′) 可用以说明量 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}(x)$ 的物理意义: $\mathrm{div}\boldsymbol{B}(x)$ 是向量场 $\boldsymbol{B}$ 在该场定义域 V 中的点 x 处的散度. 设 $V(x)$ 是点 x 包含在 V 中的一个邻域 (比如说是球形邻域). 我们仍用记号 $V(x)$ 表示这个邻域的体积, 而用 d 表示它的直径.

由公式 (5′), 根据三重积分的中值定理, 得

$$\iint\limits_{\partial V(x)} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}\boldsymbol{B}(x')V(x),$$

其中 x' 是邻域 $V(x)$ 的某个点. 如果 $d \to 0$, 则 $x' \to x$, 既然 $\boldsymbol{B}$ 是光滑场, 所以 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x') \to \operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)$. 这就是说

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x) = \lim_{d\to 0} \frac{\displaystyle\iint\limits_{\partial V(x)} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V(x)}. \tag{6}$$

我们将认为 $\boldsymbol{B}$ 是 (液体或气体的) 流速场. 这时场通过区域 $V(x)$ 的边界的流量或者说, 介质通过此区域边界的体积扩散量, 根据质量守恒定律, 它的产生只因区域内存在汇或源 (其中包括介质密度的变化), 且其量等于所有这些因素的强度之和; 我们用区域 $V(x)$ 内的 "源"这个词来表示汇或源的总强度. 这就是说, (6) 式右端的分数是源在区域 $V(x)$ 中 (单位体积)的平均强度, 而这个量的极限, 即 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)$ 是在点 x 处源的单位体积的强度. 但是在区域 $V(x)$ 中的某个量对此区域体积之比当 $d \to 0$ 时的极限, 通常叫做该量在这点处的**密度**, 而密度作为点的函数, 通常叫做该量在空间给定部分上的**分布密度**.

因此, 向量场 $\boldsymbol{B}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ 可解释为源在流动的区域内 (给定场 $\boldsymbol{B}$ 的区域内) 的分布密度.

例 1 特别地, 如果 $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$, 即任何源都不存在, 则穿过任何区域的边界的流量应为零 —— 进入区域多少, 从区域出去就有多少. 如公式 (5′) 所示, 确实是这样的.

例 2 电量为 q 的点电荷在空间产生一个电场. 设将此电荷安置在坐标原点处. 据库仑[①]定律,在点 $x \in \mathbb{R}^3$ 处的场强 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x)$ (即作用于 x 点处的检验单位电荷上的力) 具有

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}$$

的形式, 这里 ε_0 是有量纲常数, 而 $\boldsymbol{r}$ 是点 x 的向径.

场 $\boldsymbol{E}$ 在坐标原点之外处处有定义. 在球坐标下,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \boldsymbol{e}_R,$$

所以由上节的公式 (36‴) 马上看到, 在场 $\boldsymbol{E}$ 的定义域内处处有 $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$.

①库仑 (S. O. Coulomb) (1736—1806) 法国物理学家. 借助他发明的扭称, 用实验方法, 发现了静电荷间与磁极间相互作用的 (库仑) 定律.

这就是说, 若取不包含原点的任何区域 V, 则由公式 (5′), 场 $\boldsymbol{E}$ 通过区域 V 的边界 ∂V 的流量为零.

今取以原点为中心, R 为半径的球面

$$S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\},$$

并求场 $\boldsymbol{E}$ 通过此曲面的流量, 曲面取外法线方向 (关于球的边界球面的法线). 因为向量 $\boldsymbol{e}_R$ 恰好是球面的单位外法线向量, 所以

$$\int_{S_R} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} d\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

因此 (不计有量纲常数 ε_0, 它与物理单位系统的选择有关), 我们得到含于由球面所界之球体内的电荷量.

注意, 在上面讨论的例 2 的条件下, 公式 (5′) 的左边在球面 $\partial V = S_R$ 上的定义是合理的, 而右端的被积函数, 除坐标原点一点外, 在球 V 内到处为零. 但是, 我们所做的计算说明, 公式 (5′) 右端的积分, 不能解释成是恒等于零的函数的积分.

从形式的观点来看, 可以不去分析这种情况, 而认为场 $\boldsymbol{E}$ 在 O 点无定义, 从而我们没有根据谈论等式 (5′), 因为它是对于在整个积分区域内有定义的光滑场证明的. 然而等式 (5′) 的物理解释为质量守恒定律, 这说明, 在正确的解释下, 它应当永远是正确的.

我们现在来更仔细地看一看, 例 2 中的量 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ 在原点不确定是怎样一种情况. 从形式上看, 原来的场 $\boldsymbol{E}$ 在坐标原点处没有定义, 但若从 (6) 式出发去求 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ 时, 则例 2 指出, 应该认为 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}(0) = +\infty$. 就是说, 在 (5′) 式右端的积分号下的 "函数", 除在原点之外, 它处处为零, 但在原点它是无穷大. 这种情况相应于, 与除原点外, 一般没有电荷, 而整个电荷 q 安置在零体积 (即在一个点 O) 中, 在这里电荷密度自然认为是无穷大. 我们在这里遇到了所谓狄拉克[①] δ(Delta)− 函数.

之所以需要物理量的密度, 归根到底是为了根据它求积分求出物理量本身的值. 因此, 没有必要把 δ− 函数做为点函数单独地确定它, 要紧的是确定它的积分. 如果认为物理上的 "函数" $\delta_{x_0}(x) = \delta(x_0; x)$ 应该对应看这样分布的密度, 例如空间中的质量, 它的整体的质量是一个单位, 而其质量却集聚于一点 x_0 处, 那么很自然应认为

$$\int_V \delta(x_0, x) dV = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_0 \in V \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x_0 \notin V \text{ 时}. \end{cases}$$

这样, 从数学之理想化的观点来看, 空间中的物理量 (例如质量, 电荷等等) 的可能分布概念, 应该认为是那样的, 它的分布密度是由普通的有限函数与一组奇异 "函

①狄拉克 (P.A. M. Dirac) (1902—1984) 英国理论物理学家, 量子力学创始人之一. 有关狄拉克 δ− 函数的详细内容, 将在第 17 章 §4 第 5 段及 §5 第 4 段中叙述.

数"(形如狄拉克的 $\delta-$ 函数) 的和构成的, 前者对应于量在空间中的连续分布, 后者对应于量集聚在个别点上.

这说明, 从这样的角度看, 例2中导出的计算结果, 能用一个等式 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}(x) = \frac{q}{\varepsilon_0}\delta(0;x)$ 来表示. 这时, (5′) 式右端是对场 $\boldsymbol{E}$ 的积分, 这积分的值实际上可能是 $\frac{q}{\varepsilon_0}$, 也可能是零, 这就全看积分域 V 是不是包含 (电荷所集聚的那个) 坐标原点了.

在这种意义下, 我们能够 (遵循高斯) 断定, 通过物体表面的电通量, 等于含于物体内的电荷之和 (而不计及与测量单位系统有关的系数). 也应该在同样的意义下, 去解释 §1 内讨论过的麦克斯韦方程组 ((12) 式) 中的电荷分布密度 ρ.

b. 旋量

我们从下面的例子开始对向量场的旋量的物理意义的考察.

例 3 设整个空间如同刚体, 以不变的角速度 ω 绕固定轴旋转 (设此轴为 Oz). 我们来求空间点的线速度场 $\boldsymbol{v}$ 的旋量 (这里考察的是在任意固定瞬间的场).

在柱坐标 (r,φ,z) 下, 场 $\boldsymbol{v}(r,\varphi,z)$ 可简单地写成: $\boldsymbol{v}(r,\varphi,z) = \omega r\boldsymbol{e}_\varphi$. 这时根据 §1 公式 (35″), 立刻得到 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = 2\omega\boldsymbol{e}_z$. 就是说, 在这种情况下 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ 是一个沿旋转轴方向的向量, 它的大小 2ω 在不计系数的情况下与旋转角速度重合, 而由它的方向, 依据整个空间 $\mathbb{R}^3$ 的定向, 也完全确定了旋转的方向.

例 3 中所描述的场, 有点像泄水旋涡液流速度场或龙卷风区域空气运动的涡旋状流场. 因此, 向量场在一点处的旋量, 刻画了在这点附近的场的旋转程度.

注意, 场沿闭路的环流量, 随场向量值的大小的改变而成比例地改变, 而且,像例 3 中所断定的那样, 可以用它来刻画场的旋转特征. 不过,为了完全刻画场在一点周围的旋转性,必须计算三个不同平面上沿闭路的环流. 现在就来做这件事.

取以 x 为中心, 位于与第 i 个坐标轴垂直的平面上的圆 $S_i(x)$,$i=1,2,3$. 取这个坐标轴的单位向量作为 $S_i(x)$ 的法向量给 $S_i(x)$ 定向. 设 d 是 $S_i(x)$ 的直径. 由对光滑场 $\boldsymbol{A}$ 适用的公式 (4), 立刻得到

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_i = \lim_{d\to 0}\frac{\displaystyle\oint_{\partial S_i(x)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}}{S_i(x)}, \tag{7}$$

这里用 $S_i(x)$ 表示所考察的圆的面积. 这样一来, 场 $\boldsymbol{A}$ 在与第 i 个坐标轴正交的平面内沿具单位面积的圆的圆周的环流量, 刻画的是向量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 的第 i 个分量.

为了完全阐明向量场的旋量本身的意义, 我们回忆, 空间的任何线性变换都是由在三个互相正交方向的伸缩, 空间作为刚体的平移以及空间作为刚体的旋转 (三种变换) 复合而成的变换. 同时任何的旋转可作为绕某个轴的旋转而实现. 介质的任何光滑变形 (液体或气体的流动, 泥土坍塌或钢条的弯曲) 都是局部线性的. 再注意到例 3 就可得到一个结论: 若有描写介质运动的向量场 (介质质点速度场), 则这个场

在每个点的旋度给出点的邻域旋转的瞬时轴, 绕瞬时轴旋转的瞬时角速度的大小及旋转的方向. 就是说, 旋量完全刻画了介质运动的旋转部分. 这些将在下面更明确起来. 那时, 我们将说明应把旋量看做是介质的一种局部旋转分布密度.

c. 梯度

关于数量场的梯度, 或直接了当地说是函数的梯度, 我们已经讲得足够详细了. 所以这里只提一下要点.

因为 $\omega'_{\mathrm{grad}f}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \mathrm{grad}f, \boldsymbol{\xi}\rangle = df(\boldsymbol{\xi}) = D_{\boldsymbol{\xi}}(f)$, 这里 $D_{\boldsymbol{\xi}}(f)$ 是函数 f 沿向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的微分, 所以向量 $\mathrm{grad}f$ 与函数 f 的等值面正交. 它指示出在每个点处函数值增长最快的方向, 而它的值 $|\mathrm{grad}f|$ 给出了这一增长 (相对于用以度量自变元在空间中的位移的单位长度) 的速度.

关于作为密度的梯度, 将在下面叙述.

3. 一些进一步的积分公式

a. 高 – 奥公式的向量形式

将旋量与梯度解释成某种密度, 类似于将散度解释为密度(参看 (6)), 能从下面与高 – 奥公式有关的经典向量分析公式得到:

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}dV = \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \quad (\text{散度定理}), \tag{8}$$

$$\int_V \nabla\times\boldsymbol{A}dV = \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{A} \quad (\text{旋度定理}), \tag{9}$$

$$\int_V \nabla f dV = \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} f \quad (\text{梯度定理}), \tag{10}$$

其中第一个公式 (除记号不同外) 与等式 (5′) 一致, 从而它就是高 – 奥公式. 将公式 (8) 用于公式 (9) 与公式 (10) 中相应向量场的每个分量上, 就得出公式 (9) 与公式 (10).

保留等式 (6) 中的那些记号 $V(x)$,d 等, 从公式 (8)—(10) 用同一方式得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(x) = \lim_{d\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\partial V(x)} d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}}{V(x)}, \tag{6′}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(x) = \lim_{d\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\partial V(x)} d\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{A}}{V(x)}, \tag{11}$$

$$\nabla f(x) = \lim_{d\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\partial V(x)} d\boldsymbol{\sigma} f}{V(x)}. \tag{12}$$

等式 (8)—(10) 的右边, 可分别解释为: 向量场 $\boldsymbol{B}$ 通过区域 V 的界面 ∂V 的标量流, 向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过 ∂V 的向量流, 及数量场 f 通过 ∂V 的向量流. 这时位于 (6′), (11),(12) 式左边的量 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}, \mathrm{rot}\boldsymbol{A}, \mathrm{gard}f$, 可分别解释为相应的这些场源的分布密度.

注意, (6′), (11), (12) 诸式右边与坐标系无关. 由此又重新推出了梯度, 旋度与散度的不变性.

b. 斯托克斯公式的向量形式

公式 (8)—(10) 是高－奥公式与向量场及标量场上的代数运算相结合而得的结果. 与这情况类似, 将这些运算与经典的斯托克斯公式 (下面三公式中的第一个) 结合起来就得到下面的三个公式.

设 S 是 (分片) 光滑的紧定向曲面, ∂S 是它的具和谐定向的边界, $d\boldsymbol{\sigma}$ 是曲面 S 上的面积向量元素, $d\boldsymbol{s}$ 是 ∂S 上的长度向量元素. 这时, 对于光滑场 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, f$, 成立以下关系

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \int_{\partial S} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{13}$$

$$\int_S (d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla)\times\boldsymbol{B} = \int_{\partial S} d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}, \tag{14}$$

$$\int_S d\boldsymbol{\sigma}\times\nabla f = \int_{\partial S} d\boldsymbol{s}f. \tag{15}$$

公式 (14),(15) 从斯托克斯公式 (13) 推出. 至于它们的证明, 我们在这里省略了.

c. 格林公式

设 S 是某个曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 S 的单位法向量, 则函数 f 沿向量 $\boldsymbol{n}$ 的导数 $D_{\boldsymbol{n}}f$ 在场论中经常用符号 $\dfrac{\partial f}{\partial n}$ 表示. 例如,

$$\langle\nabla f, d\boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle\nabla f, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma = \langle\mathrm{grad}f, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma = D_{\boldsymbol{n}}f d\sigma = \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma.$$

因此, $\dfrac{\partial f}{\partial n}d\boldsymbol{\sigma}$ 是梯度场 $\mathrm{grad}f$ 通过面元素 $d\sigma$ 的流量.

利用这些记号可将在向量分析与场论中有相当广泛应用的格林公式如下写出:

$$\int_V \nabla f\cdot\nabla g dV + \int_V g\nabla^2 f dV = \int_{\partial V}(g\nabla f)\cdot d\boldsymbol{\sigma}\left(=\int_{\partial V} g\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma\right), \tag{16}$$

$$\int_V (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g)dV = \int_{\partial V}(g\nabla f - f\nabla g)\cdot d\boldsymbol{\sigma}\left(=\int_{\partial V}\left(g\frac{\partial f}{\partial n} - f\frac{\partial g}{\partial n}\right)d\sigma\right). \tag{17}$$

特别地, 若在 (16) 式中令 $f=g$, 在 (17) 式中置 $g\equiv 1$, 则相应地得到

$$\int_V |\nabla f|^2 dV + \int_V f\Delta f dV = \int_{\partial V} f\nabla f\cdot d\boldsymbol{\sigma}\left(=\int_{\partial V} f\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma\right), \tag{16′}$$

$$\int_V \Delta f dV = \int_{\partial V} \nabla f \cdot d\boldsymbol{\sigma} \left(= \int_{\partial V} \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma \right). \tag{17'}$$

最后这个等式常被称为**高斯定理**. 作为例子, 我们来证明等式 (16),(17) 中的第二个:

$$◀ \int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot (g\nabla f - f\nabla g) dV$$
$$= \int_V (\nabla g \cdot \nabla f + g\nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla g - f\nabla^2 g) dV$$
$$= \int_V (g\nabla^2 f - f\nabla^2 g) dV = \int_V (g\Delta f - f\Delta g) dV.$$

在这里我们利用了高 – 奥公式以及等式 $\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{A} + \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{A}$. ▶

练 习

1. 根据高 – 奥公式 (8) 证明 (9),(10) 二式.

2. 根据斯托克斯公式 (13) 证明 (14),(15) 二式.

3. a) 验证, 若公式 (8),(9),(10) 中曲面积分号下的函数当 $r \to \infty$ 时阶数为 $O\left(\frac{1}{r^3}\right)$, 那么, 当区域 V 无界时, 这三个公式仍然成立. (其中 $r = |\boldsymbol{r}|, \boldsymbol{r}$ 是空间 $\mathbb{R}^3$ 的点的向径).

   b) 若在 (13),(14),(15) 式中的曲线积分号下的函数当 $r \to \infty$ 时阶数为 $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, 试检查这些公式对于非紧曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是否还成立.

   c) 举例证明, 斯托克斯公式 (4') 及高 – 奥公式 (5'), 对于无界曲面及无界区域, 一般不再成立.

4. a) 从把散度作为源的密度出发, 说明 §1 的麦克斯韦方程组 (12) 中的方程 2 指的是磁场中没有点源(即没有磁荷).

   b) 利用高 – 奥公式及 §1 之麦克斯韦方程组 (12) 证明, 试验电荷的任何刚性构形 (例如一个电荷), 都不能在静电场区域内处于稳定平衡状态, 而不受产生此场的 (其他) 电荷影响 (假定这时除了建立这个场的力以外, 再没有其他的力作用在这个系统上). 这个事实叫做 Earnshaw S. 定理.

5. 设电磁场是稳定的, 即不随时间而变. 于是 §1 之麦克斯韦方程组 (12) 就分成了两个独立的部分 —— *静电学方程组* $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 及*静磁学方程组* $\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{j}{\varepsilon_0 c^2}, \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

   据高 – 奥公式, 方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (ρ 是电荷分布密度) 能化成关系式 $\int_S \nabla \cdot \boldsymbol{E} d\sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, 这里左端是闭曲面 S 上的电通量, 右端是位于曲面 S 所限区域内的电荷之和 Q 除以有量纲常数 ε_0. 在静电学中通常把这个关系叫做*高斯定律*. 试利用高斯定律在以下诸情况分别求出电场 $\boldsymbol{E}$.

   a) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的球面生成的. 这时, 并证明, 在球外, 它与把这同样多的电荷安置在球心上生成的电场是一样的.

b) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的直线生成的.

c) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的平面生成的.

d) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电的两平行板生成的, 它们所带电量相等, 而电荷符号相反.

e) 电场 $\boldsymbol{E}$ 是由均匀带电球体生成的.

6. a) 试证格林公式 (16).

b) 设 f 是有界域 V 中的调和函数(即 f 在 V 中满足拉普拉斯方程 $\Delta f = 0$). 试根据等式 (17′), 证明此函数的梯度通过 V 之边界的流量等于零.

c) 试证在有界连通域内的调和函数, 不计常值函数加项的区别, 由它在这个区域边界上的法向导数确定.

d) 根据等式 (16′), 证明: 如果 f 是在有界区域 D 内的调和函数, 并且它在 D 的边界 ∂D 上处处为零, 那么它在整个区域 D 上恒为零.

e) 试证: 如果有界区域内的两个调和函数在该区域的边界上一致, 那么它们在整个区域上也一致.

f) 根据等式 (16), 验证以下狄利克雷原理: 在所有在区域边界上取给定值的连续可微函数中, 区域中的调和函数, 且只有这个调和函数, 使狄利克雷积分(即函数的梯度的模的平方在区域上的积分) 取最小值.

7. a) 设 $r(p,q) = |p-q|$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中二点 p,q 间的距离. 将 p 点固定, 得到点 $q \in \mathbb{R}^3$ 的函数 $r_p(q) = r(p,q)$. 试证 $\Delta r_p^{-1}(q) = 4\pi\delta(p;q)$, 其中 δ 是 $\delta-$ 函数.

b) 设 g 是区域 V 中的调和函数. 假定公式 (17) 中 $f = \dfrac{1}{r_p}$, 再考虑到上述结果就得到

$$4\pi g(p) = \int_S \left(g\nabla\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_p}\nabla g \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

证明这是一个真正的等式.

c) 如果 S 是以 p 点为中心以 R 为半径的球面, 试根据上面的公式, 推导出下面等式

$$g(p) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S g d\sigma$$

这就是所谓的*调和函数平均值定理*.

d) 试根据以上结论证明, 若 B 是由球面 S 所界的球, 而 $V(B)$ 是它的体积, 那么等式

$$g(p) = \frac{1}{V(B)} \int_B g dV$$

也成立.

e) 设 p,q 是欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点, 把 a) 中所考察的函数 $\dfrac{1}{r_p}$ (这函数对应着安放在p点的点电荷的势)取成 $\ln\dfrac{1}{r_p}$ (该函数对应着空间中均匀带电直线的势).试证: $\Delta \ln\dfrac{1}{r_p} = 2\pi\delta(p,q)$, 其中 $\delta(p,q)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 $\delta-$ 函数.

f) 重复 a), b), c), d) 中的论证, 证明平面区域内的调和函数的平均值定理.

8. *多维柯西中值定理.*

经典的积分中值定理 (“拉格朗日定理”) 断言, 如果函数 $f: D \to \mathbb{R}$ 在可测连通紧集 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上连续, 则存在点 $\xi \in D$ 使

$$\int_D f(x)dx = f(\xi) \cdot |D|,$$

其中 $|D|$ 是 D 的测度 (体积).

a) 现设 $f, g \in C(D, \mathbb{R})$, 亦即,$f$ 和 g 是在 D 中定义的连续实值函数. 试证, 成立以下 “柯西定理”: 存在点 $\xi \in D$ 使

$$g(\xi) \int_D f(x)dx = f(\xi) \int_D g(x)dx.$$

b) 设 D 是具光滑边界 ∂D 的紧区域, 而 f, g 是 D 中的两个光滑向量场. 试证: 存在点 $\xi \in D$ 使

$$\operatorname{div}\boldsymbol{g}(\xi) \cdot \underset{\partial D}{\operatorname{Flux}}\boldsymbol{f} = \operatorname{div}\boldsymbol{f}(\xi) \cdot \underset{\partial D}{\operatorname{Flux}}\boldsymbol{g},$$

其中 $\underset{\partial D}{\operatorname{Flux}}$ 是向量场通过曲面 ∂D 的流量.

§3 势 场

1. 向量场的势

定义 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内的向量场, 函数 $U: D \to \mathbb{R}$ 叫做区域 D 内场 $\boldsymbol{A}$ *的势*, 假如在这区域内 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U$.

定义 2 具有势的场叫做*势场*.

因为在连通区域里, 不计常数之差, 函数由其偏导数确定, 所以, 在这种区域内, 一个向量场的势场在不计一个常加项的情况下被完全确定.

在本教程第 1 卷中, 我们曾经顺便谈到过势. 在这里我们要比较详细地讨论势这个重要概念. 请注意, 在物理中, 当讨论各种力场时, 通常说 U 是场 $\boldsymbol{F}$ 的势, 是指 $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$; 所以物理中的势与我们在定义 1 中所引入的势差一个符号.

例 1 位于坐标原点的质点 M 所产生的引力场, 在向径为 $\boldsymbol{r}$ 的点处的强度 $\boldsymbol{F}$, 据*牛顿定律*, 可用公式

$$\boldsymbol{F} = -GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1}$$

计算, 其中 $r = |\boldsymbol{r}|$.

这是场作用在位于空间相应点处的单位质量上的力. 引力场 (1) 是个势场. 在定义 1 的意义下, 它的势是函数

$$U = GM\frac{1}{r}. \tag{2}$$

例 2 位于坐标原点的点电荷 q 的电场, 在向径为 r 的点处的强度 $\boldsymbol{E}$, 按照库仑定律是

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

因此, 这个电场像重力场一样也是势场. 在物理术语意义下, 它的势由下式确定:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

2. 势场的必要条件

等式 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}U$ 按照微分形式的说法就是 $\omega^1_{\boldsymbol{A}} = d\omega^0_U = dU$. 因此, 由于 $d^2\omega^0_U = 0$ 而推知

$$d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0. \tag{3}$$

这是场 $\boldsymbol{A}$ 成为势场的必要条件.

在笛卡儿坐标下它具有简单的表达式. 若 $\boldsymbol{A} = (A^1, \cdots, A^n)$, 且 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}U$, 则在笛卡儿坐标下 $A^i = \dfrac{\partial U}{\partial x^i}, i = 1, \cdots, n$; 并且当势 U 足够光滑时 (例如二阶偏导数连续时) 必有

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{3'}$$

直接了当地说, 这就是有混合导数等式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^i}.$$

在笛卡儿坐标下, $\omega^1_{\boldsymbol{A}} = \sum\limits_{i=1}^{n} A^i dx^i$. 所以在这种情况等式 (3) 与关系 (3′) 实际上是等价的.

在 $\mathbb{R}^3$ 的场合, 据旋量定义有 $d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = \omega^2_{\mathrm{rot}\boldsymbol{A}}$, 所以在 $\mathbb{R}^3$ 中, 场 $\boldsymbol{A}$ 为势场的必要条件 (3) 能够写成

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = 0$$

的形式. 这与我们已经知道的关系 $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}U = 0$ 是一致的.

例 3 在空间 $\mathbb{R}^3$ 的笛卡儿坐标下, 场 $\boldsymbol{A} = (x, xy, xyz)$ 不是势场, 因为, 比如有

$$\frac{\partial(xy)}{\partial x} \neq \frac{\partial x}{\partial y}.$$

例 4 我们来考察场 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$, 它在平面笛卡儿坐标系中除原点之外的一切点上有定义, 用式子

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \tag{4}$$

给出. 这里, 场成为势场的必要条件 $\dfrac{\partial A_x}{\partial y} = \dfrac{\partial A_y}{\partial x}$ 成立. 然而我们很快就能判定, 这个场在其定义域内并不是势场.

因此, 一般来说, 必要条件 (3), 或在笛卡儿坐标下的条件 (3′), 并不是场成为势场的充分条件.

3. 向量场具有势的判别准则

命题 1 *设向量场 $\boldsymbol{A}$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内连续, 那么 $\boldsymbol{A}$ 在 D 内为势场的充分且必要的条件 是它在 D 内的任何闭路 γ 上的环流量等于零:*

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0. \tag{5}$$

◀ **必要性** 设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad} U$. 由此, 据牛顿 – 莱布尼茨公式 (§2 公式 (3′)) 有

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)),$$

这里 $\gamma : [a,b] \to D$. 如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 即是当 γ 为闭路时, 上式右端显然为零, 因而左端也是零.

充分性 设条件 (5) 已被满足. 由此,沿区域 D 内的任何道路 (不一定闭) 的积分, 只与道路的起点与终点有关, 而与道路上的其他点无关. 实际上, 如果 γ_1 与 γ_2 是有共同起点与共同终点的两条道路, 那么, 先沿着 γ_1 积分, 再沿着 $-\gamma_2$ 积分 (即沿着 γ_2 的反向道路积分), 所得到的就是沿着一条闭路 γ 的积分. 一方面由 (5) 式知这积分为零, 另一方面, 它又是沿着 γ_1 与沿着 γ_2 的积分之差. 因此, 这两个积分实际是相等的.

现在, 在 D 内固定一个点 x_0, 并令

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{6}$$

其中右端是沿着一条位于 D 内从 x_0 出发到达 x 的道路的积分. 我们来验证, 这样定出的函数 U 就是场 $\boldsymbol{A}$ 的势. 为了方便, 我们假定在 $\mathbb{R}^n$ 内用的是笛卡儿坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$. 这时

$$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = A^1 dx^1 + \cdots + A^n dx^n.$$

如果从点 x 沿直线移动一个向量 $h\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i$ 是相应坐标轴上的单位向量, 那么这时函数 U 得到一个增量

$$U(x + h\boldsymbol{e}_i) - U(x) = \int_{x^i}^{x^i+h} A^i(x^1, \cdots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \cdots, x^n) dt,$$

它等于形式 $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$ 沿着从 x 到 $x + h\boldsymbol{e}_i$ 的这个指定道路的积分. 由场 $\boldsymbol{A}$ 的连续性, 根据中值定理, 这个等式可以写成

$$U(x + h\boldsymbol{e}_i) - U(x) = A^i(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^i + \theta h, x^{i+1}, \cdots, x^n) h$$

的形式, 其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 将此等式除以 h, 并令 h 趋于零就得到

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(x) = A^i(x).$$

这实际上就是 $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad} U$. ▶

注 1 从这个证明中可以看到, 为使场 $\boldsymbol{A}$ 成为势场, 只要条件 (5) 对于光滑道路成立就够了, 或者, 即使只要对于由平行于坐标轴的线段组成的折线成立就够了.

现在, 我们回过头来看看例 4. 当时 (参看第八章 §1 例 1), 我们曾算出场 (4) 在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上按逆时针方向转一周的环流量为 $2\pi (\neq 0)$.

因此, 根据命题 1 可得, 场 (4) 不是区域 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内的势场.

然而本来有, 例如

$$\mathrm{grad}\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

从而, 函数 $\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ 应该是场 (4) 的势才是. 这不是矛盾的吗? 矛盾暂时还没有, 因为唯一正确的结论, 也是这时应该做出的结论, 在于函数 $\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ 并非在整个区域 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内有定义. 确实如此, 例如, 它在 Oy 轴上的点就没有定义.

这时, 你们可能会说, 那就考察点 (x, y) 的极角函数 $\varphi(x, y)$. 它实际上就是函数 $\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, 不过现在在 $x = 0$ 点处, 只要 (x, y) 不是原点, 也有定义. 在区域 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内, 处处成立

$$d\varphi = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

但是, 就是现在也还没有任何矛盾, 尽管情况更加微妙了. 请注意 $\varphi(x, y)$, 实际上就是它在我们的区域 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内不是连续单值函数. 当点 (x, y) 绕着原点逆时针运动使极角连续变动, 增加 2π 时, 点又回到了原来的位置. 就是说, 在这个点上, 我们得到的不是原来的函数值, 而是一个新的值. 因此, 要么放弃 φ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内的连续性, 要么放弃它的单值性.

在区域 $\mathbb{R}^2 \setminus O$ 的每一点的一个 (不含坐标原点的) 小邻域内, 能够分出函数 φ 的许多连续单值分枝来, 所有这样的分枝, 彼此只差一个常数 (2π 的整数倍). 正是这个原因, 它们的微商相同, 并能做为场 (4) 的局部势. 然而在整个区域 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内, 场 (4) 却没有势.

在例 4 中详细分析的情况, 在以下意义下可以说是典型的: 场 $\boldsymbol{A}$ 为势场的必要条件 (3) 或 (3′), 局部地说, 也是充分条件. 我们有

命题 2 *如果场为势场的必要条件在某个球内成立, 那么在这个球内, 场是势场.*

◀ 为了直观, 我们首先在平面 $\mathbb{R}^2$ 中圆 $D = \{x, y \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$ 内的情况证明. 对圆 D 的点 (x, y), 从原点引两个不同的二条折线 γ_1, γ_2 到 (x, y) 处, 使它们

的直线段都与坐标轴平行 (图 93). 因为 D 是凸区域, 所以这两条折线围成的矩形 I 完全包含在 D 内.

据斯托克斯公式及条件 (3) 得到

$$\int_{\partial I} \omega_{\boldsymbol{A}}^1 = \int_I d\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = 0.$$

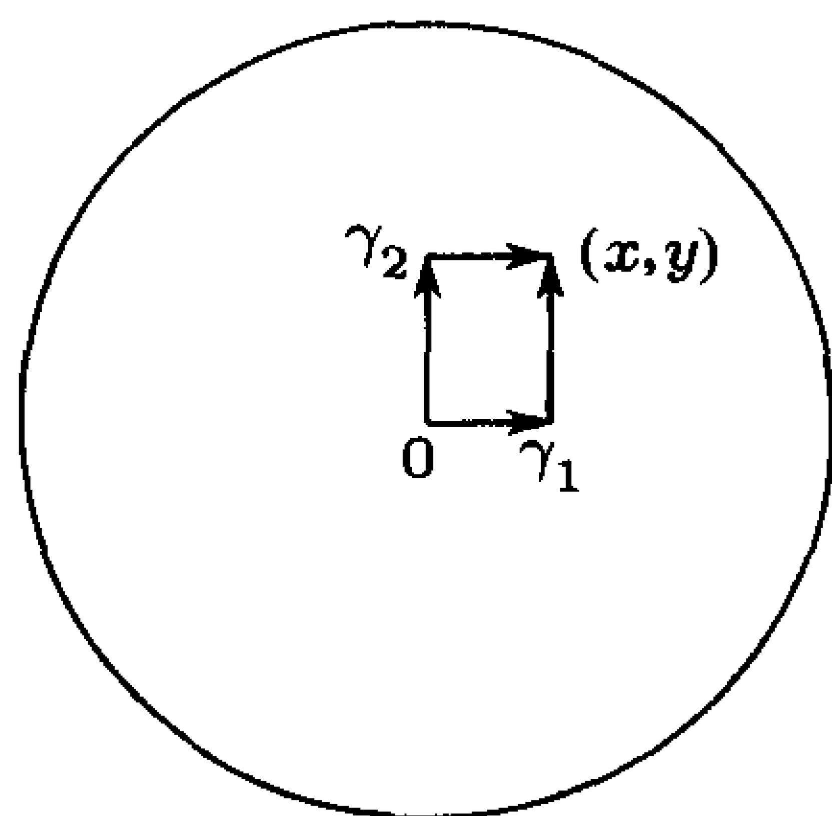


图 93

根据对命题 1 所做的注, 我们由此已能得出 $\boldsymbol{A}$ 在 D 内是势场的结论. 此外, 根据命题 1 中充分性的证明. 可把函数 (6) 重新取做势, 这时把 (6) 中的积分理解成从圆心沿那样一条折线到所讨论的点的线积分, 该折线的各直线段都是平行于一个坐标轴的. 在现在的情况下, 此积分与路径 γ_1, γ_2 之选择的无关性, 可从对于矩形的斯托克斯定理直接得到.

在高维情况, 由对二维矩形的斯托克斯公式即可推知, 把折线积分路径中相邻两直线段换成另外两段, 且这四段能组成一个矩形, 并不会使积分改变. 既然用这种方法能逐次地把一条折线路径改造成另外任一条到达同一点的折线路径, 因此在普遍情况下, 这个势就能完全合理地定义. ▶

4. 区域的拓扑结构与势

将例 4 与命题 2 加以比较可得, 当场是势场的必要条件 (3) 满足时, 它是不是一定是势场的问题, 与这个场的定义域的 (拓扑) 结构有关. 下面 (本段及第 5 段) 的讨论, 将对能保证这样的场都是势场的区域的特征做一个初步的阐述.

原来, 如果区域 D 内的任何闭路都能收缩成此区域内的某个点, 而在收缩过程中闭路不超出 D 的范围, 那么, D 内的场成为势场的必要条件 (3) 也是充分的. 以后, 我们就把这样的区域叫做***单连通域***. 球是单连通的 (因之命题 2 成立), 而打了洞的平面 $\mathbb{R}^2\backslash O$ 不是单连通的, 因为环绕坐标原点的路径, 不能收缩成这区域内的一点而不超出区域的范围. 这就是为什么并非在 $\mathbb{R}^2\backslash O$ 中的满足条件 (3′) 的每个场都是区域 $\mathbb{R}^2\backslash O$ 的势场的原因, 例如, 例 4 就是这样的场.

现在从直观描述转入确切叙述. 首先说明, 上面所说的道路的变形和收缩指的是什么.

定义 3 设在区域 D 内有两条闭路 $\gamma_0 : [0,1] \to D$ 及 $\gamma_1 : [0,1] \to D$. 如果存在从正方形 $I^2 = \{(t^1,t^2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant t^i \leqslant 1, i = 1,2\}$ 到区域 D 内的连续映射 $\Gamma : I^2 \to D$, 使对任何 $t^1, t^2 \in [0,1]$ 成立: $\Gamma(t^1,0) = \gamma_0(t^1), \Gamma(t^1,1) = \gamma_1(t^1)$, 以及 $\Gamma(0,t^2) = \Gamma(1,t^2)$, 就说在区域 D 内有***闭路*** γ_0 ***到闭路*** γ_1 ***的同伦***(***或变形***)***映射***.

这样, 同伦就是映射 $\Gamma : I^2 \to D$(图 94). 如果把变量 t^2 看作是时刻 t, 则据定义

3, 在每个瞬时 $t = t^2$, 我们有闭路 $\Gamma(t^1, t) = \gamma_t$ (图 94[①]). 该道路随时间 t 变化, 在初始瞬间 $t = t^2 = 0$, 它与道路 γ_0 重合, 而在瞬间 $t = t^2 = 1$, 它变成道路 γ_1.

因为在任何瞬时 $t \in [0,1]$, 关系 $\gamma_t(0) = \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t) = \gamma_t(1)$ 总成立, 这就说道路 γ_t 是闭路. 因此, 映射 $\Gamma: I^2 \to D$ 在正方形 I^2 的一双对边上诱导出了同一个映射 $\beta_0(t^1) := \Gamma(t^1, 0) = \Gamma(t^1, 1) =: \beta_1(t^1)$.

映射 Γ 是关于道路 γ_0 逐渐变形为 γ_1, 这种概念的形式化. 这条道路随着时间这样变化: 在初始时刻 $t^2 = 0$, 它与道路 γ_0 一致, 而在时刻 $t^2 = 1$, 它变成道路 γ_1.

显然时间也可以让它按反方向进行的, 那时, 我们就从道路 γ_1 得到道路 γ_0.

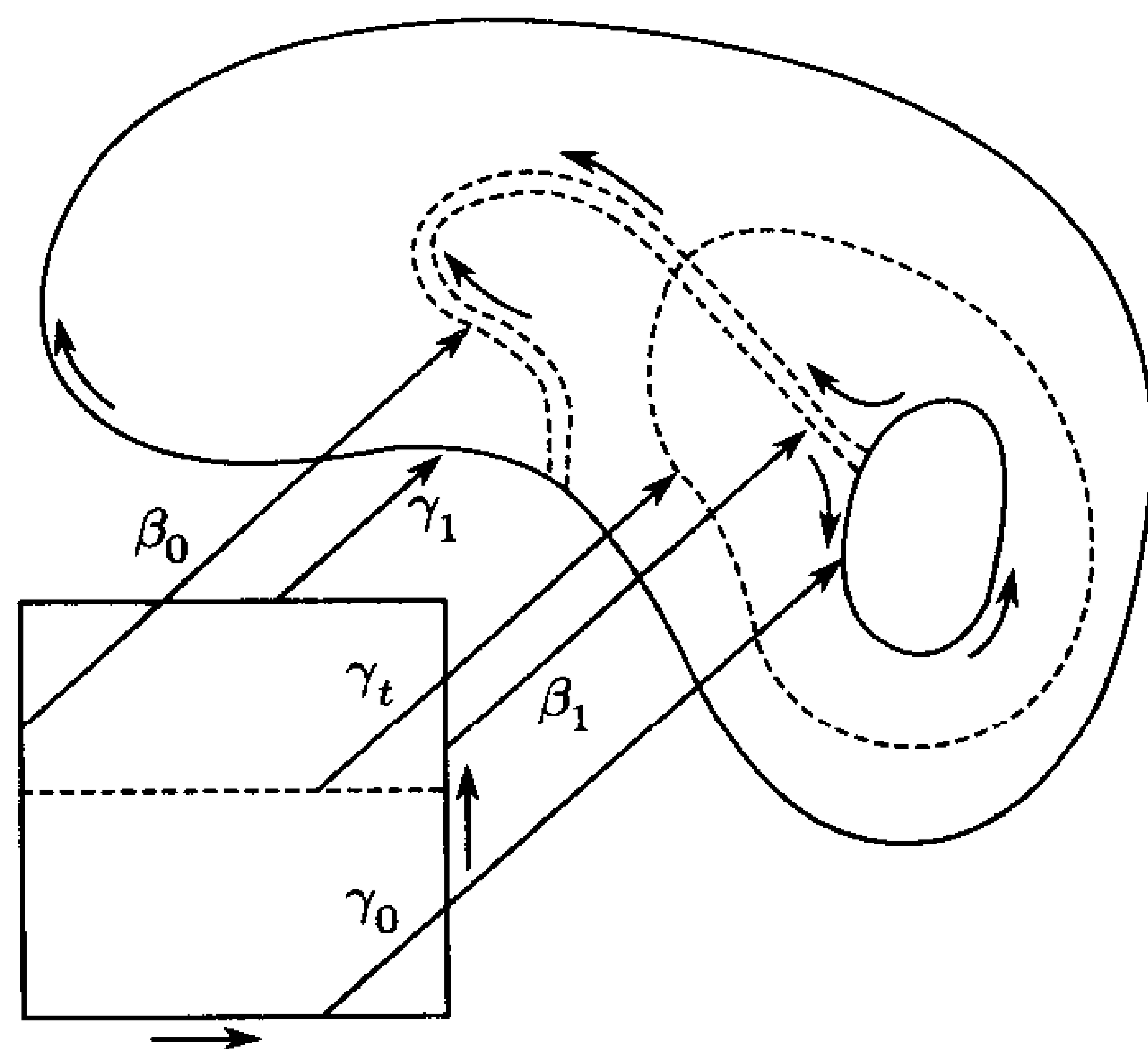


图 94

定义 4 称两条闭路在一个区域内是同伦的, 如果能在该区域内使它们彼此同伦, 亦即, 能在该区域内建立从一条道路到另一条道路的同伦.

注 2 因为我们在分析中所用的道路通常是积分路径. 因此, 今后不再特别声明, 将只讨论光滑的或分片光滑的道路, 以及它们的光滑的或分片光滑的同伦.

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 可以验证, 对于区域中彼此连续同伦的 (分片) 光滑道路, 必存在它们的 (分片) 光滑同伦.

命题 3 *如果区域 D 内的 1- 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 能使 $d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0$, 而闭路 γ_0 与 γ_1 在 D 内同伦, 则*

$$\int_{\gamma_0} \omega^1_{\boldsymbol{A}} = \int_{\gamma_1} \omega^1_{\boldsymbol{A}}.$$

◀ 设 $\Gamma: I^2 \to D$ 是 γ_0 到 γ_1 的同伦 (参看图 94). 如果 I_0, I_1 是正方形 I^2 的底边, 而 J_0, J_1 是它的侧边, 那么, 根据闭路同伦之定义, Γ 在 I_0 与 I_1 的限制分别同 γ_0 与 γ_1 重合, 而 Γ 在 J_0 与 J_1 上的限制给出了 D 内的两条道路 β_0 与 β_1, 又因 $\Gamma(0, t^2) = \Gamma(1, t^2)$, 所以道路 β_0 与 β_1 完全重合. 由变量替换 $x = \Gamma(t)$, 形式 $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ 就变成了正方形 I^2 中的一个 1- 形式 $\omega = \Gamma^* \omega^1_{\boldsymbol{A}}$. 这时 $d\omega = d\Gamma^* \omega^1_{\boldsymbol{A}} = \Gamma^* d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0$, 因为 $d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0$. 因此, 根据斯托克斯公式有

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_{I^2} d\omega = 0.$$

①图 94 里, 沿着某些曲线画了给它们定向的箭头, 这在后边有用, 读者暂时不必去管它们.

但是

$$\begin{aligned}\int_{\partial I^2}\omega &= \int_{I_0}\omega + \int_{J_1}\omega - \int_{I_1}\omega - \int_{J_0}\omega \\ &= \int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1 + \int_{\beta_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1 - \int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1 - \int_{\beta_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = \int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1 - \int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1.\end{aligned}$$

所以

$$\int_{\gamma_0}\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = \int_{\gamma_1}\omega_{\boldsymbol{A}}^1. \blacktriangleright$$

定义 5 一个区域叫做单连通区域, 如果其中的任何闭路都与点同伦 (即与不变道路同伦).

这就是说, 在单连通区域内, 任何闭路能收缩成一点.

命题 4 *设在单连通区域内给定场 $\boldsymbol{A}$, 它满足势场的必要条件 (3) 或 (3′), 那么它就是 D 内的势场.*

◀ 由命题 1 及对它的注 1, 只要验证对 D 内的任何光滑道路 γ 等式 (5) 成立即可. 由题设, 道路 γ 同伦于一个不变道路, 即由一个点构成的道路. 沿着这样的单点道路的积分显然为零. 但根据命题 3, 在同伦下积分不变, 这就是说, 等式 (5) 对于道路 γ 也成立. ▶

注 3 命题 4 包括了命题 2. 但是, 考虑到一些应用上的方便, 我们认为最好还是给命题 2 一个独立的证明.

注 4 命题 2 的证明, 并未用到光滑道路彼此能够光滑同伦.

5. 向量势、恰当形式与闭形式

定义 6 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 内的向量场. 如果在 D 内关系 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 成立, 就说 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 在 D 内的*向量势*.

回想向量场与定向欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的形式之间的联系, 以及向量场的旋量的定义, 则关系 $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 能写成 $\omega_{\boldsymbol{B}}^2 = d\omega_{\boldsymbol{A}}^1$. 因此 $\omega_{\mathrm{div}\boldsymbol{B}}^3 = d\omega_{\boldsymbol{B}}^2 = d^2\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = 0$. 于是, 我们得到了场 $\boldsymbol{B}$ 在区域 D 内为向量势 (即 $\boldsymbol{B}$ 是域 D 内某向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋量) 的必要条件为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0. \tag{7}$$

我们常常 (特别在物理学中) 把满足条件 (7) 的场叫做*管量场*.

例 5 在 §1 中列出了麦克斯韦方程组, 其中的第二个方程恰好满足 (7) 式. 因此, 自然希望把磁场 $\boldsymbol{B}$ 看作是某个向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度, 即 $\boldsymbol{A}$ 是场 $\boldsymbol{B}$ 的向量势. 在解麦克斯韦方程组时, 就是要找出这样的向量势来.

正如从定义 1 及定义 6 所见, 关于向量场的标量势及向量势的问题 (我们只在 $\mathbb{R}^3$ 中才提出后一问题) 是下面的一般问题的特殊情况: 什么时候微分 $p-$ 形式 ω^p 是某个形式 ω^{p-1} 的微分 $d\omega^{p-1}$.

定义 7 称微分形式 ω^p 是区域 D 内的*恰当微分形式*, 如果在这个区域内存在形式 ω^{p-1} 使 $\omega^p = d\omega^{p-1}$.

如果 ω^p 是 D 内的恰当微分形式, 则 $d\omega^p = d^2\omega^{p-1} = 0$. 因此, 条件

$$d\omega = 0 \tag{8}$$

是形式 ω 为恰当形式的必要条件.

我们 (在例 4 中) 已经看到, 并不是满足这个条件的形式都是恰当形式. 因此, 我们再引入.

定义 8 如果微分形式 ω 在区域 D 内满足条件 (8), 就把它叫做 D 内的*闭形式*.

我们有

定理 (庞加莱引理) *球内的闭形式是恰当形式.*

这里所说的是 $\mathbb{R}^n$ 内的任意球及任意阶的形式, 所以命题 2 是这个定理的简单特例.

庞加莱引理可以这样理解: 恰当形式的必要条件 (8) 局部地是它的充分条件, 这就是说,如果满足条件(8), 则对于区域内的任何点, 必定存在它的一个邻域, 使得形式 ω 在此邻域内是恰当的.

特别地, 当向量场 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 (7) 时, 则由庞加莱引理推知, 这个场 $\boldsymbol{B}$ 至少局部地是某个向量场的旋度.

在这里, 我们不打算再花时间去证明这个重要定理 (愿意看它的证明的读者可在第十五章读到它), 而宁愿在本节最后 (借助 1- 形式的知识) 对闭形式的恰当性问题与此形式的定义域的拓扑之间的联系的一般特点作些说明.

例 6 我们考察去掉两个点 p_1, p_2 的平面 $\mathbb{R}^2$(图 95) 和在图上画出的道路 γ_0, γ_1 和 γ_2 的支集. 设道路 γ_2 能够在所讨论的区域的范围内收缩成一点, 所以, 如果在 D 内给出一个闭形式 ω, 那么 ω 沿 γ_2 的积分为零. 设道路 γ_0 不能在 D 内缩成一点, 然而这条道路能与道路 γ_1 同伦, 而不改变形式 ω 的积分值, 显然, ω 沿 γ_1 的积分可以归结为沿着环绕 p_1 顺时针行进的一个回路的积分及两倍的沿环绕 p_2 点逆时针行进的回路的积分. 如果用 T_1, T_2 分别表示形式 ω 沿着围绕 p_1 及 p_2 的小圆周按逆时针方向的积分, 即知形式 ω 沿区域 D 中任何闭路的积分将等于 $n_1T_1 + n_2T_2$, 其中 n_1, n_2 都是整数, 它们指示的是我们绕平面 $\mathbb{R}^2$ 中的小洞 p_1, p_2 是沿什么方向及所绕的圈数.

环绕 p_1, p_2 的圆周 c_1, c_2 可以做为闭路 $\gamma \subset D$ 之集合的基底. 如果把两条彼此同伦且 ω 沿着它们的积分值相等的闭曲线等同看待, 则在这个基底下, 任何闭路 γ, 都能表成 $\gamma = n_1c_1 + n_2c_2$ 的形式. 量 $\int_{c_i} \omega = T_i$ 叫做*循环常数*或*积分周期*. 如果区域更复杂些, 比如其中有 k 个独立的简单回路, 则根据分解式 $\gamma = n_1c_1 + \cdots + n_kc_k$ 得到 $\int_\gamma \omega = n_1T_1 + \cdots + n_kT_k$. 有这样的结果, 对任给的一组数 $T_1, \cdots, T_k$, 一定存在着这个区域的闭 1- 形式, 正好有这样一组周期 (这是德 · 拉姆定理的特殊情况; 参看第 15 章).

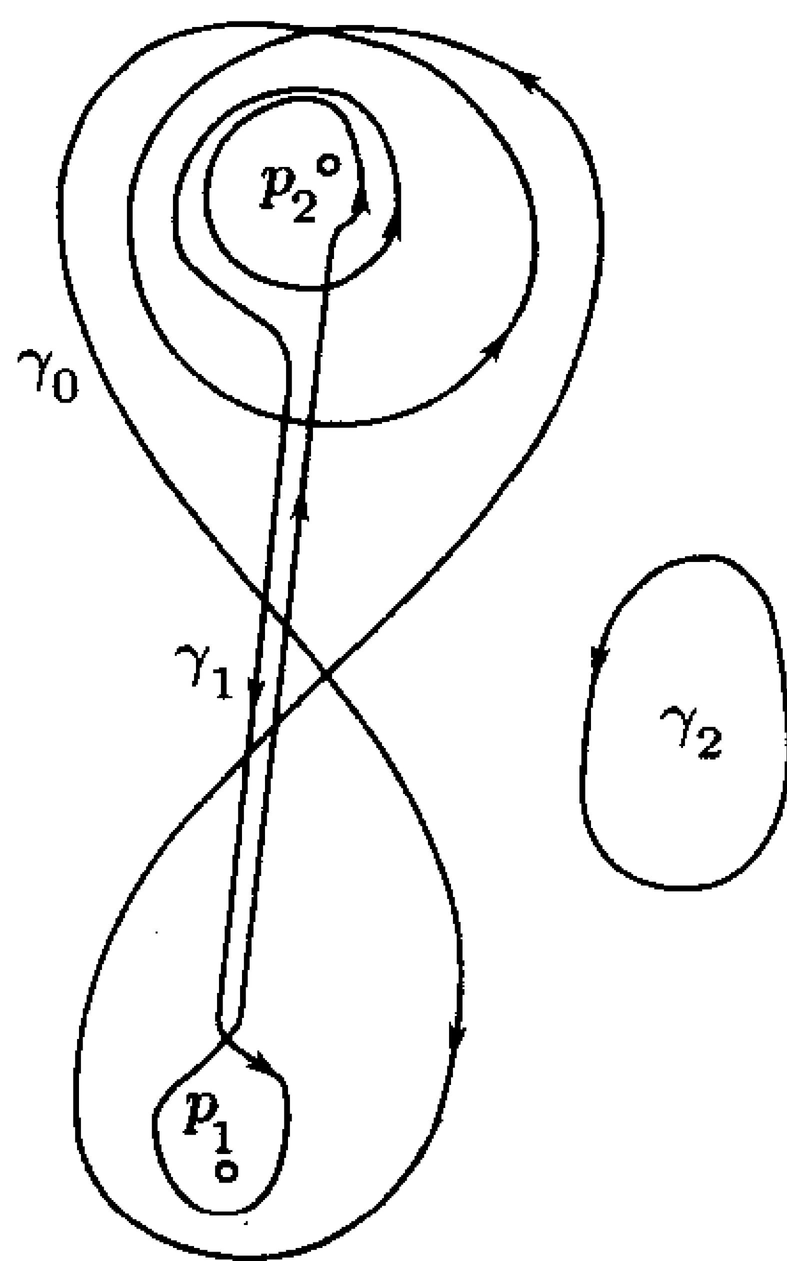


图 95

为了直观起见, 我们把以上讨论限制在平面区域情形, 然而, 这里所说的一切对 $\mathbb{R}^n$ 的任何区域也都对.

例 7　在镯形区域 ($\mathbb{R}^3$ 内由环面所界的区域) 内, 所有闭路显然都与绕小洞若干次的圆周同伦*. 就是这个圆构成了这里的唯一非点化的基回路 c.

此外, 以上所说的一切对高维道路也都适合. 一维闭路是圆周映像, 或者说是一维球面的映像. 如果取 k 维球面的映像代替一维闭路, 对它们引入同伦概念, 并在给定区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内考察 k 维球面有多少个互不同伦的映像, 就得到区域 D 的某种特征, 它在拓扑学中形成了所谓区域 D 的 *k– 同伦群*, 记作 $\pi_k(D)$. 如果在 D 内 k 维球面的所有映像都同伦于常映像, 我们就认为 $\pi_k(D)$ 是平凡的 (它只包含一个元素). 有这种可能: $\pi_1(D)$ 平凡, 而 $\pi_2(D)$ 不平凡.

例 8　如果把空间 $\mathbb{R}^3$ 去掉点 O 后作为 D, 那么在此区域内的任何闭路都能缩成一点, 而 $\mathbb{R}^3$ 内包围点 O 的球面, 在此区域之内则不能缩成一个点.

原来, 对于闭 k– 形式的周期有重要意义的不完全是同伦群 $\pi_k(D)$, 还有所谓同调群 $H_k(D)$(参看第 15 章).

例 9　由上所述, 我们可以得到这样的结论, 例如, 在区域 $D = \mathbb{R}^3 \backslash O$ 内, 每个闭 1– 形式是恰当的 ($\mathbb{R}^3 \backslash O$ 是单连通的), 但并非每个闭的 2– 形式都是恰当的. 用语言表示就是 $\mathbb{R}^3 \setminus O$ 内的任何无旋场 $\boldsymbol{A}$ 是某函数的梯度, 但是并非每个无源场 $\boldsymbol{B}(\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0)$ 一定是这个区域内某个场的旋度.

例 10　与例 9 正好相反, 我们取镯形区域作为 D. 对于镯形域来说, 群 $\pi_1(D)$ 不是平凡的 (参看例 7), 而 $\pi_2(D)$ 是平凡的, 因为把二维球面映入 D 内的任何映射 $f : S^2 \to D$, 在 D 的范围内能收缩成常映射 (球面的像可缩成一点). 在这个区域内, 并不是每个无旋场都是势场, 但是每个无源场必定是某个场的旋度.

---

* 译者注. 这里 "所有闭路" 应改为 "所有非点化闭路, 即所有在区域内不能缩成一点的闭路".

练 习

1. 试证任何中心场 $\boldsymbol{A} = f(r)\boldsymbol{r}$ 是势场.

2. 设 $\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}U$ 是有势力场. 试证在这种场内, 质点的稳定平衡位置在这个场的势 U 的极小点处.

3. 我们已经看到, 对于静电场 $\boldsymbol{E}$, 麦克斯韦方程组 (§1(12) 式) 可归结为一对方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}, \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$.

条件 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 表明至少在局部也有 $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$. 点电荷的场是势场, 又因任何静电场是这种场的和(或积分), 所以它也总为势场.在静电场的第一个方程中令 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$, 即知它的势 φ 满足泊松[①]方程 $\Delta\varphi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. 势 φ 完全确定了场 $\boldsymbol{E}$, 所以场 $\boldsymbol{E}$ 的刻画就归结为找出函数 φ, 即泊松方程的解.

已知点电荷的势 (例 2), 试解下列问题.

a) 有二点电荷 $-q, +q$, 它们分别位于空间 $\mathbb{R}^3$ 中笛卡儿坐标 (x, y, z) 为 $\left(0, 0, -\dfrac{d}{2}\right)$, $\left(0, 0, \dfrac{d}{2}\right)$ 的点处. 试证由这二点电荷产生的静电场, 在距这些电荷的距离远大于 d 的点处的势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}qd + o\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

其中 r 是点 (x, y, z) 的向径 $\boldsymbol{r}$ 的模.

b) 移动点的位置, 使其离开二电荷越来越远, 这与把二电荷靠近 (即将 d 变小) 是等价的. 若固定 $qd =: p$ 这个量, 并将 d 变小, 那么, 作为极限, 在区域 $\mathbb{R}^3 \setminus O$ 之范围内得到函数 $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{r^3}p$. 为了方便, 引入向量 $\boldsymbol{p}$, 它的大小就是 p, 而其方向是从 $-q$ 到 q. 称电荷对 $-q, +q$ 及用上述极限过程所得到的结构为*偶极子*, 向量 $\boldsymbol{p}$ 叫做*偶极矩*. 取极限所得到的函数 φ 叫*偶极子势*.

试求当沿着与偶极矩方向成 θ角的射线无限远离偶极子时, 偶极子的势的渐近值.

c) 设 φ_0 是由单位点电荷产生的势, φ_1 是偶极矩为 p_1 的偶极子势. 试证 $\varphi_1 = -(\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla)\varphi_0$.

d) 上面对于一对点电荷用极限过程构造偶极子的方法, 可以用于四个点电荷 (确切地说是具有偶极矩 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ 的双偶极子) 并得到*双偶极子*及相应的势. 一般来说, 我们能得到j级*多偶极子*, 它的势

$$\varphi_j = (-1)^j(\boldsymbol{p}_j \cdot \nabla)(\boldsymbol{p}_{j-1} \cdot \nabla) \cdots (\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla)\varphi_0 = \sum_{i+k+l=j} Q^j_{ikl}\frac{\partial^j \varphi_0}{\partial x^i \partial y^k \partial z^l},$$

其中 Q^j_{ikl} 叫做*多偶极矩的分量*. 试对双偶极子计算并验证多偶极子的势的公式.

e) 试证当远离聚集电荷时, 它的势的渐近主项等于 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$, 这里 Q 是聚集电荷的总电量.

f) 考察由符号相反的电荷组成的中性物体 (例如分子), 试证, 当离开物体的距离较物体的尺度大得多时, 电势的渐近主项等于 $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_r}{r^2}$. 这里 $\boldsymbol{e}_r$ 是单位向量, 其方向是从物

---

① 泊松 (S. D. Poisson) (1781—1840), 法国力学、数学及物理学家; 他在理论上的基础工作有天体力学, 数学物理与概率理论. 泊松方程是在他的重力势与地球引力的研究中出现的.

体指向观察点处; $\boldsymbol{p} = \sum q_i \boldsymbol{d}_i$, q_i 是第 i 个电荷, 而 $\boldsymbol{d}_i$ 是它的向径; 坐标原点选在物体的某个点处.

g) 任何聚集电荷产生的电场, 在离开它们相当远处的势, (在渐近意义下) 分解成多极子势型的函数. 试以这个势的前两项为例证明这个断言 (参考 d), e) 和 f)).

4. 检查以下各区域是不是单连通域:

a) 圆 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2<1\}$;

b) 空心圆 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0<x^2+y^2<1\}$;

c) 空心球 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0<x^2+y^2+z^2<1\}$;

d) 圆环 $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{2}<x^2+y^2<1\right\}$;

e) 球环 $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1\right\}$;

f) $\mathbb{R}^3$内的镯形域.

5. a) 给出具固定端点道路的同伦的定义;

b) 试证一个区域是单连通域的充要条件是, 具共同起点与终点的任意两条道路, 在 a) 的定义之下同伦.

6. 试证

a) 圆周 S^1 (一维球) 到二维球面 S^2 内的任何连续映射 $f: S' \to S^2$, 沿着 S^2 可缩成一点 (即缩成不变映射).

b) 任何连续映射 $S^2 \to S^1$ 也与映成一点的映射同伦.

c) 任何连续映射 $f: S^1 \to S^1$ 同伦于某映射 $\varphi \mapsto n\varphi$, 其中 n 是 $\mathbb{Z}$ 中的某个数, φ 是圆周上点的极角.

d) 球面 S^2 到镯形区域内的任何连续映射同伦于映成一点的映射.

e) 圆周 S^1 到镯形区域的任何连续映射, 同伦于一个绕着镯的洞跑过 n 次的闭路, 其中 $n \in \mathbb{Z}$.

7. 在区域 $\mathbb{R}^3 \setminus O$ (即去掉点 O 的空间 $\mathbb{R}^3$) 内做一个

a) 闭且非恰当的 2− 形式;

b) 无源向量场, 使它不是此区域内任何向量场的旋度.

8. a) 在区域 $D = \mathbb{R}^n \setminus O$ (空间 $\mathbb{R}^n$ 去掉点 O) 内有闭而不恰当的 $p < n-1$ 形式吗?

b) 在区域 $D = \mathbb{R}^n \setminus O$ 内建立一个闭而不恰当的 $p = n-1$ 形式.

9. 如果 ω 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 内的闭 1− 形式, 则根据命题 2, 任何点 $x \in D$ 有邻域 $U(x)$, 使 ω 在其内是恰当的. 下设 ω 是闭形式.

a) 试证: 如果两条道路 $\gamma_i: [0,1] \to D, i=1,2$ 有共同的起点和终点, 并且只在闭区间 $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ 上不一样, 而且它们的像位于同一个邻域 $U(x)$ 之内, 则 $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

b) 试证: 对于任意一条道路 $[0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in D$, 都存在数 $\delta > 0$, 使得当道路 $\tilde{\gamma}$ 与 γ 有相同的起点与终点, 且偏离 γ 不超过 δ, 亦即 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leqslant \delta$ 时, 恒有

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega.$$

c) 试证, 如果具有共同起点与终点的二道路 γ_1, γ_2 作为固定端点道路, 在区域 D 内同伦, 那么, 对于 D 内的闭形式 ω 有 $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

10. a) 稍后我们将证明定义在正方形 I^2 上的任何连续映射 $\Gamma : I^2 \to D$ 能用光滑映射 (甚至用多项式) 一致逼近到任何程度. 试由此推出, 如果区域 D 内的道路 γ_1, γ_2 同伦, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 能找到光滑同伦的道路 $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$, 使得 $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\tilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)| \leqslant \varepsilon, i = 1, 2$.

b) 现在用练习 9 的结果证明, 如果区域 D 内的闭形式沿着光滑的同伦道路的积分彼此相等, 那么, 它们对于此区域内的任何同伦道路也相等 (不必假定同伦是光滑的). 当然, 对于道路本身需要假定有某种正则性, 以便沿此道路能进行积分.

11. a) 试证: 如果形式 $\omega^p, \omega^{p-1}, \widetilde{\omega}^{p-1}$ 使 $\omega^p = d\omega^{p-1} = d\widetilde{\omega}^{p-1}$, 则 (至少是局部地) 能找到形式 ω^{p-2} , 使得 $\widetilde{\omega}^{p-1} = \omega^{p-1} + d\omega^{p-2}$. (两个相差某形式的微分的形式, 有相同的微分. 这显然能从等式 $d^2\omega = 0$ 推出.)

b) 试证静电场的势 φ (见练习 3) 可在不计一个附加常数的区别下完全确定. 如果要求势在无穷远处趋于零, 这个常数就确定了.

12. 由麦克斯韦方程组 (§1(12)), 得到下面一对静磁方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \times \boldsymbol{B} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$, 其中第一个方程说明场 $\boldsymbol{B}$ 至少局部地有向量势 $\boldsymbol{A}$, 即 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

a) 试描述磁场 $\boldsymbol{B}$ 的势 $\boldsymbol{A}$ 之选择的任意性 (参看问题 11 a)).

b) 设 x, y, z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡儿坐标. 试求沿 Oz 轴方向的均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 的满足以下诸附加条件之一的势 $\boldsymbol{A}$:(i) 场 $\boldsymbol{A}$ 具有 $(0, A_y, 0)$ 的形式; (ii) 场 $\boldsymbol{A}$ 具有 $(A_x, 0, 0)$ 的形式; (iii) 场 $\boldsymbol{A}$ 具有 $(A_x, A_y, 0)$ 的形式; (iv) 场 $\boldsymbol{A}$ 关于绕 Oz 轴的旋转不变.

c) 试证, 选取满足附加条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 的 $\boldsymbol{A}$ 的势的问题能归结为求解泊松方程, 更确切地说, 是归结为求标量函数 ψ, 使对给定的标量函数 f 满足方程 $\Delta \psi = f$.

d) 设静磁场 $\boldsymbol{B}$ 的势 $\boldsymbol{A}$ 能使 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$. 试证 $\boldsymbol{A}$ 满足泊松向量方程: $\Delta \boldsymbol{A} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$. 于是, 引用势的概念就能把求静电场 (问题 3) 与静磁场的问题都归结成为解泊松方程的问题.

13. 众所周知以下的亥姆霍兹[①] 定理: *在欧氏定向空间 $\mathbb{R}^3$ 的区域 D 内, 任何光滑场 $\boldsymbol{F}$ 能分解为无旋场 $\boldsymbol{F}_1$ 与管量场 $\boldsymbol{F}_2$ 之和 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$.* 试证, 这种分解法的建立可归结为解某个泊松方程.

14. 设给定了一定质量的某种物质, 它的状态由热力学的参数 $V, P, (T)$ 刻画. 设它在由状态 V_0, $P_0, (T_0)$ 向状态 $V, P, (T)$ 转变, 假定转变过程很慢 (拟静态地), 并且是沿着 (V, P 坐标) 状态平面中的道路 γ 进行的. 在热力学中证明了量 $S = \int_{\gamma} \dfrac{\delta Q}{T}$ 只与路径的起点 (V_0, P_0) 和终

[①] 亥姆霍兹 (Helmholtz) (1821—1894) —— 德国物理学家与数学家. 他是首先发现一般的能量守恒原理者之一. 顺便指出, 正是他首先确切地区分了力与能量的概念.

点 (V, P) 有关, 其中 δQ 是热交换形式, 这就是说, 当固定了其中一个点, 例如 (V_0, P_0) 后, S 就成为所考察的系统的状态 (V, P) 的函数. 这个函数就叫做系统的熵.

a) 试由此推出 $\omega = \dfrac{\delta Q}{T}$ 是恰当形式, 并且 $\omega = dS$.

b) 试利用第十三章 §1 之练习 6 所指出的理想气体的形式 δQ, 求理想气体的熵.

§4 应用例子

为了具体展示上面所引入的概念的作用, 并阐明高 – 奥 – 斯公式作为守恒律的物理意义. 在这里, 作为例证, 我们将研究某些重要的数学物理方程的推导.

1. 热传导方程

可观察的物体的温度 $T = T(x, y, z, t)$, 作为物体中的点 (x, y, z) 及时刻 t 的函数是一个数量场. 由于物体各部分进行热交换, 场 T 就可能有所改变. 然而这种改变并不是随意的, 而必须服从一定的规律, 我们希望把这种规律明确地表示出来.

设 D 是所考察的物体以曲面 S 所限定的部分. 如果在 D 内没有热源, 那么含在 D 内的物质的内能, 只能通过热交换来改变, 在这种情况下, 只有通过 D 的边界 S 进行能量转移.

我们分别计算在体积 D 内的内能变化及通过曲面的能流, 根据能量守恒定律, 列出这些量的等式, 并得到所需要的关系式.

大家都知道, 要使均匀物质 m 的温度升高 ΔT, 所需要的热量为 $cm\Delta T$, 这里 c 是该物质的比热. 因此, 如果在时间间隔 Δt 内我们的场 T 的增长量为 $\Delta T = T(x, y, z, t + \Delta t) - T(x, y, z, t)$, 则区域 D 内的内能增加

$$\iiint\limits_D c\rho \Delta T dV \tag{1}$$

这里 $\rho = \rho(x, y, z)$ 是物质密度.

由经验知道, 在温度变化的相当大的范围内, 因热交换, 在单位时间内流过物体中的小面元 $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n} d\sigma$ 的热量, 与场 $-\mathrm{grad} T$ 通过这个面元的流量 $-\mathrm{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 成正比 (梯度是关于空间变量 x, y, z 取的). 比例系数 k 与物质有关, 叫做*热传导系数*. $\mathrm{grad} T$ 前面的负号表示能量从温度高处向低处流动. 这样一来, 在时间 Δt 内, 通过区域 D 的边界 S 沿外法线方向流出的能量 (精确到 $o(\Delta t)$) 是

$$\Delta t \iint\limits_S -k \mathrm{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{2}$$

将 (2) 式表示的量变号并除以 Δt 后, 令 $\Delta t \to 0$ 取极限, 并使之与 (1) 相等, 就得到

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV = \iint\limits_S k \mathrm{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{3}$$

这个等式就是函数 T 的方程. 设 T 足够光滑, 并对 (3) 式右端利用高 – 奥公式, 等式 (3) 就变成

$$\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV = \iiint\limits_D \operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)\,dV.$$

由此, 根据区域 D 的任意性,显然可得

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}T). \tag{4}$$

这样我们得到了积分等式 (3) 的微分形式.

假如在区域 D 内有热源 (或热汇), 其强度具有密度 $F(x,y,z,t)$, 那么等式 (3) 应该换成

$$\iiint\limits_D c\rho\frac{\partial T}{\partial t}dV = \iint\limits_S k\operatorname{grad}T\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iiint\limits_D F dV. \tag{3'}$$

这时, 代替公式 (4), 我们得到方程

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k\operatorname{grad}T) + F. \tag{4'}$$

如果假定物体的热传导是各向同性且均匀的, 则系数 k 是常数, 而方程 (4′) 就变成下面的标准形式:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\Delta T + f, \tag{5}$$

其中 $f = \dfrac{F}{c\rho}$, 而$a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ 为温度传导系数*. 通常称 (5) 式为*热传导方程*.

在稳定热交换状态, 场 T 与时间无关, 这时方程变成了*泊松方程*

$$\Delta T = \varphi, \tag{6}$$

其中 $\varphi = -\dfrac{1}{a^2}f$. 如果还设物体内无热源, 就得到*拉普拉斯方程*

$$\Delta T = 0. \tag{7}$$

我们已说过, 拉普拉斯方程的解叫做*调和函数*. 调和函数在热物理学里的解释是: 它对应于在物体内部建立的那样的温度场, 其中热流的运行既没有汇也没有源, 亦即热源 (广义的, 也包括汇) 不在物体体内. 例如, 在物体 V 的表面 ∂V 上, 保持给定的热状态 $T\,|_{\partial V}= \tau$ 不变, 那么, 在体 V 内的温度场, 就稳定成某个调和函数的形式. 拉普拉斯方程 (7) 的解的这种解释, 使得能预见到调和函数的许多性质. 例如在区域 V 内的调和函数, 在这个区域内必定没有严格的局部极值, 如若不然, 则热量只能从(向)那些较热 (较冷) 的部分流出 (入) 而变冷 (热), 这与所说的场的稳定性矛盾.

---

* 译者注. 通常称它为热扩散系数, 相应地, k 叫热传导系数.

2. 连续性方程

设在所考察的空间内充满某种介质, $\rho=\rho(x,y,z,t)$ 是介质的密度, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ 是介质运动的速度场, 它们是空间内的点 (x,y,z) 与时间 t 的函数.

我们将从质量守恒定律出发, 利用高 - 奥公式, 建立这些量之间的关系.

设 D 是所考察的空间中的区域, 其边界为 S. 在一段时间 Δt 之内, 区域 D 内的物质质量增加了

$$\iiint_D (\rho(x,y,z,t+\Delta t)-\rho(x,y,z,t))\,dV.$$

在这很短一段时间 Δt 内, 物质经曲面 S 流向 S 的外法线一侧的流量等于 (不计高阶无穷小 $o(\Delta t)$ 的误差)

$$\Delta t\cdot\iint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

如果在区域 D 内没有源及汇, 则由质量守恒定律得到

$$\iiint_D \Delta\rho dV=-\Delta t\iint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

令 $\Delta t\to 0$ 取极限, 就得

$$\iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\iint_S \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

对此等式的右边应用高 - 奥公式, 并注意到 D 是任意区域, 就得到, 对于足够光滑的函数 $\rho,\boldsymbol{v}$, 应成立以下关系式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}),\tag{8}$$

它叫做连续介质的*连续性方程*.

连续性方程的向量记法是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0,\tag{8'}$$

或将第二项拆开, 写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.\tag{8''}$$

的形式.

如果介质是不可压缩的 (液体), 则通过闭曲面 S 流出的介质体积应为零:

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0,$$

由此 (仍据高 – 奥公式) 得到, 对于不可压缩介质成立

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{9}$$

因此, 对于变密度不可压缩介质 (水及油) 来说, 方程 (8″) 变成如下形式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0. \tag{10}$$

如果介质又是均匀的, 则 $\nabla \rho = 0$, 因而 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

3. 连续介质动力学基本方程

现在引入连续介质在空间中运动的动力学方程. 除上面已讨论过的函数 $\rho, \boldsymbol{v}$ 以外, 它们在这里仍表示介质在时刻 t 及空间点 (x, y, z) 处的密度及速度, 我们还将考察压力 $p = p(x, y, z, t)$, 它也是空间点及时刻 t 的函数.

在充满介质的空间中分出一个区域 D, 设 D 的边界为 S. 今考察在固定时刻作用于分出来的这一部分介质的体积上的力.

某些力场 (例如重力场) 能作用于介质的每个质量元素 ρdV 上. 这种场提供了所谓*质量力*. 设 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ 是由一些外场产生的质量力密度. 这时, 这些场作用在质量元 ρdV 上的力为 $\boldsymbol{F}\rho dV$. 如果这个质量元在所考察的瞬间具有加速度 $\boldsymbol{a}$, 则据牛顿定律, 这就等于说还存在惯性质量力 $-\boldsymbol{a}\rho dV$.

最后, 在曲面 S 的每个面元 $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n} d\sigma$ 上, 有由压力引起的面力 $-pd\boldsymbol{\sigma}$ 作用, 它来自与 D 内的介质粒子毗邻那些粒子 (这里 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线).

根据达朗贝尔原理,任何物质系统, 在其运动的每一瞬间, 作用在它上面的全部的力, 包括惯性力在内, 是互相平衡的, 亦即它们的合力应为零. 在我们的情况下, 就是

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a})\rho dV - \iint\limits_S p d\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{11}$$

此和的第一项是质量力与惯性力的合力, 第二项是作用在所考察的体积的界面 S 上的压力的合力. 为了简单起见, 我们认为所处理的是理想的 (无粘性的) 液体或气体, 其中作用在面积 $d\boldsymbol{\sigma}$ 上的压力是 $-pd\boldsymbol{\sigma}$, 这里的数 p 与空间内面元的方向无关.

应用 §2 的公式 (10), 根据等式 (11) 得到

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a})\rho dV - \iiint\limits_D \mathrm{grad} p dV = 0.$$

由此并注意区域 D 的任意性, 显然推出

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{F} - \mathrm{grad} p. \tag{12}$$

在这种局部形式下的介质运动方程, 与物质质点运动的牛顿方程完全相当.

介质质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 是这个质点速度 $\boldsymbol{v}$ 的导数 $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. 如果 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ 是空间中粒子运动的规律, 而 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ 是介质的速度场, 那么, 对任何单个的质点得到

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

或

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

这样一来, 运动方程 (12) 变成如下形式:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \tag{13}$$

或

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{14}$$

通常把方程 (14) 叫做*流体动力学的欧拉方程*.

向量方程 (14) 等价于由三个标量方程组成的方程组, 这些方程中包含着向量 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量以及两个函数 ρ, p.

因此, 欧拉方程还不能完全确定理想连续介质的运动. 诚然, 对它再补充上连续性方程 (8) 是自然的事, 然而, 即使这样, 方程组仍然是不定的.

要想完全确定介质的运动, 还得对方程 (8) 及 (14) 补充关于介质的热力学状态的有关信息 (例如状态方程 $f(p,\rho,T)=0$ 及热交换方程). 在本节最后一段里, 读者将能得到能够给出这些关系的有关知识.

4. 波动方程

现在研究在其中有声波传播的介质的运动. 显然这种运动也服从方程 (14), 但由所研究的现象的特殊性, 这方程在给定情况下还可以化简.

声音是介质状态的疏密交替, 并且在音波中, 压力偏离其平均值的量非常小 —— 比率约为 1%. 所以声音是介质的体元素偏离其平衡位置很小的小速度运动. 然而, 按照介质的分子运动的平均速度来衡量时, 激发 (也就是波) 在介质中的扩散速度可与介质分子运动的平均速度相比拟, 大大地高于所考察的介质的各个部分之间的热交换速度. 因此, 我们能把气体中的声音的运动看作是在其平衡位置附近的完全没有热交换的 (绝热的) 小振动.

由于宏观速度 $\boldsymbol{v}$ 本身很小, 将运动方程 (14) 内的 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$ 舍去就得到等式

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

如果根据同样的理由把 $\frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{v}$ 这样的项也忽略掉, 那么上面的等式就可化作方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

把 (关于坐标 x, y, z 的) 算子 ∇ 作用在上式两端, 就得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \rho \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot \rho \boldsymbol{F} - \Delta p.$$

利用连续性方程 (8′), 并引用记号 $\nabla \cdot \rho \boldsymbol{F} = -\Phi$, 就得方程

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Phi + \Delta p \tag{15}$$

如果外场的影响可以忽略, 那么方程 (15) 就归结为发声介质内的密度与压力的关系式

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \tag{16}$$

由于过程是绝热的, 状态方程 $f(p, \rho, T) = 0$ 就归结为 ρ 和 p 之间的某个关系式 $\rho = \psi(p)$, 由此推出

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \psi'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \psi''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2.$$

又由于声波中压力的振动很小, 可以认为 $\psi'(p) \equiv \psi'(p_0)$, 其中 p_0 是平衡压力. 因此, $\psi'' = 0$ 且 $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \approx \psi'(p)\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. 由此, 最终从 (16) 式得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \Delta p, \tag{17}$$

其中 $a = (\psi'(p_0))^{-\frac{1}{2}}$. 这个方程刻画的是在声音运动状态下, 介质中的压力的变化. 方程 (17) 刻画了连续介质内的最简单的波动过程. 它叫做*齐次波动方程*. 量 a 有很简单的物理意义: 它是在给定的介质内声激励的传播速度, 也就是其中的声速 (见练习 4).

在受迫振动情形, 有某种力作用于介质的每个体元素; 其体密度分布是已知的. 这时方程 (17) 就换成了与方程 (15) 相应的关系式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \Delta p + f, \tag{18}$$

当 $f \neq 0$ 时, 称它为*非齐次波动方程*.

练 习

1. 设连续介质运动的速度场 $\boldsymbol{v}$ 是势场. 试证当介质不可压缩时, 场 $\boldsymbol{v}$ 的势 φ 是调和函数, 即 $\Delta\varphi = 0$(参看 (9) 式).

2. a) 试证流体动力学的欧拉方程(14) 可以写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p$$

(参看 §1 的练习 1).

b) 根据 a) 中所得的方程验证: 只有当 $\boldsymbol{F}$ 是势场时, 才可能有均匀不可压缩液体的无旋流 ($\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0$).

c) 本来 (拉格朗日定理), 势场 $\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}U$ 中的流动一旦在某一瞬间是无旋的, 那么它过去和将来都是无旋的. 因此, 这样的流至少是局部势场, 即 $\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\varphi$. 试验证势场 $\boldsymbol{F}$ 产生的均匀不可压缩液体的势流, 在每个瞬间都满足关系式

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+\frac{p}{\rho}-U\right)=0.$$

d) 试从这个等式推出等式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2+\frac{p}{\rho}-U=\Phi(t).$$

这等式叫做*柯西积分*, 它断定此式左边与空间点的坐标无关.

e) 试证, 如果这个流动还是稳定的, 即场 $\boldsymbol{v}$ 与时间无关时, 就得到关系式

$$\frac{\boldsymbol{v}}{2}+\frac{p}{\rho}-U=\text{常数},$$

这叫做*伯努利* (Bornoulli) *积分*.

3. 如果流动的速度场 $\boldsymbol{v}$ 具有 $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,0)$ 的形式, 很自然, 称它为*平行平面流*, 或者简称为*平面流*.

a) 试证, 对于平面流, 不可压缩性的条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ 及势性的条件 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=0$ 分别有如下形式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}=0.$$

b) 试证, 至少在局部, 这些等式能够保证满足条件 $(-v_y,v_x)=\mathrm{grad}\psi$ 和 $(v_x,v_y)=\mathrm{grad}\varphi$ 的函数 $\psi(x,y),\varphi(x,y)$ 存在.

c) 试验证这些函数的等高线 $\varphi=c_1,\psi=c_2$ 正交, 并证明在稳定流动中, 曲线 $\psi=c$ 是介质质点运动的轨道. 这正是把函数 ψ 叫做*流函数*, 以区别于*速度势函数* φ 的原因.

d) 试证, 在函数 φ 与 ψ 足够光滑的假定下, 它们都是调和函数, 并且满足*柯西 – 黎曼方程*:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

满足柯西 – 黎曼方程组的一对调和函数叫做*共轭调和函数*.

e) 验证函数 $f(z)=(\varphi+i\psi)(x,y)$ 是复变量 z 的可微函数, 其中 $z=x+iy$. 这就决定了平面流体力学问题与复变函数论的联系.

4. 现在讨论波动方程 (17) 的最简单的情形, 即压力只与空间点 (x,y,z) 的 x 坐标有关的平面波情形.

a) 试用变量替换 $u=x-at,v=x+at$, 将此方程化为 $\dfrac{\partial^2 p}{\partial u\partial v}=0$ 的形式并证明, 这个方程的解的一般形式为 :$p=f(x+at)+g(x-at)$, 这里 f,g 是 C^2 类的任意函数.

b) 试把所得到的解释成两个波 $f(x),g(x)$ 沿 Ox 轴以速度 a 分别向左和向右传播的过程.

c) 在一般情况 (17) 式中, 也认为 a 是波的传播速度, 并考虑到关系式 $a = (\psi'(p_0))^{-1/2}$; 如同牛顿假设温度在音波中为常数, 即假定音的振动过程是恒温的, 求空气中的音速 c_N (状态方程是 $\rho = \frac{\mu p}{RT}$; $R = 8.31\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ 是普适气体常数; $\mu = 28.8\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ 是空气的克分子量. 对温度为 0℃, 即 $T = 273\mathrm{K}$ 的空气进行计算. 牛顿求得的 $c_N = 280\mathrm{m/s}$).

d) 假定声音振动是绝热过程, 试仿效拉普拉斯, 求空气中的音速 c_L, 并使它比牛顿的结果 c_N 更精确. (在绝热过程下, $p = c\rho^\gamma$ 这是第 13 章 §1 问题 6 中的泊松公式. 试证明若 $c_N = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$, 则 $c_L = \gamma\sqrt{\frac{p}{\rho}}$. 对空气来说, $\gamma = 1.4$. 拉普拉斯求得 $c_L = 330\mathrm{m/s}$, 这与试验吻合得很好).

5. 利用标量势与向量势可把麦克斯韦方程组 (§1(12)) 化成波动方程 (确切地说是化为几个同一类波动方程). 解决了这个问题, 将能确认以往说过的事实.

a) 由方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 推出至少局部地有 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$, 这里 $\boldsymbol{A}$ 是场 $\boldsymbol{B}$ 的向量势.

b) 已知 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$, 试证: 由方程 $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ 能推出至少局部地存在标量函数 φ, 使 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$.

c) 验证, 当把场 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ 及 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ 中的 $\varphi, \boldsymbol{A}$ 换成另一对满足条件 $\widetilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}, \widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$ 的势 $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\boldsymbol{A}}$ 时, 场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不改变. 这里 ψ 是 $C^{(2)}$ 类的任意函数.

d) 试由方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 推出势 φ 与势 $\boldsymbol{A}$ 的第一个关系式 $-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

e) 试由方程 $c^2\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$ 推出势 φ 与 $\boldsymbol{A}$ 的第二个关系式

$$-c^2\nabla^2\boldsymbol{A} + c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi + \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}.$$

f) 试用 c) 证明, 解出辅助的波动方程 $\Delta\psi + f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, 能在不改变 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的条件下选出势 φ 和 $\boldsymbol{A}$, 使它们满足补充条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ (称此条件为度规条件).

g) 试证, 如果按照 f) 中说的那样选择势 φ 和 $\boldsymbol{A}$, 则由 d) 和 e) 可得关于电场的数量势 φ 与向量势 $\boldsymbol{A}$ 的非齐次波动方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\Delta\varphi + \frac{\rho c^2}{\varepsilon_0}, \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = c^2\Delta\boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}.$$

求出 φ 与 $\boldsymbol{A}$ 后, 就能得到场 $\boldsymbol{E} = \nabla\varphi, \boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$.

*第十五章　流形上微分形式的积分

§1　线性代数准备知识

1. 形式代数

设 X 为线性空间, $F^k : X^k \to \mathbb{R}$, 为 X 上的实值 k- 形式. 若 $e_1, \cdots, e_n$ 为 X 的基底, 而 $x_1 = x^{i_1} e_{i_1}, \cdots, x_k = x^{i_k} e_{i_k}$ 为向量 $x_1, \cdots, x_k \in X$ 关于此基底的分解式, 则由 F^k 对每个变量的线性性, 有

$$\begin{aligned} F^k(x_1, \cdots, x_k) &= F^k(x^{i_1} e_{i_1}, \cdots, x^{i_k} e_{i_k}) \\ &= F^k(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) x^{i_1} \cdot \cdots \cdot x^{i_k} = a_{i_1 \cdots i_k} x^{i_1} \cdot \cdots \cdot x^{i_k}. \end{aligned} \tag{1}$$

因此, 在给定 X 的基底后, 就能把 k- 形式 $F^k : X^k \to \mathbb{R}$ 等同于一组数 $a_{i_1 \cdots i_k} = F^k(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$.

若 $\widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_n$ 是 X 的另一基底, 且 $\widetilde{a}_{j_1 \cdots j_k} = F^k(\widetilde{e}_{j_1}, \cdots, \widetilde{e}_{j_k})$, 设 $\widetilde{e}_j = c^i_j e_i, j = 1, \cdots, n$, 则得到与同一形式 F^k 对应的数组 $a_{i_1 \cdots i_k}, \widetilde{a}_{j_1 \cdots j_k}$ 之间的变换 (张量) 定律

$$\widetilde{a}_{j_1 \cdots j_k} = F^k(c^{i_1}_{j_1} e_{i_1}, \cdots, c^{i_k}_{j_k} e_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k} c^{i_1}_{j_1} \cdot \cdots \cdot c^{i_k}_{j_k}. \tag{2}$$

线性空间 X 上 k- 形式之集 $\mathfrak{F}^k := \{F^k : X^k \to \mathbb{R}\}$ 本身, 关于 k- 形式的标准加法与数乘运算

$$(F^k_1 + F^k_2)(x) := F^k_1(x) + F^k_2(x), \tag{3}$$

$$(\lambda F^k)(x) := \lambda F^k(x) \tag{4}$$

构成线性空间.

对于任意的 k 和 l 形式 F^k, F^l, 定义其张量积运算 $\otimes$ 如下:

$$(F^k\otimes F^l)(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\cdots x_{k+l}):=F^k(x_1,\cdots,x_k)F^l(x_{k+1},\cdots,x_{k+l}) \tag{5}$$

因此,$F^k\otimes F^l$ 是 $k+l$ 次的形式 F^{k+l}.显然有以下诸关系:

$$(\lambda F^k)\otimes F^l=\lambda(F^k\otimes F^l), \tag{6}$$

$$(F_1^k+F_2^k)\otimes F^l=F_1^k\otimes F^l+F_2^k\otimes F^l, \tag{7}$$

$$F^k\otimes(F_1^l+F_2^l)=F^k\otimes F_1^l+F^k\otimes F_2^l, \tag{8}$$

$$(F^k\otimes F^l)\otimes F^m=F^k\otimes(F^l\otimes F^m). \tag{9}$$

这样, 线性空间 X 上的形式之集 $\mathfrak{F}=\{\mathfrak{F}^k\}$ 关于新引入的运算,是等级代数 $\mathfrak{F}=\underset{k}{\otimes}\mathfrak{F}^k$, 其中, 在进入直和的每个空间 F^k 的范围内能进行线性运算, 且当 $F^k\in\mathfrak{F}^k, F^l\in\mathfrak{F}^l$ 时, 有 $F^k\otimes F^l\in\mathfrak{F}^{k+l}$.

例 1　设 X^* 是 X 的共轭空间 (它由 X 上的所有线性函数组成), 而 $e^1,\cdots,e^n$ 是 X^* 的基底, 它与 X 的基底 $e_1,\cdots,e_n$ 是共轭的, 即 $e^i(e_j)=\delta_j^i$.

因为 $e^i(x)=e^i(x^je_j)=x^je^i(e_j)=x^j\delta_j^i=x^i$, 那么, 注意 (1) 式和 (9) 式. 就能把任意 k 形式 $F^k:X^k\to\mathbb{R}$ 写成如下形式

$$F^k=a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}. \tag{10}$$

2. 斜对称形式代数

现在考察 $\mathfrak{F}^k$ 中由一切斜对称 k 形式构成的子空间 Ω^k, 亦即 $\omega\in\Omega^k$ 指的是, 对任何不同的指标 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$, 成立等式

$$\omega(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_k)=-\omega(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_k).$$

从任何形式 $F^k\in\mathfrak{F}^k$, 借助于*形式的斜对称化* 算子 $A:\mathfrak{F}^k\to\Omega^k$, 可得到斜对称形式. A 由以下关系式确定:

$$AF^k(x_1,\cdots,x_k):=\frac{1}{k!}F^k(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})\delta_{1\cdots k}^{i_1\cdots i_k}, \tag{11}$$

这里

$$\delta_{1\cdots k}^{i_1\cdots i_k}=\begin{cases}1, & \text{当} \begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ 1\cdots k\end{pmatrix} \text{为偶排列时},\\ -1, & \text{当} \begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ 1\cdots k\end{pmatrix} \text{为奇排列时},\\ 0, & \text{当} \begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ 1\cdots k\end{pmatrix} \text{不是排列时}.\end{cases}$$

若 F^k 是斜对称形式, 则由 (11) 可知 $AF^k = F^k$. 因此,$A(AF^k) = AF^k$, 而且, 当 $\omega \in \Omega^k$ 时有 $A\omega = \omega$. 这就是说,$A : \mathfrak{F}^k \to \Omega^k$ 是 $\mathfrak{F}^k$ 到 Ω^k 上的映射.

比较定义 (3),(4),(11), 得到

$$A(F_1^k + F_2^k) = AF_1^k + AF_2^k, \tag{12}$$

$$A(\lambda F^k) = \lambda AF^k. \tag{13}$$

例 2 注意到 (12) 和 (13) 式, 从分解式 (10) 得到

$$AF^k = a_{i_1\cdots i_k} A(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}),$$

所以需求出 $A(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})$.

注意 $e^i(x) = x^i$, 从定义 (11) 就得到

$$A(e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_k})(x_1 \cdots x_k) = \frac{1}{k!} e^{j_1}(x_{i_1}) \cdots e^{j_k}(x_{i_k}) \delta_{1\cdots k}^{i_1\cdots i_k}$$

$$= \frac{1}{k!} x_{i_1}^{j_1} \cdot \cdots \cdot x_{i_k}^{j_k} \delta_{1\cdots k}^{i_1\cdots i_k} = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} x_1^{j_1} & \cdots & x_1^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_k^{j_1} & \cdots & x_k^{j_k} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

一般地说, 斜对称形式的张量积就未必还是斜对称形式. 所以在斜对称形式类中, 引入如下外积运算 $\wedge$:

$$\omega^k \wedge \omega^l := \frac{(k+l)!}{k!l!} A(\omega^k \otimes \omega^l). \tag{15}$$

因此, $\omega^k \wedge \omega^l$ 是 $k+l$ 次的斜对称形 ω^{k+l}.

例 3 根据例 2 的结果 (14), 由定义 (15), 得到

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2}(x_1, x_2) = \frac{2!}{1!1!} A(e^{i_1} \otimes e^{i_2})(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & e^{i_2}(x_1) \\ e^{i_1}(x_2) & e^{i_2}(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

例 4 利用例 3 中得到的等式, 关系式 (14) 及定义 (11),(15), 可得

$$e^{i_1} \wedge (e^{i_2} \wedge e^{i_3})(x_1, x_2, x_3) = \frac{(1+2)!}{1!2!} A(e^{i_1} \otimes (e^{i_2} \wedge e^{i_3}))(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{3!}{2!3!} e^{i_1}(x_{j_1})(e^{i_2} \wedge e^{i_3})(x_{j_2}, x_{j_3}) \delta_{1\ 2\ 3}^{j_1 j_2 j_3}$$

$$= \frac{1}{2!} x_{j_1}^{i_1} \begin{vmatrix} x_{j_2}^{i_2} & x_{j_2}^{i_3} \\ x_{j_3}^{i_2} & x_{j_3}^{i_3} \end{vmatrix} \delta_{1\ 2\ 3}^{j_1 j_2 j_3}$$

$$= x_1^{i_1} \begin{vmatrix} x_2^{i_2} & x_2^{i_3} \\ x_3^{i_2} & x_3^{i_3} \end{vmatrix} - x_2^{i_1} \begin{vmatrix} x_1^{i_2} & x_1^{i_3} \\ x_3^{i_2} & x_3^{i_3} \end{vmatrix} + x_3^{i_1} \begin{vmatrix} x_1^{i_2} & x_1^{i_3} \\ x_2^{i_2} & x_2^{i_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2} & x_1^{i_3} \\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2} & x_2^{i_3} \\ x_3^{i_1} & x_3^{i_2} & x_3^{i_3} \end{vmatrix}.$$

类似的推导, 能证明

$$e^{i_1} \wedge (e^{i_2} \wedge e^{i_3}) = (e^{i_1} \wedge e^{i_2}) \wedge e^{i_3}. \tag{17}$$

将行列式按行展开, 根据归纳原理, 即得

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}(x_1, \cdots, x_k) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & \cdots & e^{i_k}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i_1}(x_k) & \cdots & e^{i_k}(x_k) \end{vmatrix}, \tag{18}$$

同时, 由所做的计算看到, 公式 (18) 对于任何 1- 形式 $e^{i_1}, \cdots, e^{i_k}$(不必是空间 X^* 的基底形式) 也正确.

注意到张量积以及形式的斜对称化的以上面诸性质, 即可得到斜对称形式的外积的下列性质:

$$(\omega_1^k + \omega_2^k) \wedge \omega^l = \omega_1^k \wedge \omega^l + \omega_2^k \wedge \omega^l, \tag{19}$$

$$(\lambda\omega^k) \wedge \omega^l = \lambda(\omega^k \wedge \omega^l), \tag{20}$$

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl}\omega^l \wedge \omega^k, \tag{21}$$

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m) \tag{22}$$

◀ 显然, 等式 (19),(20) 由关系式 (6)—(8) 及 (12),(13) 推出.

对每个斜对称形式 $\omega = a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}$, 由关系式 (10)—(14) 及 (17), 得到

$$\omega = A\omega = a_{i_1\cdots i_k}A(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}) = \frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

为了证明等式 (21),(22), 利用已经证明了的等式 (19),(20), 只要对形如 $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ 的形式来验证它们就够了.

关于这种形式的结合律 (22) 已经由等式 (17) 建立.

根据等式 (18) 及这里所讨论的特殊的形式的行列式的性质, 可立刻得出 (21) 式. ▶

我们一并证明了, 任何形式 $\omega \in \Omega^k$ 能表成

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}. \tag{23}$$

这样, 向量空间 X 上的斜对称形式之集 $\Omega = \{\Omega^k\}$, 关于线性运算 (3),(4) 及外积 (15) 是等级代数 $\Omega = \otimes_{k=0}^{\dim X}\Omega^k$. 在每个线性空间 Ω^k 的范围内可进行线性运算, 而当 $\omega^k \in \Omega^k, \omega^l \in \Omega^l$ 时, 有 $\omega^k \wedge \omega^l \in \Omega^{k+l}$.

在直和 $\oplus\Omega^k$ 中, 求和是在 k 从零到空间 X 的维数间进行的,因为斜对称形式 $\omega^k : X^k \to \mathbb{R}$, 当它的次数高于线性空间 X 的维数时, 必然恒等于零, 这可由 (21) 式 (或由 (23) 式及 (18) 式) 看出来.

3. 线性空间中的线性映射及共轭空间中的共轭映射

设 X, Y 为实数域 (或其他数域, 但对 X, Y 是同样的域) 上的线性空间. 并设 $l: X \to Y$ 为 X 到 Y 内的线性映射, 即对任何 $x, x_1, x_2 \in X$ 及任何数 $\lambda \in \mathbb{R}$, 成立

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2) \text{ 和 } l(\lambda x) = \lambda(lx). \tag{24}$$

线性映射 $l: X \to Y$ 以自然的方式产生一个与它共轭的映射 $l^*: \mathfrak{F}_Y \to \mathfrak{F}_X$, 它是从定义在 Y 上的多重线性形式的集合 $\mathfrak{F}_Y$ 到类似的集合 $\mathfrak{F}_X$ 内的映射, 若 F_Y^k 是 Y 上的 k- 形式, 则按这个定义有

$$(l^* F_Y^k)(x_1, \cdots, x_k) := F_Y^k(lx_1, \cdots, lx_k). \tag{25}$$

由 (24) 及 (25) 看出,$l^* F_Y^k$ 是空间 X 上的一个 k- 形式 F_X^k, 即形式 $l^*(\mathfrak{F}_Y^k) \subset \mathfrak{F}_X^k$. 此外, 若形式 F_Y^k 是斜对称的, 那么形式 $(l^* F_Y^k) = F_X^k$ 也是斜对称的, 即 $l^*(\Omega_Y^k) \subset \Omega_X^k$. 在每个线性空间 $\mathfrak{F}_Y^k$ 或 Ω_Y^k 的范围内, 映射 l^* 显然是线性的, 即

$$l^*(F_1^k + F_2^k) = l^* F_1^k + l^* F_2^k \text{ 且 } l^*(\lambda F^k) = \lambda l^* F^k. \tag{26}$$

现在将定义 (25) 与形式的张量积, 斜对称化及外积的定义 (5),(11),(15) 相对照, 就推出

$$l^*(F^p \otimes F^q) = (l^* F^p) \otimes (l^* F^q), \tag{27}$$

$$l^*(AF^p) = A(l^* F^p), \tag{28}$$

$$l^*(\omega^p \wedge \omega^q) = (l^* \omega^p) \wedge (l^* \omega^q). \tag{29}$$

例 5　设 $e_1, \cdots, e_m$ 是 X 的基底,$\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_m$ 是 Y 的基底, 且 $l(e_i) = c_i^j \tilde{e}_j, i \in \{1, \cdots, m\}, j \in \{1, \cdots, n\}$, 若 k- 形式 F_Y^k 在基底 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_n$ 下的坐标表示为

$$F_Y^k(y_1, \cdots, y_k) = b_{j_1 \cdots j_k} y_1^{j_1} \cdot \cdots \cdot y_k^{j_k},$$

这里 $b_{j_1 \cdots j_k} = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \cdots, \tilde{e}_{j_k})$, 则

$$(l^* F_Y^k)(x_1, \cdots, x_k) = a_{i_1 \cdots i_k} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k},$$

这里 $a_{i_1 \cdots i_k} = b_{j_1 \cdots j_k} c_{i_1}^{j_1} \cdot \cdots \cdot c_{i_k}^{j_k}$, 因为

$$\begin{aligned} a_{i_1 \cdots i_k} &=: (l^* F_Y^k)(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) := F_Y^k(le_{i_1}, \cdots, le_{i_k}) \\ &= F_Y^k(c_{i_1}^{j_1} \tilde{e}_{j_1}, \cdots, c_{i_k}^{j_k} \tilde{e}_{j_k}) = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \cdots, \tilde{e}_{j_k}) c_{i_1}^{j_1} \cdot \cdots \cdot c_{i_k}^{j_k}. \end{aligned}$$

例 6 设 $e^1,\cdots,e^m$ 和 $\tilde{e}^1,\cdots,\tilde{e}^n$ 分别是 X^*,Y^* 的与例 5 中所说的 X,Y 的基底共轭的基底. 在例 5 的条件下得到

$$\begin{aligned}(l^*\tilde{e}^j)(x) &= (l^*\tilde{e}^j)(x^ie_i) = \tilde{e}^j(x^ile_i)\\ &= x^i\tilde{e}^j(c_i^k\tilde{e}_k) = x^ic_i^k\tilde{e}^j(\tilde{e}_k)\\ &= x^ic_i^k\delta_k^j = c_i^jx^i = c_i^je^i(x).\end{aligned}$$

例 7 仍用例 6 的记号, 并注意 (22),(29) 式, 现在得到

$$\begin{aligned}l^*(\tilde{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^{j_k}) &= l^*\tilde{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge l^*\tilde{e}^{j_k}\\ &= (c_{i_1}^{j_1}e^{i_1})\wedge\cdots\wedge(c_{i_k}^{j_k}e^{i_k})\\ &= c_{i_1}^{j_1}\cdot\ \cdots\ \cdot c_{i_k}^{j_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\begin{vmatrix}c_{i_1}^{j_1} & \cdots & c_{i_1}^{j_k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{i_k}^{j_1} & \cdots & c_{i_k}^{j_k}\end{vmatrix}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}.\end{aligned}$$

注意等式 (26), 由此就能得出一般的结论

$$\begin{aligned}&l^*\left(\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}b_{j_1\cdots j_k}\tilde{e}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{e}^{j_k}\right)\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}}b_{j_1\cdots j_k}\begin{vmatrix}c_{i_1}^{j_1} & \cdots & c_{i_1}^{j_k}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{i_k}^{j_1} & \cdots & c_{i_k}^{j_k}\end{vmatrix}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}\\ &= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}a_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}.\end{aligned}$$

练 习

1. 举例证明, 一般来说,

a) $F^k\otimes F^l\neq F^l\otimes F^k$;

b) $A(F^k\otimes F^l)\neq AF^k\otimes AF^l$;

c) 对于 $F^k,F^l\in\Omega$, 并非总有 $F^k\otimes F^l\in\Omega$.

2. a) 试证, 若 $e_1,\cdots,e_n$ 是线性空间 X 的基底, 而 $e^1,\cdots,e^n$ 是 X 上的线性函数 (即 X 的共轭空间 X^* 的元素), 且满足 $e^j(e_i)=\delta_i^j$, 则 $e^1,\cdots,e^n$ 是 X^* 内的基底.

b) 验证, 由形如 $e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}$ 的 k- 形式能构成空间 $\mathfrak{F}^k=\mathfrak{F}^k(X)$ 的基底. 设 $\dim X=n$, 试求此空间 $\mathfrak{F}^k$ 的维数 ($\dim\mathfrak{F}^k$).

c) 验证, 由形如 $e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_k}$ 的形式, 能构成空间 $\Omega^k=\Omega^k(X)$ 的基底, 设已知 $\dim X=n$, 试求 $\dim\Omega^k$.

d) 试证, 若 $\Omega=\oplus_{k=0}^{n}\Omega^k$, 则 $\dim\Omega=2^n$.

3. 设X是以P为数域的线性空间, 称G是X上的外 (格拉斯曼①) 代数 (通常记作 $\wedge(X)$ 以与 G 中的乘法运算 $\wedge$ 相对应), 如果它是有单位元 1 且具有以下三性质的结合代数:

1° G 能由单位元 1 及 X 生成, 即 G 的含有 1 及 X 的任何子代数都与 G 一致;

2° 对任何 $x\in X$, 有 $x\wedge X=0$;

3° $\dim G=2^{\dim X}$.

a) 试证, 若 $e_1,\cdots,e_n$ 是 X 的基底, 则 G 内形如 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}=:e_I(I=\{i_1<\cdots<i_k\}\subset\{1,2,\cdots,n\})$ 的元素 $1, e_1,\cdots,e_n,e_1\wedge e_2,\cdots,e_{n-1}\wedge e_n,\cdots,e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ 构成 G 的基底.

b) 根据 a) 的结论, 可以提出代数 $G=\wedge(X)$ 的如下的形式构造.

对 a) 内所说的集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 $I=\{i_1,\cdots,i_k\}$. 作形式元素 $e_I(e_{\{i\}}$ 与 e_i等同而 e_ϕ 与 1 等同), 把它们取做域 P 上的线性空间 G 的基底. G 内的乘法用公式

$$\left(\sum_I a_Ie_I\right)\left(\sum_J b_Je_J\right)=\sum_{I,J}a_Ib_J\varepsilon(I,J)e_{I\cup J}.$$

来定义, 这里 $\varepsilon(I,J)=\operatorname{sgn}\prod\limits_{i\in I,j\in J}(j-i)$. 试验证, 这时得到格拉斯曼代数 $\wedge(X)$.

c) 试证代数 $\wedge(X)$ 在同构意义下的唯一性.

d) 试证代数 $\wedge(X)$ 是等级代数 : $\wedge(X)=\oplus_{k=0}^{k=n}\wedge^k(X)$, 这里 $\wedge^k(X)$ 是形如 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}$ 的元素的线性包; 同时, 若 $a\in\wedge^p(X),b\in\wedge^q(X)$, 则 $a\wedge b\in\wedge^{p+q}(X)$. 试验证 $a\wedge b=(-1)^{pq}b\wedge a$.

4. 设 $A:X\to Y$ 为线性空间 X 到线性空间 Y 内的线性映射.

a) 试证, 存在由 $\wedge(X)$ 到 $\wedge(Y)$ 内的唯一的同态 $\wedge(A):\wedge(X)\to\wedge(Y)$ 在与 X 恒同的子空间 $\wedge'(X)\subset\wedge(X)$ 上与 A 一致.

b) 试证, 同态 $\wedge(A)$ 将 $\wedge^k(X)$ 变为 $\wedge^k(Y)$. $\wedge(A)$ 在 $\wedge^k(X)$ 上的限制记作 $\wedge^k(A)$.

c) 设 $\{e_i;i=1,\cdots,m\}$ 为 X 的基底, 而 $\{\tilde e_j;j=1,\cdots,n\}$ 为 Y 的基底, 并设在这些基下算子 A 对应于矩阵 (a_j^i). 试证, 若 $\{e_I;I\subset\{1,\cdots,m\}\},\{\tilde e_J;J\subset\{1,\cdots,n\}\}$ 为空间 $\wedge(X)$ 及 $\wedge(Y)$ 的相应的基底, 则算子 $\wedge^k(A)$ 的矩阵具有 $a_J^I=\det(a_j^i)$ 的形式, $i\in I,j\in J$, 这里 $\operatorname{card}I=\operatorname{card}J=k$.

d) 试验证: 若 $A:X\to Y,B:Y\to Z$ 为线性算子, 则等式 $\wedge(B\circ A)=\wedge(B)\circ\wedge(A)$ 成立.

---

①格拉斯曼 (Grassmann) (1809—1877) 德国数学家, 物理学家和语文学家; 特别地, 第一个高维欧几里德向量空间理论以及向量的数量积定义本身, 都是他提出来的.

§2 流　形

1. 流形的定义

定义 1 具有可数拓扑基的豪斯多夫拓扑空间[1], 叫做 n *维流形*, 假如其上任一点都有一个邻域 U, 它或同胚于整个空间 $\mathbb{R}^n$, 或同胚于半空间 $H^n=\{x\in\mathbb{R}^n|x^1\leqslant 0\}$.

定义 2 实现定义 1 中所说的同胚的映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\to U\subset M$ (或 $\varphi:H^n\to U\subset M$), 叫做*流形 M 的局部图*, 称 $\mathbb{R}^n$ (或 H^n) 为*参数域*, 而 U 为该图在流形 M 上的*有效域*.

局部图赋予每个点 $x\in U$ 自己的对应点 $t\in\varphi^{-1}(x)\in\mathbb{R}^n$ 的坐标. 这样, 在图的有效域 U 内导出了局部坐标系, 因此, 习惯上称映射 φ, 更完整的表示是序对 (U,φ), 是有效域 U 的图.

定义 3 一组图, 如果它们的有效域之集能覆盖整个流形, 就叫做该流形的*图册*.

例 1 球面 $S^2=\{x\in\mathbb{R}^3||X|=1\}$ 是二维流形. 如果把 S^2 看作是地球表面. 则地理图的图册就是流形 S^2 的图册.

$\mathbb{R}^2$ 内的圆周, 即一维球面 $S^1=\{x\in\mathbb{R}^2||x|=1\}$, 显然是一维流形. 一般来说, 球面 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}||x|=1\}$ 是 n 维流形. (参看第 12 章 §1).

注 1 显然, 定义 1 所引入的对象 (流形 M), 不会因为把 $\mathbb{R}^n$ 及 H^n 换成与 $\mathbb{R}^n$ 及 H^n 同胚的 $\mathbb{R}^n$ 内的参数域而改变. 例如, 这类参数域可以是开的方体 $I^n=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^i<1,i=1,\cdots,n\}$ 以及给它加上一个界面所得的方体 $\tilde{I}^n=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^1\leqslant 1$, 且 $0<x^i<1,i=2,\cdots,n\}$. 我们经常使用这样的标准参数域.

也不难验证, 如果只要每点 $x\in M$ 在 M 中有一个同胚于半空间 H^n 的某个开子集的邻域 U, 由定义 1 引出的对象就不会改变.

例 2 设 X 是具有图册 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 的 m 维流形,Y 是具有图册 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ 的 n 维流形, 则 $X\times Y$ 可以看做是具有图册 $\{(W_{\alpha\beta},\chi_{\alpha\beta})\}$ 的 $m+n$ 维流形, 这里 $W_{\alpha\beta}=U_\alpha\times V_\beta$, 而映射 $\chi_{\alpha\beta}=(\varphi_\alpha,\psi_\beta)$ 把 φ_α 及 ψ_β 的定义域的直积变成 $W_{\alpha\beta}$.

特别地, 二维环面 $T^2=S^1\times S^1$(图 69) 或 n 维环面 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}}$ 分别为二维流形及 n 维流形.

如果流形 M 的两张图 $(U_i,\varphi_i),(U_j,\varphi_j)$ 的有效域 U_i,U_j 相交, 即 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, 则在集合 $I_{ij}=\varphi_i^{-1}(U_j),I_{ji}=\varphi_j^{-1}(U_i)$ 间自然地建立了一个互逆的同胚 $\varphi_{ij}:I_{ij}\to$

[1] 参看第 9 章 §2 以及本节的注 2,3.

$I_{ji}, \varphi_{ji} : I_{ji} \to I_{ij}$. 这里 $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|I_{ij}, \varphi_{ji} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j|I_{ji}$. 经常把这些同胚叫做**坐标替换函数**, 因为它们在有效域的公共部分 $U_i \cap U_j$ 内, 能实现从一个局部坐标系到另一个局部坐标系的转换 (图 96).

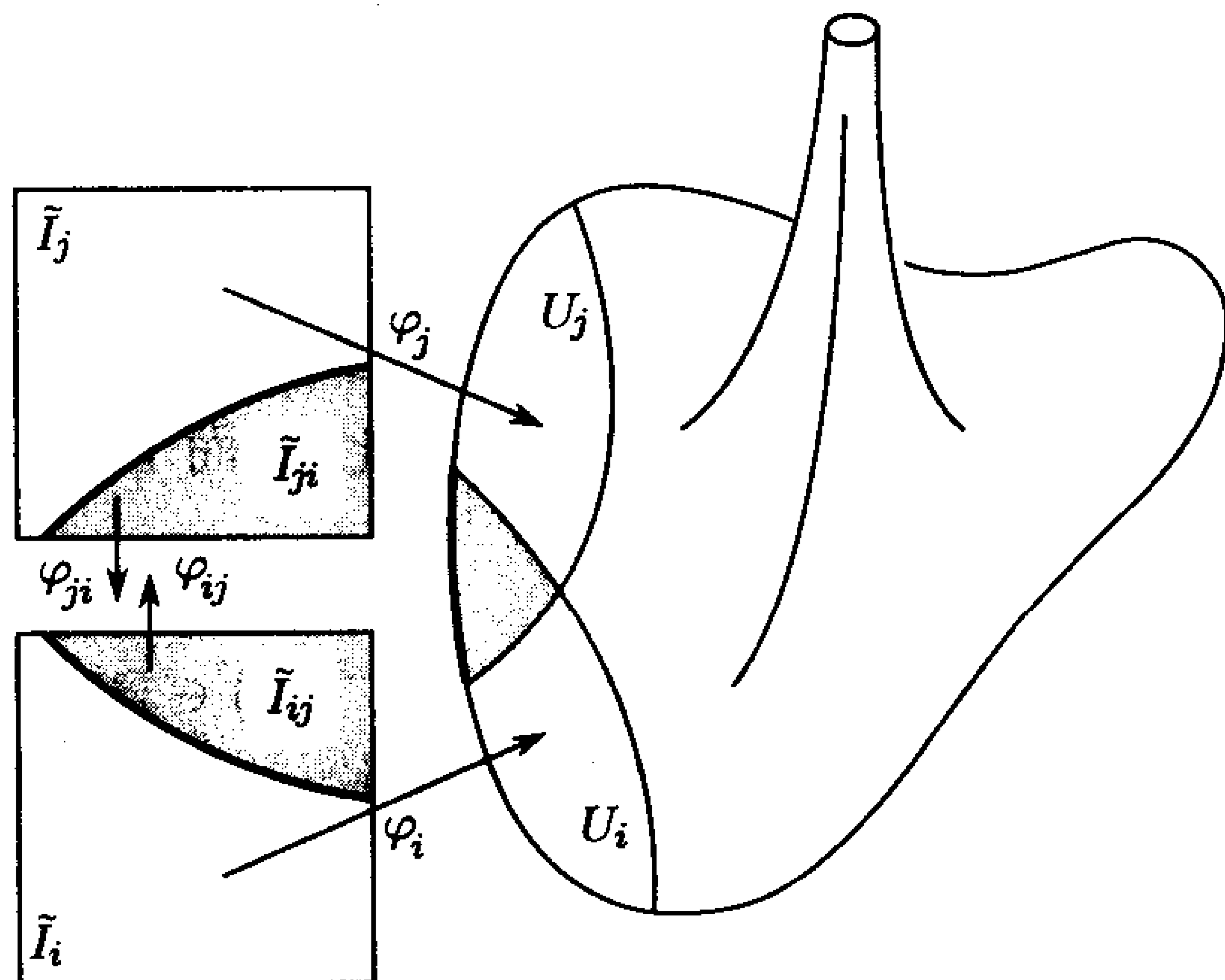


图 96

定义 4 定义 1 中的数 n 叫做流形 M 的维数, 通常记作 $\dim M$.

定义 5 如果在定义 1 所说的同胚 $\varphi : H^n \to U$ 下, 与点 $x \in U$ 对应的是半空间 H^n 的边界 ∂H^n 上的点 $\varphi^{-1}(x)$, 则称 x 为流形 M 的*边界点*. 流形 M 的所有边界点的集合叫做*流形的边界*, 通常用记号 ∂M 表示.

根据内点的拓扑不变性 (布劳威尔定理[①]), 流形的维数与边界点概念的定义都是合理的, 亦即, 它们与定义 4,5 所使用的具体的局部图无关. 我们没有证明过布劳威尔定理, 但是内点关于微分同胚的不变性, 我们是很清楚的 (这是反函数定理的推论). 因为后面的讨论只与微分同胚有关, 所以在布劳威尔定理上我们不再滞留.

例 3 闭球 $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \| x| \leqslant 1\}$, 也常称为闭 n 维圆盘, 是 n 维流形, 它的边界是 $(n-1)$ 维球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

注 2 若流形 M 的边界点之集不空, 通常称它为*带边流形*, 而把*流形*这个术语 (按其字面本来的意思) 仍用于无边流形. 在定义 1 中没有区分这两种情况.

命题 1 *n 维带边流形 M 的边界 ∂M 是 $(n-1)$ 维无边流形.*

◀ 实际上, $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$, 而流形 M 之图册中, 形如 $\varphi_i : H^n \to U_i$ 之图在 ∂H^n 上的限制, 构成了 ∂M 的图册. ▶

[①] 定理断定, 在集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 到集 $\varphi(E) \subset \mathbb{R}^n$ 上之同胚映射 $\varphi : E \to \varphi(E)$ 下, 集合 E 的内点变成集合 $\varphi(E)$ 的内点.

例 4 考察平面双摆 (图 97), 它的臂 a 大大小于臂 b, 且能自由摆动, 而臂 b 的摆动范围为支撑物所限. 这样一个系统的构形, 在任何具体时刻由两个角度 α, β 所刻画. 假如没有限制, 则双摆的构形空间, 显然等同于二维环面 $T^2 = S^1_\alpha \times S^1_\beta$.

如果存在所说的限制, 双摆的构形空间可用柱形 $S^1_\alpha \times I^1_\beta$ 的点参数化, 这里 S^1_α 是圆周, 它与臂 a 的可能位置相对应, 而 $I^1_\beta = \{\beta \in \mathbb{R} \| \beta| \leqslant \Delta\}$ 为一闭区间, 它是刻画杆 b 位置的角 β 的变动范围.

在这种情形下, 我们得到了带边流形. 此流形的边由两圆周 $S^1_\alpha \times \{-\Delta\}, S^1_\alpha \times \{\Delta\}$ 组成, 这两个圆周分别是 S^1_α 与线段 I^1_β 的端点 $\{-\Delta\}, \{\Delta\}$ 的乘积.

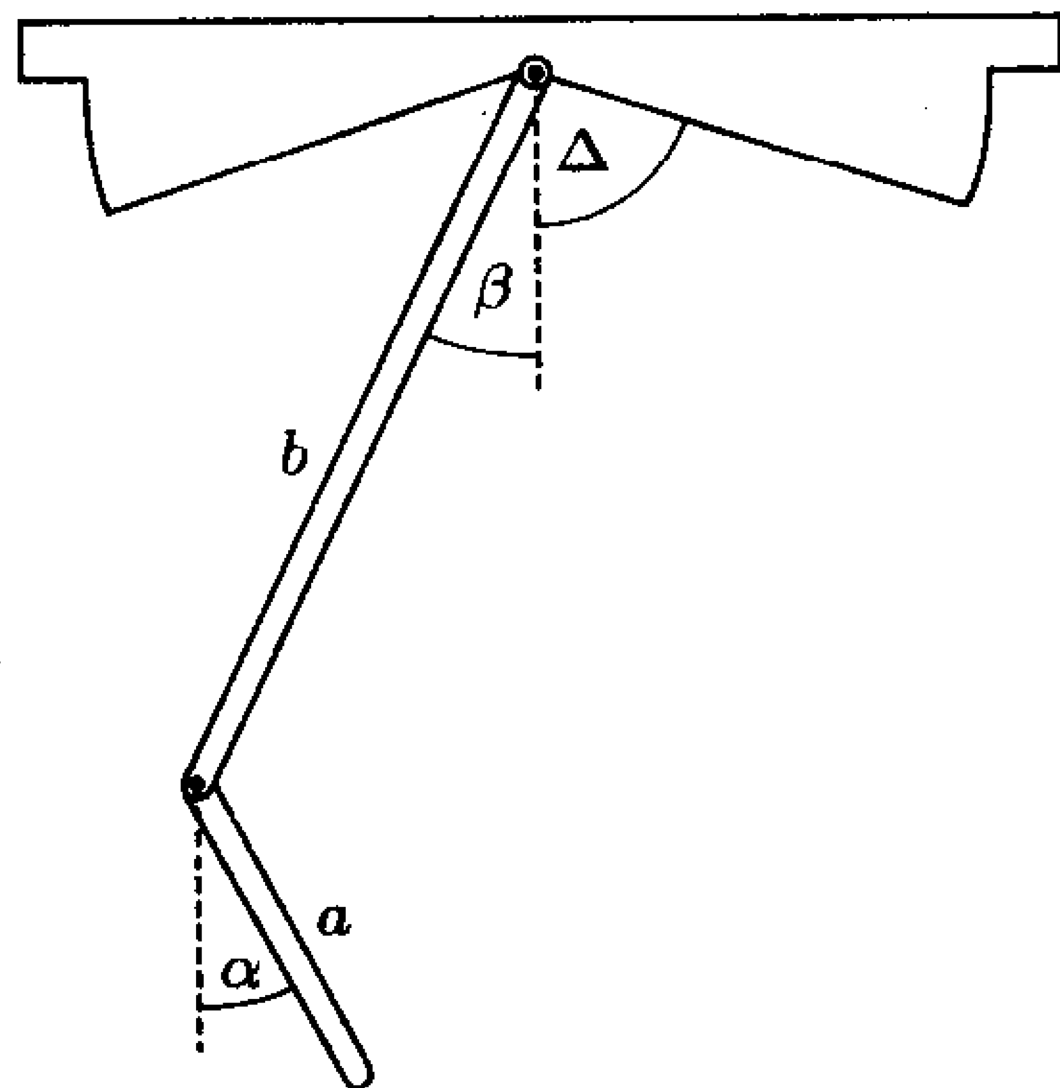


图 97

注 3 在研究过的例 4 中看出, 有时集 M 上的坐标 (在例 4 中即 α, β) 能很自然地产生出来, 而且他们本身就能在 M 上导出拓扑. 这就是说, 在流形的定义 1 中, 不必要总是事先要求 M 上已有拓扑. 流形概念的本质在于集合 M 的点, 能用空间 $\mathbb{R}^n$ 的某组子域的点参数化. 同时, 在 M 的局部上出现的坐标系间, 产生出一种自然的联系, 它表现为空间 $\mathbb{R}^n$ 的相应区域内的映射, 这就是说, 可以认为 M 是由空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组区域, 按指定的规律, 使它们的点等同起来而得到的; 或直白地说, 按指定的规律, 把它们彼此粘合起来. 这样, 给出流形, 实际上就是给出 $\mathbb{R}^n$ 的一组子区域以及这些子区域的点之间的对应规律. 我们不滞留于如何把这里所说的 (粘合或点的等同, 在 M 上引进拓扑等) 概念进一步精确化.

定义 6 如果流形作为拓扑空间是紧的 (连通的), 就称它为*紧流形* (*连通流形*)

例 1—4 内所考察的流形都是紧且连通的. 例 4 内出现的柱面 $S^1_\alpha \times I^1_\beta$ 的边界由两个独立的圆周组成, 是一维紧而不连通的流形. 例 3 中的 n 维圆盘的边界 $S^{n-1} = \partial \overline{B}^n$ 是紧流形, 当 $n > 1$ 时, 它是连通的. 而当 $n = 1$ 时不连通 (由两点组成).

例 5 空间 $\mathbb{R}^n$ 本身显然是连通非紧无边流形, 而半空间 H^n 是连通非紧带边流形的最简单例子.(在这些情况下, 可以取一张图组成图册, 且相应的映射是恒等映射.)

命题 2 *如果流形 M 是连通的, 那么它是线连通的.*

◀ 固定一点 $x_0 \in M$ 后, 考察流形 M 中的那些点的集 E_{x_0}, 它们能用在 M 范围内的道路与点 x_0 连接. 由流形之定义可知, 集合 E_{x_0} 在 M 内不空, 既开又闭. 因而 $E_{x_0} = M$ ▶

例 6　若使每个 n 阶实方阵与空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的点对应, 点的坐标是把方阵的所有元素按照一定顺序写出得到的, 则所有非退化 n 阶方阵之群 $GL(n,\mathbb{R})$ 成为 n^2 维的流形. 该流形是非紧 (方阵的元素无界) 且不连通的. $GL(n,\mathbb{R})$ 的不连通性, 由它既含具正行列式又含具负行列式之方阵推出.$GL(n,\mathbb{R})$ 中与这样的两个方阵对应的点, 不可能用一条道路连接起来 (如若不然, 在此道路上, 将有一点, 使相应矩阵的行列式为零).

例 7　平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 其行列式为 1 的正交变换群 $SO(2,\mathbb{R})$, 由形如 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 的方阵组成, 因此, 可把它认作是与圆周, 即角参数 α 的变动域等同的流形. 因此,$SO(2,\mathbb{R})$ 是一维紧连通流形. 如果关于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的直线的反射也是允许的①, 则得到所有二阶实正交方阵之群 $O(2,\mathbb{R})$. 它自然地能等同于两个不同的圆周, 它们分别与行列式为 1 与 -1 的矩阵相对应. 因此,$O(2,\mathbb{R})$ 也是一维紧但不连通的流形.

例 8　设 $\boldsymbol{a}$ 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的向量,$T_{\boldsymbol{a}}$ 是由向量 $\boldsymbol{a}$ 产生的一个平面运动群. 群 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的元素是将 $\mathbb{R}^2$ 中的向量平移 $n\boldsymbol{a}$ 的平移运算,$n\in\mathbb{Z}$. 在群 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的元素 g 的作用下, 平面上每个点 x 被移到形如 $x+n\boldsymbol{a}$ 的点 $g(x)$. 给定点 $x\in\mathbb{R}^2$, 在给定变换群的每个元素作用下所成的一切点的集合, 叫做*点的轨道*.“属于同一轨道” 这样一个 $\mathbb{R}^2$ 的点的性质, 显然是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系. 而轨道是在此意义下的等价点类.$\mathbb{R}^2$ 内的区域, 如果它恰含每个轨道的一个点, 就叫做给定的自同构群的*基本域* (确切含义见习题 5d).

在我们的情况下, 可取与 $\boldsymbol{a}$ 正交的间距为 $|\boldsymbol{a}|$ 的两条平行线所界的长条做为基本域. 应当注意的只是, 这两条平行线的每一条都能从另一条移动 $\boldsymbol{a}$ 或 $-\boldsymbol{a}$得到. 在与 $\boldsymbol{a}$ 正交宽度小于 $|\boldsymbol{a}|$ 的长条范围内, 没有彼此等价的点, 所以, 在这样的长条内有代表点的任何轨道都能单值地赋予其这种代表点的坐标. 这样, 给定的群 $T_{\boldsymbol{a}}$ 的轨道的商集 $R^2/T_{\boldsymbol{a}}$ 变成了流形, 由上面所说的基本域, 容易了解, 此流形与那样一个柱面同胚, 它是将宽为 $|\boldsymbol{a}|$ 的长条的两条边界直线上彼此等价的点粘在一起而成的.

例 9　今设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 的一对正交向量,$T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 是由这二向量产生的平移群. 在这种情形下, 基本域是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的矩形. 在此矩形范围内, 只有位于其对边上的点才能等价. 在将基本矩形的边对应地粘合之后, 可以断定, 所产生的流形 $\mathbb{R}^2/T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 与二维环面同胚.

例 10　我们再讨论平面 $\mathbb{R}^2$ 上由下列变换产生的运动群 $G_{ab}: a(x,y)=(x+1,1-y), b(x,y)=(x,y+1)$.

群 $G_{a,b}$ 的基本域是单位正方形, 其两水平边上的点等同于一条竖直线上的点, 而正方形的侧边上的点, 则等同于关于其中心对称的点. 因此, 产生的流形 $R^2/G_{a,b}$

①译者注. 这里 “关于平面 $\mathbb{R}^2$ 中的直线的反射” 似应改为 “关于平面 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的直线的反射”.

与克莱因瓶同胚 (参看第 12 章 §1).

在这里, 我们不再讨论第 12 章 §1 详细分析过的那些有益和重要的例子.

2. 光滑流形与光滑映射

定义 7 称流形的图册是 ($C^{(k)}$ 类或解析) 光滑图册, 如果图册中所有坐标替换函数都是 (具相应光滑性的) 光滑函数.

两个 (具相同光滑性的) 图册, 如果它们的并集构成具同样光滑性的图册, 则称它们是等价图册.

例 11 只用一张图构成的图册, 可以认为它是要多光滑就多光滑的. 在这方面, 我们来考察 $\mathbb{R}^1$ 上由恒等映射 $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \varphi(x) = x \in \mathbb{R}^1$ 作成的图册和由映 $\mathbb{R}^1$ 到 $\mathbb{R}^1$ 上任意一个严格单调光滑函数 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^1$ 作成的另一个图册. 这两个图册的并仍将是一个图册, 显然, 它的光滑度是函数 $\widetilde{\varphi}$ 及 $\widetilde{\varphi}^{-1}$ 的光滑度中的较小者.

特别地, 当 $\widetilde{\varphi}(x) = x^3$ 时, 则由图 $\{\mathbb{R}^1, x^3\}$ 构成的图册不是光滑的, 因为 $\widetilde{\varphi}^{-1}(x) = x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 不光滑. 利用上面所说的, 可在 $\mathbb{R}^1$ 上建立不同的无限光滑的图册, 而它们的并是具事先给定的 C^k 光滑性的图册.

定义 8 流形 M 连同在 M 上给出的具已知光滑度的等价图册类, 叫做 (C^k 类, 解析类) *光滑流形*.

有了这个定义, 下面的术语就清楚了: ($C^{(o)}$ 类) *拓扑流形*; $C^{(k)}$ 类*流形*; *解析流形*.

为了在流形 M 上给出具给定光滑度的图册的整个等价类, 只要给出这个等价类中的任意一个图册就够了. 因此, 可以认为, 光滑流形是一个对 (M, A). 其中 M 是流形, 而 A 是 M 上具给定光滑度的图册.

流形上具给定光滑度的等价图册的集合, 常叫做该*流形上具给定光滑度的光滑结构*. 在具相同拓扑的流形上, 可能存在不同的光滑结构, 甚至有具相同光滑度的不同的光滑结构 (参看例 1 及问题 3).

再来考察一些例子, 我们特别注意其中的坐标替换函数的光滑度.

例 12 我们称之为实射影直线的一维流形 $\mathbb{RP}^1$ 是 $\mathbb{R}^2$ 内的通过坐标原点, 且具有自然的 (例如, 用直线间的较小夹角衡量的) 直线邻近关系的直线束. 束内每条直线由非零有向向量 (x^1, x^2) 唯一地确定, 并且两个这样的向量, 当且仅当它们共线时才给出束中的同一直线. 这就是说 $\mathbb{RP}^1$ 可以看成是实数序对 (x^1, x^2) 等价类的集合. 在这里, 序对中的数至少有一个不为零, 并且当两个序对成比例时, 就认为它们是等价的 (等同的). 通常称序对 (x^1, x^2) 为 $\mathbb{RP}^1$ 上的*齐次坐标*.借助把 $\mathbb{RP}^1$ 解释成齐次坐标, 容易在 $\mathbb{RP}^1$ 上建立由两张图构成的图册. 设 $U_i, i = 1, 2$, 是 $\mathbb{RP}^1$ 的那样的一些直线 (序对 (x^1, x^2) 的类): $x^i \neq 0$. 与 U_1 的点 (直线)p 一一地对应着由一个

数 $t_1^2 = x^2/x^1$ 确定的序对 $(1, \frac{x^2}{x^1})$. 类似地, 域 U_2 的点与由一个数 $t_2^1 = x^1/x^2$ 确定的形如 $(\frac{x^1}{x^2}, l)$ 的序对一一对应. 这样, 在 U_1 及 U_2 内, 产生了局部坐标, 它显然与上面在 $\mathbb{RP}^1$ 内引进的拓扑相符. 在这样建立的局部图的公共有效域 $U_1 \cap U_2$ 内, 引进的局部坐标满足关系 $t_2^1 = (t_1^2)^{-1}, t_1^2 = (t_2^1)^{-1}$. 这些关系证明了所建立的图册不止属于 $C^{(\infty)}$ 类, 甚至还是解析的.

最好再看看流形 $\mathbb{RP}^1$ 的以下解释. 直线束的每条直线完全被它与单位圆周的交点确定. 然而这样的点恰有两个, 并且它们是圆的直径的两个端点. 直线的邻域等价于它在圆周上的对应点对的邻域. 这就是说, 能够把 $\mathbb{RP}^1$ 解释作将直径两端点等同起来 (粘合在一起) 的圆周. 如果只取半圆周, 则在它上面只出现一对彼此等同的点, 这就是半圆周的两个端点. 把它们粘合在一起, 将得到重新拓扑化的圆周. 这样一来,$\mathbb{RP}^1$ 作为拓扑空间, 与圆周同胚.

例 13 如果考察 $\mathbb{R}^3$ 中过坐标原点的直线束, 或者说, 不同时为零的成比例的三实数序组类的集合, 则我们得到*实射影平面*$\mathbb{RP}^2$. 在分别由 $x^1 \neq 0, x^2 \neq 0, x^3 \neq 0$ 定义的区域 U_1, U_2, U_3 中, 引入局部坐标系 $\left(1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right) = (1, t_1^2, t_1^3) \sim (t_1^2, t_1^3)$, $\left(\frac{x^1}{x^2}, 1, \frac{x^3}{x^2}\right) = (t_2^1, 1, t_2^3) \sim (t_2^1, t_2^3)$, $\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, 1\right) = (t_3^1, t_3^2, 1) \sim (t_3^1, t_3^2)$. 关于局部图的有效域的公共部分, 显然成立关系 $t_i^j = (t_j^i)^{-1}, t_i^j = t_k^j (t_k^i)^{-1}$.

例如, 在区域 $U_1 \cap U_2$ 内, 用公式

$$t_2^1 = (t_1^2)^{-1}, t_2^3 = t_1^3 \cdot (t_1^2)^{-1}$$

表达从坐标 (t_1^2, t_1^3) 到坐标 (t_2^1, t_2^3) 的转换.

这变换的雅可比等于 $(-t_1^2)^{-3}$, 而因 $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$,所以它在与所讨论的集合 $U_1 \cap U_2$ 的点相对应的点处有定义且不为零.

这样,$\mathbb{RP}^2$ 是二维流形, 它有由三张图构成的解析图册.

沿着与例 12 内考察射影直线 $\mathbb{RP}^1$ 的相同的思路, 可把射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 解释成将直径两端等同起来的二维球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, 或解释成边界圆周的直径两端等同起来的半球面. 把半球射影到平面上, 我们就能把 $\mathbb{RP}^2$ 解释成将边界圆的直径两端点等同起来的圆盘 (二维圆盘).

例 14 平面 $\mathbb{R}^2$ 上的所有直线全体, 可分成两个集: U —— 非竖直直线, V —— 非水平的直线. U 中每条直线的方程有 $y = u_1 x + u_2$ 的形式, 因而可用坐标 (u_1, u_2) 刻画. 与此同时, V 中任意直线有形如 $x = v_1 y + v_2$ 的方程, 从而能用坐标 (v_1, v_2) 给出. 对于交 $U \cap V$ 中的直线, 有坐标变换函数 $v_1 = u_1^{-1}, v_2 = -u_2 u_1^{-1}$, 及 $u_1 = v_1^{-1}, u_2 = -v_2 v_1^{-1}$. 因此, 所考察的集作为微分流形有由两张图构成的解析图册.

平面上任何直线有形如 $ax+by+c=0$ 的方程, 因而可用三个数的数组 (a,b,c) 刻画它, 并且成比例的两个数组表示同一条直线. 所以可以证明, 我们在这里再一次遇到了例 13 中讨论过的射影平面 $\mathbb{RP}^2$. 然而, 如果在 $\mathbb{RP}^2$ 中容许有不同时为零的任意三数数组, 那么现在就不容许有形如 $(0,0,c)$ 的三数数组, 这里 $c\neq 0$. 在 $\mathbb{RP}^2$ 中所有这样的三数数组, 对应着同一个点. 这就是说, 本例中所得流形, 与由 $\mathbb{RP}^2$ 去掉一点所得的流形同胚. 如果把 $\mathbb{RP}^2$ 解释成将其边界圆的直径两端点等同起来的圆盘, 那么挖掉圆的中心, 我们就在同胚的意义下, 得到一个环, 而其外圆周的径对映点是粘合在一起的. 借助简单的剪开, 很容易证明, 这时所得到的不是别的, 正是熟知的默比乌斯带.

定义 9 设 M,N 都是 $C^{(k)}$ 类的光滑流形. 映射 $f:M\to N$ 叫 l- 光滑映射($C^{(l)}$ 类), 如果点 $f(x)\in N$ 的局部坐标是点 $x\in M$ 的局部坐标的 $C^{(l)}$ 类函数.

当 $l\leqslant k$ 时, 所引入的定义有意义且合理的 (与选用的局部图无关).

特别地,M 到 $\mathbb{R}^1$ 内的光滑映射是 M 上的光滑函数, 而 $\mathbb{R}^1$(或 $\mathbb{R}^1$ 内的线段) 到 M 内的光滑映射是 M 上的光滑道路.

因此, 光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}^1$ 在流形 M 上的次数不能超过该流形的光滑的次数.

3. 流形及其边界的定向

定义 10 光滑流形的两个图叫做*相容的*, 如果在它们的公共有效域内从一图的局部坐标到另一图的局部坐标的变换是微分同胚, 且处处有正的雅可比.

特别地, 当两个局部图的有效域之交为空集时, 也认为它们是相容的.

定义 11 光滑流形 (M,A) 的图册 A 叫做流形 M 的*定向图册*, 如果它的图是两两相容的.

定义 12 称流形 M 是*可定向流形*, 如果存在它的定向图册. 否则, 称它是*不可定向流形*.

流形的两个定向图册之并, 如果仍是一个定向图册, 则称它们是*等价*定向图册.容易看出, 这里所说的 "等价" 的确是定向图册集中的等价关系.

定义 13 流形 M 的定向图册集按上述等价关系所得的等价类叫做它的*定向图册类*或*定向*.

定义 14 一个流形, 如果它有指定的定向图册类, 就叫做*定向流形*.

因此, 给流形定向, 就是 (不管用什么方法) 指定一个由它的图册构成的定向图册类. 为此, 显然, 只要指出这个特定的定向图册类中的任意一个定向图册即可.

在第 12 章 §2, §3 中给出了给 $\mathbb{R}^n$ 中的流形定向的各种实用方法.

命题 3　*连通流形, 或者不可定向, 或者有两种不同的定向.*

◀ 设 A 和 $\widetilde{A}$ 是给定的流形 M 的两个定向图册, 并给出了从一个图册的图的局部坐标到另一个图册的图的局部坐标的微分同胚变换. 设 $p_0 \in M$, 而分别属于两个图册的两张图的有效域 $U_{i_0}, \widetilde{U}_{j_0}$ 都包含点 p_0, 且这两张图的坐标变换的雅可比在与点 p_0 对应的参数域中的点处是正的. 我们来证明, 这时对于任何点 $p \in M$ 及图册 $A, \widetilde{A}$ 中有效域含有 p 的任何图, 坐标变换的雅可比在相应的坐标点处也是正的.

首先, 我们能明显地看到, 若在点 $p \in M$ 对图表 $A, \widetilde{A}$ 的某一对包含 p 的图, 变换的雅可比是正的 (负的), 则它在 p 对任何这样一对图也是正的 (负的), 因为在一个图册的范围内, 坐标变换都有正的雅可比. 而复合映射的雅可比等于它们的雅可比之积.

今设 E 是 M 的子集, 它由那样一些点 $p \in M$ 组成: 在 p 处, 一个图册的图到另一图册的图的坐标变换的雅可比为正.

因 $p_0 \in E$, 故集合 E 不空. E 还是 M 内的开集. 实际上, 对任何点 $p \in E$, 存在 A 与 $\widetilde{A}$ 的图册中的图, 它们有包含 p 点的有效域 $U_i, \widetilde{U}_j$. 集 U_i 与 $\widetilde{U}_j$ 是 M 内的开集, 所以 $U_i \cap \widetilde{U}_j$ 也是 M 内的开集. 集 $U_i \cap \widetilde{U}_j$ 的含有 p 的连通分支, 既在 $U_i \cap \widetilde{U}_j$ 开又在 M 内开. 在这个连通分支上, 坐标变换的雅可比不会变为零, 从而也不会变号. 因此, 在 p 的某个邻域内, 雅可比恒为正, 这就证明了 E 是开集. 但集 E 也是 M 内的闭集. 这可由微分同胚的雅可比连续, 以及微分同胚的雅可比不为零推得.

这样,E 是连通集 M 的不空的既开又闭的集. 因此,$E = M$, 且图册 A,$\widetilde{A}$ 在 M 上给出了相同的定向.

在图册 A 的所有图内, 把坐标之一变号, 例如把 t^1 换成 $-t^1$, 就得到属于另一定向类的定向图册 $-A$. 因为从图册 A 的任意图到 $-A$ 的图的坐标变换的雅可比有相反的符号, 所以在 M 上任何定向图册或者与 A 等价, 或者与 $-A$ 等价. ▶

定义 15　称给定图册中的有限图列为*图链*, 如果它的任何两个序号相邻的图的有效域的交不空 ($U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$).

定义 16　一个图链叫做*矛盾图链*或*无向图链*, 如果从它的任何一个图向其后一个图的坐标变换的雅可比都是正的, 链的第一个和最后一个图的有效域相交, 但从最后的图到第一个图的坐标变换的雅可比是负的.

命题 4　*流形是可定向的, 当且仅当其上不存在矛盾图链.*

◀ 因为任何流形都能分解成一些连通分支, 它们可独立地定向. 因此, 只要对连通流形 M 证明命题 4 就行了.

必要性　设连通流形 M 是定向的,A 是 M 的给出其定向的定向图册. 根据命题 3 中已经证明的事实, 流形 M 的任何与图册 A 的图有光滑坐标变换关系的局部图, 或者与图册 A 的所有的图相容, 或者与图册 $-A$ 的所有图相容. 这很容易从命

题 3 本身看出来, 只要把图册 A 的图都限制在我们所取的 M 的局部图有效域上, 而把这个有效域看作是有一个图的连通定向流形. 由此推知, 在流形 M 上不存在矛盾图链.

充分性 由定义 1 推知, 在流形上存在着由有限个或可数多个图组成的图册. 取这样一个图册 A, 并将它的图重新编号. 考察图 (U_1, φ_1) 及任意一个使 $U_1 \cap U_i \neq \varnothing$ 的图 (U_i, φ_i). 这时, 坐标变换 $\varphi_{1i}, \varphi_{i1}$ 的雅可比, 在变换的定义域内, 或者处处是负的, 或者处处为正的. 它们不能有不同号的值, 如若不然, 在集 $U_1 \cap U_i$ 内就能指出雅可比为负及雅可比为正的连通子集 U_-, U_+, 从而, 图链 $(U_1, \varphi_1), (U_+, \varphi_1), (U_i, \varphi_i), (U_-, \varphi_i)$ 就是矛盾的了.

这样, 如果必要, 把图 (U_i, φ_i) 的一个坐标变号, 就能得到一个有同样的有效域 U_i 且与图 (U_1, φ_1) 相容的图, 我们仍把它记作 (U_i, φ_i). 原来, 满足 $U_1 \cap U_i \neq \varnothing, U_1 \cap U_j \neq \varnothing, U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 的两张图 $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$, 在做了上边所述的那种处理后, 是相容的. 若不然, 我们由这三个图就能建立一个矛盾的图链.

因此, 可以认为图册中其有效域与 U 相交的一切图是彼此相容的. 现在取这些图的每一个作标准局部图, 能使图册中没有包括在第一阶段中的新图与它相容. 在这个过程中, 不会出现矛盾的情况. 因为根据假设, 在流形上不存在矛盾图链. 继续这种步骤, 并考虑到流形的连通性, 我们将在流形上建立起一个两两相容的图组成的图册, 这就证明了已知流形是可定向的. ►

所得到的流形可定向性的判别准则, 其实, 还有它的证明中的想法, 都能成功地应用于具体流形的研究. 这样, 例 12 中所考察的流形 $\mathbb{RP}^1$ 是可定向的. 从那里给出的图册, 容易得到 $\mathbb{RP}^1$ 的定向图册. 为此, 只要改变那里所建立的两图之一的局部坐标的符号. 不过, 射影直线 $\mathbb{RP}^1$ 的可定向性, 显然还可由流形 $\mathbb{RP}^1$ 同胚于圆周得到.

射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 是不可定向的: 在例 13 中所建立的图册 $\mathbb{RP}^2$ 的任一图对是这样的, 在图对范围内的坐标变换既有使雅可比为正的区域, 也有使它为负的区域, 如在命题 4 的证明中所见, 由此推知, 在 $\mathbb{RP}^2$ 上存在矛盾图链.

根据同样的道理, 例 14 中所考察的流形, 也是不可定向的. 顺便说一下, 正如我们指出的那样, 它恰好与默比乌斯带同胚.

命题 5 *定向光滑 n 维流形的边界是定向 $n-1$ 维流形, 它与原流形具有同样的光滑度.*

◄ 命题 5 的证明, 与第 12 章 §3 第 2 段, 关于 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面的类似的命题 2 的证明是完全一样的. ►

定义 17 若 $A(M) = \{(H^n, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^n, \varphi_j, U_j)\}$ 是流形 M 的定向图册, 则图集 $A(\partial M) = \{(\mathbb{R}^{n-1}, \varphi_i|_{\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}}, \partial U_i)\}$ 是流形 M 的边界 ∂M 的定向图册. 用这个图册给出的边界定向, 叫做*与流形的定向和谐的边界定向*.

在实用上重要且经常使用的给 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面, 及其边界和诸定向的方法, 在第 12 章 §2, §3 中已有详细叙述.

4. 单位分解及流形以 $\mathbb{R}^n$ 中曲面的形式的实现

这里将叙述一种专门的结构, 在数学上把它叫做*单位分解*. 这种结构常常成为把整体问题归结为局部问题的基本方法. 后面, 在推导流形上的斯托克斯公式时, 我们将对此作一个具体演示, 而在这里, 我们利用单位分解来阐明, 任何流形都能以维数 n 足够大的空间 $\mathbb{R}^n$ 内的曲面的形式实现.

引理　*在 $\mathbb{R}$ 上, 能构造一个函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 使得当 $|x| \geqslant 3$ 时, $f(x) \equiv 0$; 当 $|x| \leqslant 1$ 时, $f(x) \equiv 1$; 而当 $1 < |x| < 3$ 时, $0 < f(x) < 1$.*

◀ 现在从熟知的函数 $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$ 出发, 来构造一个这样的函数. 当时 (参看第 1 卷第 201 页) 我们曾验证了 $g \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 证明了 $g^{(n)}(0) = 0$ 对一切 $n \in \mathbb{N}$ 成立.

因此, 非负函数

$$G(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}}, & \text{当 } |x| < 1, \\ 0, & \text{当 } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

也属于 $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 与它一样,

$$F(x) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} G(t)dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(t)dt}$$

也属这个函数类, 因为有 $F'(x) = G(x) / \int_{-\infty}^{\infty} G(t)dt$

函数 F 在区间 $[-1,1]$ 上严格递增; 当 $x \leqslant -1$ 时, $F(x) \equiv 0$; 当 $x \geqslant 1$ 时, $F(x) \equiv 1$.

现在可取

$$f(x) = F(x+2) + F(-x-2) - 1$$

作为要求的函数. ▶

注　若 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是在引理的证明里建立的函数, 则在 $\mathbb{R}^n$ 内定义的函数

$$\theta(x^1, \cdots, x^n) = f(x^1 - a^1) \cdot \cdots \cdot f(x^n - a^n)$$

满足: $\theta \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$; 在任何点 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立 $0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1$; 在区间 $I(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x^i - a^i| \leqslant 1, i = 1, \cdots, n\}$ 上有 $\theta(x) \equiv 1$, 且函数 θ 的支集 $\operatorname{supp}\theta$ 包含在区间 $\tilde{I}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x^i - a^i| \leqslant 3, i = 1, \cdots, n\}$ 内.

定义 18 设 M 是 $C^{(k)}$ 光滑类的流形,X 是 M 的子集. 称由函数 $e_\alpha = C^{(k)}(M, \mathbb{R})$ 构成的函数组 $E = \{e_\alpha, \alpha \in A\}$ 为集 X 上的 ***k* 阶光滑** 或 ***C^k* 类单位分解**, 如果

1° $0 \leqslant e_\alpha(x) \leqslant 1$ 对任意函数 $e_\alpha \in E$ 及任意 $x \in M$ 成立;

2° 每一点 $x \in X$ 在 M 中都有邻域 $U(x)$, 使得函数组 E 中只有有限多个函数在 $U(x)$ 上不恒等于零;

3° $\sum\limits_{e_\alpha \in E} e_\alpha(x) \equiv 1$ 在 X 上成立.

注意, 由条件 2°, 对任何 $x \in X$, 在和式中, 只有有限多项不为零.

定义 19 设 $\mathfrak{O} = \{o_\beta, \beta \in B\}$ 是集 $X \subset M$ 的开覆盖. 称 $E = \{e_\alpha; \alpha \in A\}$ 为 X 的**从属于覆盖 $\mathfrak{O}$ 的单位分解**, 如果 E 是 X 的单位分解, 且每个函数 $e_\alpha \in E$ 都包含在集族 $\mathfrak{O}$ 的某个集合内.

命题 6 *设 $\{(U_i, \varphi_i), i = 1, \cdots, m\}$ 是流形 M 的某个 k- 阶光滑图册中的有限多个图构成的图组, 它们的有效域构成紧集 $K \subset M$ 的覆盖. 那么在 K 上存在着从属于覆盖 $\{U_i, i = 1, \cdots, m\}$ 的 $C^{(k)}$ 类单位分解.*

◀ 对任一点 $x_0 \in K$, 首先引入以下构造. 依次取含 x_0 且与图 $\varphi_i : \mathbb{R}^n(H^n) \to U_i$ 对应的区域 U_i, 点 $t_0 = \varphi_i^{-1}(x_0) \in \mathbb{R}^n(H^n)$, 函数 $\theta(t - t_0)$ 及其在图 φ_i 的参数域上的限制 θ_t(这里 $\theta(t)$ 是引理的注里所指的函数).

设 I_{t_0} 是以 $t_0 \in \mathbb{R}^n$ 为中心的单位方体与图 φ_i 的参数域的交集. 实际上, 仅当图 φ_i 的参数域是半空间 H^n 时, θ_{t_0} 才与 $\theta(t - t_0)$ 不同, 而 I_{t_0} 才与相应的单位方体不同*. 关于每点 $x \in K$, 每个容许值 $i = 1, 2, \cdots, m$ 和相应的点 $t = \varphi_i^{-1}(x)$ 建立的所有的 M 内的开集 $\varphi_i(I_t)$ 构成紧集 K 的开覆盖. 设 $\{\varphi_{i_j}(I_{i_j}), j = 1, 2, \cdots, l\}$ 是由这个开覆盖选出的紧集 K 的有限覆盖. 显然 $\varphi_{i_j}(I_{t_j}) \subset U_{i_j}$. 我们在 U_{i_j} 上定义一个函数 $\widetilde{\theta}_j(x) = \theta_{t_j} \circ \varphi_{i_j}^{-1}(x)$. 把 $\widetilde{\theta}_j(x)$ 延拓到整个流形 M 上, 使它在 U_{i_j} 之外为零. 这个延拓到 M 上的函数仍记作 $\widetilde{\theta}_j$. 据 $\widetilde{\theta}_j \in C^{(k)}(M, \mathbb{R})$ 的作法,$\operatorname{supp}\widetilde{\theta}_j \subset U_{i_j}$; 在 M 上 $0 \leqslant \widetilde{\theta}_j(x) \leqslant 1$, 在 $\varphi_{i_j}(I_{t_j}) \subset U_{i_j}$ 上 $\widetilde{\theta}_j(x) \equiv 1$. 这时, 函数 $e_1(x) = \widetilde{\theta}_1(x), e_2(x) = \widetilde{\theta}_2(x)(1 - \widetilde{\theta}_1(x)), \cdots, e_l(x) = \widetilde{\theta}_l(x) \cdot (1 - \widetilde{\theta}_{l-1}(x)) \cdot \cdots \cdot (1 - \widetilde{\theta}_1(x))$ 组成所求的单位分解. 只需验证, 在 K 上 $\sum\limits_{j=1}^{l} e_j(x) \equiv 1$ 成立, 因为对 K 的单位分解、紧集 K 的从属覆盖 $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_l}\} \subset \{U_i, i = 1, \cdots, m\}$ 的其他要求, 函数组 $\{e_1, \cdots, e_l\}$ 显然是满足的. 但是由于对每个点 $x \in K$, 总有某个集 $\varphi_{i_j}(I_{t_j})$ 包含它, 而在这集上对应的函数 $\widetilde{\theta}_j$ 恒等于 1, 所以在 K 上成立

$$1 - \sum_{j=1}^{l} e_j(x) = (1 - \widetilde{\theta}_1(x)) \cdot \cdots \cdot (1 - \widetilde{\theta}_l(x)) \equiv 0. \blacktriangleright$$

---

* 译者注, 这句话似应是: 实际上, 仅当图 φ_i 的参数域与半空间 H^n 不同时,θ_{t_0} 才可能与 $\theta(t-t_0)$ 不同, 而 I_{t_0} 才可能与相应的单位方体不同.

推论 1 若 M 是紧流形, A 是 M 上的 $C^{(k)}$ 类图册, 则在 M 上存在从属于图册 A 的图的有效域的有限单位分解$\{e_1,\cdots,e_l\}$.

◀ 因 M 是紧的, 故可认为图册 A 是有限的. 如果在命题 6 中令 $K=M$, 那么, 命题 6 的条件就都成立了 ▶

推论 2 对流形 M 中的任何紧集 K 及任何包含 K 的开集 $G\subset M$, 存在函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 它与流形 M 同样光滑, 在 K 上 $f(x)\equiv 1$ 且 $\operatorname{supp}f\subset G$.

◀ 对每点 $x\in K$, 覆盖上一个邻域 $U(x)$, 使 $U(x)$ 位于 G 及流形 M 的某个图的有效域的范围内. 从紧集 K 的开覆盖 $\{U(x),x\in K\}$ 中选有限覆盖, 并做出 K 上从属于它的单位分解 $\{e_1,\cdots,e_l\}$. 函数 $f=\sum\limits_{i=1}^{l}e_i$ 即为所求. ▶

推论 3 每个 (抽象给出的) 紧光滑 n 维流形 M, 微分同胚于维数 N 足够大的空间 $\mathbb{R}^N$ 内的某个紧光滑曲面.

◀ 为了不使证明的基本思想被不重要的细节复杂化, 我们只对无边紧流形的情况进行证明. 在此情形下,M 上存在有限光滑图册 $A=\{\varphi_i:I\to U_i,i=1,\cdots,m\}$, 其中 I 是 $\mathbb{R}^n$ 内的 n 维方体. 选一个稍小的方体 I', 使得 $I'\subset I$ 而且 $\{U_i'=\varphi_i(I'),i=1,\cdots,m\}$ 仍然是 M 的覆盖. 在推论 2 中取 $K=I',G=I,M=\mathbb{R}^n$, 并做出函数 $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 使当 $t\in I'$ 时有 $f(t)\equiv 1$ 而且 $\operatorname{supp}f\subset I$.

今考察映射 $\varphi_i^{-1}:U_i\to I(i=1,\cdots,m)$ 的坐标函数 $t_i^1(x),\cdots,t_i^n(x)$, 并借助它们在 M 上引进下列函数:

$$y_i^k(x)=\begin{cases}(f\circ\varphi_i^{-1})(x)\cdot t_i^k(x), & \text{当 } x\in U_i,\\ 0, & \text{当 } x\notin U_i,\end{cases}\quad i=1,\cdots,m,\quad k=1,\cdots,n.$$

在任一点 $x\in M$, 映射 $M\ni x\mapsto y(x)=(y_1^1,\cdots,y_1^n,\cdots,y_m^1,\cdots,y_m^n)(x)\in\mathbb{R}^{m\cdot n}$ 的秩达到最大, 从而等于 n. 实际上, 若 $x\in U_i'$, 则 $\varphi_i^{-1}(x)=t\in I',f\circ\varphi_i^{-1}(x)=1$ 且 $y_i^k(\varphi_i(t))=t_i^k,k=1,\cdots,n$.

最后, 考察映射 $M\ni x\mapsto Y(x)=(y(x),f\circ\varphi_1^{-1}(x),\cdots,f\circ\varphi_m^{-1}(x))\in\mathbb{R}^{m\cdot n+m}$, 令在 $U_i(i=1,\cdots,m)$ 之外,$f\circ\varphi_i^{-1}(x)\equiv 0$, 则一方面此映射与映射 $x\mapsto y(x)$ 显然有相同的秩 n, 另一方面, 它显然是 M 到 M 在 $\mathbb{R}^{m\cdot n+m}$ 内的像上的一一映射. 我们来验证最后这个断言. 设 p,q 是 M 的不同点. 从覆盖 M 的组 $\{U_i',i=1,\cdots,m\}$ 中找出含有点 p 的区域 U_i'. 这时 $f\circ\varphi_i^{-1}(p)=1$. 如果 $f\circ\varphi_i^{-1}(q)<1$, 则 $Y(p)\neq Y(q)$ 随之成立. 而如果 $f\circ\varphi_i^{-1}(q)=1$, 则 $p,q\in U_i,y_i^k(p)=t^k(p),y_i^k(q)=t^k(q)$, 且即使对于同一值 $k\in\{1,\cdots,n\}$ 也有 $t_i^k(p)\neq t_i^k(q)$. 这就是说,$Y(p)\neq Y(q)$. ▶

关于任意流形能以 $\mathbb{R}^n$ 中曲面的形式实现这样一个一般的惠特尼 (Whitney) 定理, 读者可查阅专门的几何文献.

练 习

1. 验证, 假如只要求每点 $x \in M$ 有邻域 $U(x) \subset M$ 同胚于半空间 H^n 的开子集, 定义 1 所引入的对象 (流形) 并不改变.

2. 证明

a) 例 6 的流形 $GL(n,\mathbb{R})$ 是不紧的, 并恰有两个连通分支.

b) 流形 $SO(n,\mathbb{R})$ (参看例 7) 是连通的.

c) 流形 $O(n,\mathbb{R})$ 是紧的, 且恰有两个连通分支.

3. 设 (M,A) 与 $(\widetilde{M},\widetilde{A})$ 是具同样光滑度的两个 $C^{(k)}$ 流形. 称这两个光滑流形 (或它们的光滑结构) 是同构的, 如果在图册 $A,\widetilde{A}$ 下, 存在那样的 $C^{(k)}$ 类映射 $f: M \to \widetilde{M}$, 它有同一光滑类 $C^{(k)}$ 的逆映射 $f^{-1}: \widetilde{M} \to M$.

a) 试证, $\mathbb{R}^1$ 上具同样光滑性的结构彼此同构.

b) 验证例 11 中的命题, 并说明它们与习题 a) 是否矛盾.

c) 试证, 在圆周 S^1(一维球面) 上, 任意两个 $C^{(\infty)}$- 结构是同构的. 注意, 这一断言对于维数不超过 6 的球面仍然正确, 而在 S^7 上, 米尔诺①证明了, 存在不同构的 $C^{(\infty)}$- 结构.

4. 设 S 是 n 维流形 M 的子集. 如果对任意的点 $x_0 \in S$, 有流形 M 的那样的图 $x = \varphi(t)$, 它的有效域 U 包含 x_0, 而对于集 $S \cap U$, 在图 φ 的参数 $t = (t^1, \cdots, t^n)$ 的变化区域内存在由关系 $t^{n-k} = 0, \cdots, t^n = 0$ 定义的 k 维曲面与之对应. 则称 S 为**流形 M 的 k 维子流形**.

a) 试证, 由流形 M 的结构在 S 上自然地诱导出 k 维流形结构, 它与流形 M 的结构有同样的光滑度.

b) 请自己证实 $\mathbb{R}^n$ 内的 k 维曲面 S 确实是 $\mathbb{R}^n$ 的 k 维子流形.

c) 试证从直线 $\mathbb{R}^1$ 到环面 T^2 内的光滑同胚映射 $f: \mathbb{R}^1 \to T^2$ 的像 $f(\mathbb{R}^1)$, 可能是 T^2 的处处稠密的子集, 这时它将不是环面的一维子流形, 尽管它还是抽象一维子流形.

d) 如果对 n 维流形 M 的子集 S 中任一点 x_0, 都能找到流形 M 的局部图, 其有效域 U 含有 x_0, 且集合 $S \cap M$ 在图的参数域内对应于空间 $\mathbb{R}^n$ 的某个 k 维曲面, 就认为 $S \subset M$ 是 n 维流形 M 的 k 维子流形. 试验证, 这并没有改变原来的子流形概念的外延.

5. 设 X 是豪斯多夫拓扑空间 (流形), 而 G 是空间 X 的同胚变换群. 称群 G 为**空间 X 的离散变换群**, 如果对于任意两点 $x_1, x_2 \in X$ (也可能重合), 总存在它们各自的邻域 U_1, U_2, 使得集 $\{g \in G | g(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing\}$ 是有限集.

a) 由此推知, 对任何点 $x \in X$, 它的**轨道** $\{g(x) \in X | g \in G\}$ 是离散的, 而它的**稳定子** $G_x = \{g \in G | g(x) = x\}$ 是有限的.

b) 验证, 若 G 是距离空间 X 的等距变换群, 且具有 a) 中所给出的两个性质, 则 G 是 X 的离散变换群.

c) 试在离散群 G 的轨道的集合 X/G 上, 引入自然拓扑空间 (流形) 结构.

---

①米尔诺 (J. Milnor) (1931—) —— 最卓越的美国现代数学家之一, 他的主要工作在代数拓扑与拓扑流形两个方面.

d) 具离散变换群 G 的拓扑空间 (流形) 的闭子集 F 叫做*群 G 的基本域*, 如果它是 X 的开子集的闭包, 而且, 形如 $g(F)$ 的集合 $(g \in G)$ 两两不相交, 并构成空间 X 的局部有限的覆盖. 试说明, 在课文的例 8—10 中, 群 G 的商空间 (轨道) X/G 怎样借助 "粘合" 某些边界点从 F 做出.

6. a) 利用例 12,13 的结构, 建立 n 维实射影空间 $\mathbb{RP}^n$.

b) 试证, 当 n 为奇数时, $\mathbb{RP}^n$ 是可定向的; 若 n 是偶数, 则 $\mathbb{RP}^n$ 是不可定向的.

c) 验证, 流形 $SO(3,\mathbb{R})$ 与 $\mathbb{RP}^3$ 同胚.

7. 验证, 例 14 所建立的流形实际上与默比乌斯带同胚.

8. a) *李群*[①]是装备了那样的解析流形结构的群, 其中映射 $(g_1,g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2, g \mapsto g^{-1}$ 分别是 $G \times G$ 到 G 和 G 到 G 内的解析映射. 试证例 6,7 内所讨论的流形是李群.

b) *拓扑群* (或*连续群*) 是装备了那样的拓扑的群, 群的乘法及求逆运算, 作为 $G \times G \to G, G \to G$ 的映射, 关于在 G 中装备的拓扑连续. 以有理数群 $\mathbb{Q}$ 为例证明, 并非每个拓扑群都是李群.

c) 试证每个李群, 在 b) 中定义的意义下是拓扑群.

d) 已经证明[②], 任何拓扑群 G, 如果它是一个流形, 则必是李群 (即 G 作为流形, 有使群变成了李群的解析结构). 试证, 任何群流形 (即任何李群) 必是可定向的流形.

9. 拓扑空间的子集系叫做*局部有限的*, 假如空间的每个点, 都有一个只与集系中的有限多个集相交的邻域. 特别地可以谈论空间的局部有限覆盖.

称一集系*内接*在另一集系内, 假如第一个集系中的任意一个集, 至少包含在第二个集系的一个集中, 特别地, 可以谈论某集的一个覆盖内接在另一这样的覆盖中.

a) 试证, 在 $\mathbb{R}^n$ 的任何开覆盖内, 可内接一个 $\mathbb{R}^n$ 的局部有限覆盖.

b) 将 a) 中的 $\mathbb{R}^n$ 换成任意流形 M, 解所得的问题.

c) 试证, 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在从属于它的任何给定开覆盖的单位分解.

d) 验证, 断言 c) 对任意流形仍然成立.

§3 微分形式及其在流形上的积分

1. 流形在其一点的切空间

我们知道, 对于在时刻 t_0 通过点 $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ 的每个光滑道路 $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} x(t) \in \mathbb{R}^n$($\mathbb{R}^n$ 内的运动), 有瞬时速度向量 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$ 与之对应 $(\xi = \dot{x}(t_0) = (\dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)(t_0))$. 这些与点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 有关的向量 ξ 的集, 自然地与算术空间 $\mathbb{R}^n$ 等

①李 (M. S. Lie) (1842—1899) —— 著名的挪威数学家, 连续群 (李群) 的鼻祖; 罗巴切夫斯基国际奖的得奖者之一 (因将群论应用于几何论证于 1897 年获的奖) 现在, 李群在几何、拓扑及物理的数学方法中, 有根本的意义.

②这就回答了所谓希尔伯特第 5 问题.

同, 并记作 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ (或 $T_{x_0}(\mathbb{R}^n)$). 如同空间 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算, 在 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 中引进作用在元素 $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 上的相应的线性运算. 这样就产生了一个线性空间 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$, 称之为 $\mathbb{R}^n$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的**切空间**.

忘掉事情的原由和那些启发性的论述, 现在就可以说, 形式上 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 是由点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和与之相关的那个线性空间 $\mathbb{R}^n$ 组成的对 $(x_0, \mathbb{R}^n)$.

今设 M 是光滑的 n 维流形, 其图册 A 的光滑性不低于 $C^{(1)}$ 类. 我们要定义流形 M 在点 $p_0 \in M$ 处的切向量 ξ 与切空间 TM_{p_0}.

为此, 我们利用上面对切向量所作的运动瞬时速度解释. 在流形 M 上取一条在时刻 t_0 穿过点 $p_0 = p(t_0) \in M$ 的光滑道路 $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} p(t) \in M$, 流形 M 的图的参量 (即局部坐标) 用 x 表示, 在 x 的下角附上与图相应的角码, 而坐标分量号码写在 x 的右上角. 这样, 当图 (U_i, φ_i) 的有效域 U_i 包含点 p_0 时, 在它的参数域内, 道路 γ 对应于该参数域中的道路 $t \overset{\gamma_i}{\longmapsto} \varphi_i^{-1} \circ p(t) = x_i(t) \in \mathbb{R}^n(H^n)$, 根据光滑映射 $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} p(t) \in M$ 的定义, 它是光滑的.

这样, 在图 (U_i, φ_i) 的参数域内 (这里 φ_i 是映射 $p = \varphi_i(x_i)$), 产生了点 $x_i(t_0) = \varphi_i^{-1}(p_0)$ 及向量 $\xi_i = \dot{x}_i(t_0) \in T\mathbb{R}^n_{x_i(t_0)}$. 在其他的这样的图 (U_j, φ_j) 中, 相应地有点 $x_j(t_0) = \varphi_j^{-1}(p_0)$ 及向量 $\xi_j = \dot{x}_j(t_0) \in T\mathbb{R}^n_{x_j(t_0)}$. 自然认为, 这就是我们希望把它叫做流形在点 $p_0 \in M$ 处切向量 ξ 的东西在不同图中的坐标表示.

在坐标 x_i, x_j 之间, 有光滑互逆变换函数

$$x_i = \varphi_{ji}(x_j), x_j = \varphi_{ij}(x_i), \tag{1}$$

由此, 对 $(x_i(t_0), \xi_i), (x_j(t_0), \xi_j)$ 有以下关系:

$$x_i(t_0) = \varphi_{ji}(x_j(t_0)), x_j(t_0) = \varphi_{ij}(x_i(t_0)), \tag{2}$$

$$\xi_i = \varphi'_{ji}(x_j(t_0))\xi_j, \xi_j = \varphi'_{ij}(x_i(t_0))\xi_i. \tag{3}$$

等式 (3) 显然是从微分 (1) 式所得到的公式

$$\dot{x}_i(t) = \varphi'_{ji}(x_j(t)) \cdot \dot{x}_j(t), \dot{x}_j(t) = \varphi'_{ij}(x_i(t))\dot{x}_i(t).$$

推出来的.

定义 1 设 M 是光滑 n 维流形,$p \in M$ 对满足 $U_i \ni p$ 的任一局部图 (U_i, φ_i), 记其参数域中与 p 相应的点为 $x_i = \varphi_i^{-1}(p)$, 而 $\mathbb{R}^n$ 在 x_i 的切空间记作 $T\mathbb{R}^n_{x_i}$. 如果对每个这样的空间 $T\mathbb{R}^n_{x_i}$, 都确定了一个向量 $\xi_i \in T\mathbb{R}^n_{x_i}$, 而且关系式 (3) 成立, 则说定义了一个*流形M在点$p \in M$的切向量ξ*.

这样一来, 如果把映射 φ_{ji} 的雅可比矩阵的元素 φ'_{ji} 写成 $\dfrac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m}$ 的形式, 我们就得到了同一向量 ξ 的两种坐标表示的显式关系:

$$\xi_i^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m} \xi_j^m, k = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

这里的偏导数在 p 的对应点 $x_j = \varphi_j^{-1}(p)$ 处取值.

我们利用 TM_p 来记流形 M 在点 $p \in M$ 的一切切向量的集合.

定义 2　如果把 TM_p 与相应的空间 $T\mathbb{R}^n_{x_i}(TH^n_{x_i})$ 等同起来, 在 TM_p 上引入线性结构, 即把 TM_p 的向量之和看成那样一个向量, 它在 $T\mathbb{R}^n_{x_i}(TH^n_{x_i})$ 中的坐标表示等于各个加项的坐标表示的和. 向量乘以数的乘法, 也类似地定义, 那么, 这时所得到的线性空间, 通常记作 TM_p 或 $T_p(M)$, 并称之为*流形 M 在点 $p \in M$ 处的切空间*.

由公式 (3),(4) 看出, 在 TM_p 内所引入的线性结构, 与图的具体选择无关, 即在此意义下定义 2 是合理的.

于是, 我们定义了流形的切空间. 切向量与切空间可以有各种解释 (参看问题 1). 例如, 把切向量等同于线性泛函就是其中之一. 这种等同基于在 $\mathbb{R}^n$ 内观察到的以下事实.

每个向量 $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 相当于某个光滑道路 $x = x(t)$ 的速度向量, 即 $\xi = \dot{x}(t)|_{t=t_0}$, 同时 $x_0 = x(t_0)$. 这使我们能够定义给定在 $\mathbb{R}^n$ 上 (或点 x_0 的邻域内) 的光滑函数 f 在点 x_0 处沿向量 $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 的导数 $D_\xi f(x_0)$, 即

$$D_\xi f(x_0) := \frac{d}{dt}(f \circ x)(t)\bigg|_{t=t_0}, \tag{5}$$

或

$$D_\xi f(x_0) = f'(x_0)\xi, \tag{6}$$

这里 $f'(x_0)$ 是 f 在点 x_0 处的切映射 (f 的微分).

按公式 (5),(6) 由向量 $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 确定的泛函 $D_\xi : C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, 关于 f 显然是线性的. 由公式 (6) 也可看出, 量 $D_\xi f(x_0)$ 当固定了函数 f 时, 线性地依赖于 ξ, 即向量的和对应着相应的线性泛函之和, 而向量 ξ 与数相乘, 对应泛函乘以同一数. 因此, 在线性空间 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 与相应的线性泛函 D_ξ 的线性空间之间, 存在着同构. 剩下来的是, 指出线性泛函 D_ξ 的一组特征性质来确定它, 以便得到切空间 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 的新的, 当然是与已往的解释同构的解释.

我们注意到, 除了上面指出的线性性之外, 泛函 D_ξ 还具有以下的性质:

$$D_\xi(f \cdot g)(x_0) = D_\xi f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot D_\xi g(x_0) \tag{7}$$

这是乘积的微分规律.

在微分代数中, 环 A 的满足关系 $(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$ 的可加映射 $a \mapsto a'$ 叫做微分法(*确切的说, 叫环 A 的微分法*). 因此, 泛函 $D_\xi : C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是环 $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 的微分法. 但 D_ξ 关于空间 $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 的线性结构还是线性的.

可以验证, 任何线性泛函 $l : C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, 若具有性质

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$l(f \cdot g) = l(f)g(x_0) + f(x_0)l(g), \tag{9}$$

则它必有 D_ξ 的形式, 这里 $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$. 因此,$\mathbb{R}^n$ 在点 x_0 的切空间 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$, 能解释成在 $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 上满足条件 (8),(9) 的泛函 (微分法) 的线性空间.

与空间 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 的基向量 $e_1,\cdots,e_n$ 相应是计算函数 f 在点 x_0 的偏导数的泛函: $D_{e_k}f(x_0) = \left.\dfrac{\partial}{\partial x^k}f(x)\right|_{x=x_0}$. 因此, 在空间 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 的泛函解释下, 可以说泛函 $\left.\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}\right|_{x=x_0}$ 构成了 $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ 的基底.

若 $\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^n)\in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, 则对应于向量 ξ 的算子 D_ξ 具有 $D_\xi=\xi^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ 的形式.

完全类似地, $C^{(\infty)}$ 类 n 维流形 M 在点 $p_0\in M$ 的切向量 ξ 能解释成 (或定义为) 在 $C^{(\infty)}(M,\mathbb{R})$ 上具有性质 (8),(9) 的微分法 l 的空间的元素. 当然, 这时在关系式 (9) 中的 x_0, 要代之以 p_0. 从而这个泛函 l 也就与点 $p_0\in M$ 有关. 切向量 ξ 与切空间 TM_p 的这种定义, 形式上不需要引用局部坐标表示, 显然在这个意义下, 它是不变的. 算子 l 在局部图 (U_i,φ_i) 的坐标 $(x_i^1,\cdots,x_i^n)$ 下, 有 $\xi_i^1\dfrac{\partial}{\partial x_i^1}+\cdots+\xi_i^n\dfrac{\partial}{\partial x_i^n}=D_{\xi_i}$ 的形式. 数组 $(\xi_i^1,\cdots,\xi_i^n)$ 自然叫做切向量 $l\in TM_{p_0}$ 在图 (U_i,φ_i) 的坐标下的坐标. 同一泛函 $l\in TM_{p_0}$ 在图 (U_i,φ_i) 和 (U_j,φ_j) 中的坐标表示, 根据微分规律, 满足关系

$$\sum_{k=1}^n \xi_i^k\frac{\partial}{\partial x_i^k}=\sum_{m=1}^n \xi_j^m\frac{\partial}{\partial x_j^m}=\sum_{k=1}^n\left(\sum_{m=1}^n\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m}\xi_j^m\right)\frac{\partial}{\partial x_i^m}, \tag{4'}$$

它自然是重现了关系式 (4).

2. 流形上的微分形式

现在, 我们来讨论与切空间 TM_p 共轭的空间 T^*M_p, 亦即, 空间 T^*M_p 是 TM_p 上的实线性泛函的空间.

定义 3 与流形 M 在点 $p\in M$ 处的切空间 TM_p 共轭的空间 T^*M_p, 叫做流形 *M 在点 p 的余切空间*.

若流形 M 是 $C^{(\infty)}$ 类的,$f\in C^{(\infty)}(M,\mathbb{R})$, 而 l_ξ 是与向量 ξ 对应的微分法, 则对固定函数 $f\in C^{(\infty)}(M,\mathbb{R})$, 映射 $\xi\mapsto l_\xi f$ 显然是空间 T^*M_p 的元. 在 $M=\mathbb{R}^n$ 的情况, 得 $\xi\mapsto D_\xi f(p)=f'(p)\xi$, 所以, 所建立的映射 $\xi\mapsto l_\xi f$, 自然被称为函数 f 在点 p 处的微分, 通常记作 $df(p)$.

如果 $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$(或 $TH^n_{\varphi^{-1}_{\alpha(p)}}$, 当 $p\in\partial M$ 时) 是在流形 M 的图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 内与切空间 TM_p 相对应的空间, 则与 $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ 共轭的空间 $T^*\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, 自然认为在此局部图内的描绘 (表现)了 T^*M_p. 在局部图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的坐标 $(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$ 下, 与空间 $T\mathbb{R}^n_{\varphi^{-1}(p)}$(或 $TH^n_{\varphi^{-1}(p)}$ 当 $p\in\partial M$) 的基底 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$ 相对应在共轭空间内

有与其共轭的基底 $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$.(我们知道, $dx^i(\xi) = \xi^i$, 所以 $dx^i\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$. 这些共轭基底在另外一个图 (U_β, φ_β) 内的表达式, 可能并不这么简单, 因为, $\dfrac{\partial}{\partial x^j_\beta} = \dfrac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\dfrac{\partial}{\partial x^i_\alpha}, dx^i_\alpha = \dfrac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}dx^j_\beta$.)

定义 4 称 ω^m 是 n 维光滑流形 M 上的 m *次微分形式*, 如果在 M 的每个切空间 TM_p 上 $(p \in M)$, 定义了斜对称形式 $\omega^m(p) : (TM_p)^m \to \mathbb{R}$.

实际上这不过是, 在流形 M 的图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 内, 与空间 TM_p 相对应的每个空间 $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$(或 $TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$) 中, 给出了对应的 m- 形式 $\omega_\alpha(x_\alpha)$, 这里 $x_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(p)$. 于是, 两个这样的形式 $\omega_\alpha(x_\alpha), \omega_\beta(x_\beta)$ 是同一形式 $\omega(p)$ 的表达式的事实, 用关系式

$$\omega_\alpha(x_\alpha)((\xi_1)_\alpha, \cdots, (\xi_m)_\alpha) = \omega_\beta(x_\beta)((\xi_1)_\beta, \cdots, (\xi_m)_\beta) \tag{10}$$

表示, 其中 x_α, x_β 分别在图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 内表示点 $p \in M$, 而 $(\xi_1)_\alpha, \cdots, (\xi_m)_\alpha, (\xi_1)_\beta, \cdots, (\xi_m)_\beta$ 分别在图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 内表示向量 $\xi_1, \cdots, \xi_m \in TM_p$.

把所说的这些形式化地写出来, 就是

$$x_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}(x_\beta), x_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha), \tag{2'}$$

$$\xi_\alpha = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\beta)\xi_\beta, \xi_\beta = \varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)\xi_\alpha, \tag{3'}$$

这里, 像通常那样,$\varphi_{\beta\alpha}$ 及 $\varphi_{\alpha\beta}$ 分别是坐标变换函数 $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta, \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$, 而它们的切映射 $\varphi'_{\beta\alpha} =: (\varphi_{\beta\alpha})_*, \varphi'_{\alpha\beta} =: (\varphi_{\alpha\beta})_*$ 实现了 $\mathbb{R}^n(H^n)$ 在点 x_α, x_β 处的切空间的同构. 正如 §1 第 3 段所说, 这时共轭映射 $(\varphi'_{\beta\alpha})^* =: \varphi^*_{\beta\alpha}, (\varphi'_{\alpha\beta})^* =: \varphi^*_{\alpha\beta}$ 实现形式的转移, 而关系式 (10) 的确切表示是

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \varphi^*_{\alpha\beta}(x_\alpha)\omega_\beta(x_\beta), \tag{10'}$$

这里 α, β 是平权的指标 (可以互换位置).

已知映射 $\varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ 的矩阵 $(c^j_i), (c^j_i) = \left(\dfrac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}\right)(x_\alpha)$ 因此, 如果

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_m} dx^{i_1}_\alpha \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}_\alpha \tag{11}$$

且

$$\omega_\beta(x_\beta) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_m \leqslant n} b_{j_1 \cdots j_m} dx^{j_1}_\beta \wedge \cdots \wedge dx^{j_m}_\beta, \tag{12}$$

则根据 §1 中的公式 (30) 得

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} a_{i_1\cdots i_m}dx_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{i_m}$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_m\leqslant n}} b_{j_1\cdots j_m}\frac{\partial(x_\beta^{j_1},\cdots,x_\beta^{j_m})}{\partial(x_\alpha^{i_1},\cdots,x_\alpha^{i_m})}(x_\alpha)dx_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{i_m}, \tag{13}$$

这里 $\dfrac{\partial(\ )}{\partial(\ )}$ 照例是表示由相应的偏导数构成的矩阵的行列式.

这样, 同一形式 ω 的各种坐标表示, 可由变量的直接代换从一个得到另一个 (打开相应的坐标微分并根据外积规则进行后边的代数变换).

如果约定形式 ω_α 是定义在流形上的形式 ω 到图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的参数域中的转移, 那么, 显然有 $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega$, 并且认为 $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\circ(\varphi_\beta^{-1})^*\omega_\beta=\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$, 这里, 在给定的情况下的复合映射 $\varphi_\alpha^*\circ(\varphi_\beta^{-1})^*$ 起着把映射 $\varphi_{\alpha\beta}^*=(\varphi_\beta^{-1}\circ\varphi_\alpha)^*$ 在形式上加以具体化的作用.

定义 5 称 n 维流形 M 上的 m 次微分形式 ω属于 $C^{(k)}$ 光滑类, ($C^{(k)}$ 光滑微分形式) 如果在给出 M 上光滑结构的图册的任何图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 内, 它的坐标表示

$$\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} a_{i_1\cdots i_m}(x_\alpha)dx_\alpha^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_\alpha^{i_m}$$

的系数 $a_{i_1\cdots i_m}(x_\alpha)$ 都是 $C^{(k)}$ 类函数.

由公式 (13) 可见, 假如流形本身有 $C^{(k+1)}$ 类的光滑性, 例如, 当 M 是 $C^{(\infty)}$ 流形时, 定义 5 是合理的.

对于在流形上给出的微分形式, 以自然的方式 (逐点地) 定义加法, 数乘及外积运算 (特别地, 乘以函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 按定义, 函数是零次形式). 其中前两种运算, 把 M 上的 $C^{(k)}$ 类 m- 形式的集合 Ω_k^m 变为线性空间. 当 $k=\infty$ 时, 通常把这个线性空间记作 Ω^m. 显然, 形式 $\omega^{m_1}\in\Omega_k^{m_1}$ 和 $\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_2}$ 的外积是形式 $\omega^{m_1+m_2}=\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_1+m_2}$.

3. 外微分

定义 6 把具有以下三条性质的线性算子 $d:\Omega_k^m\to\Omega_{k-1}^{m+1}$ 叫做外微分:

1° $d:\Omega_k^0\to\Omega_{k+1}^1$ 作用在任何函数 $f\in\Omega_k^0$ 上, 与将此函数作普通微分 df 一样.

2° $d(\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2})=d\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2}+(-1)^{m_1}\omega^{m_1}\wedge d\omega^{m_2}$, 这里 $\omega^{m_1}\in\Omega_k^{m_1},\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_2}$.

3° $d^2:=d\circ d=0$.

最后这个等式表示的是, 对任何形式 ω, 形式 $d(d\omega)$ 是零形式.

因此, 条件 3° 的存在, 表明将只考察光滑度不能低于 $C^{(2)}$ 类的形式.

实践上, 这意味着考察的是 $C^{(\infty)}$ 流形, 而 d 是把 Ω^m 映入 Ω^{m+1} 内的算子.

在具体图的局部坐标下, 算子 d 的计算公式 (同时还有算子 d 的唯一性), 可由以下关系式得出:

$$\begin{aligned} &d\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} c_{i_1\cdots i_m}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_m}\right)\\ &=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} dc_{i_1\cdots i_m}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_m}\\ &\quad+\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n} c_{i_1\cdots i_m}d(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_m})=0\right) \end{aligned} \tag{14}$$

现在, 算子 d 的存在性, 可由以下事实推出: 在局部坐标系中用 (14) 式定义的算子, 满足定义 6 的条件 1°,2°,3°.

特别地, 从上面所说的可以推知, 如果 $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega$, 及 $\omega_\beta=\varphi_\beta^*\omega$ 是同一个形式 ω 的坐标表示, 即 $\omega_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$, 那么, $d\omega_\alpha$ 与 $d\omega_\beta$ 也是同一形式 $(d\omega)$ 的坐标表示, 即 $d\omega_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^*d\omega_\beta$. 因此, 关系式 $d(\omega_{\alpha\beta}^*\omega_\beta)=\varphi_{\alpha\beta}^*(d\omega_\beta)$ 成立, 它的抽象写法就是算子 d 与形式的转移运算 φ^* 的交换性:

$$d\varphi^*=\varphi^*d. \tag{15}$$

4. 形式在流形上的积分

定义 7　设 M 是 n 维光滑定向流形, 在它上边的坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 和定向由具参数域 $D_n\subset\mathbb{R}^n$ 的一个图 $\varphi_x:D_x\to M$ 确定. 设 ω 是 M 上的 n- 形式, 而 $a(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 是它在区域 D_x 上的坐标表示. 这时

$$\int_M\omega:=\int_{D_x}a(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n, \tag{16}$$

其中左边是被定义的形式 ω 沿定向流形 M 的积分, 而右端是函数 $a(x)$ 沿区域 D_x 的积分.

若 $\varphi_t:D_t\to M$ 是另一个由一张图组成的 M 的图册, 它在 M 上给出的定向与由图册 $\varphi_x:D_x\to M$ 给出的定向是一样的，那么，坐标变换函数 $x=\varphi(t)$ 的雅可比 $\det\varphi'(t)$, 在区域 D_t 内处处为正,D_t 内与形式 ω 对应的形式是

$$\varphi^*(a(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)=a(x(t))\det\varphi'(t)dt^1\wedge\cdots\wedge dt^n$$

根据重积分的变量替换定理, 等式

$$\int_{D_x}a(x)dx^1\cdots dx^n=\int_{D_t}a(x(t))\det\varphi'(t)dt^1\cdots dt^n$$

成立. 它说明了关系式 (16) 的左端与在 M 上所取的坐标系无关. 因此, 定义 7 合理.

定义 8 设 ω 是流形 M 上的形式. 我们把 M 中使 $\omega(x) \neq 0$ 的点的集的闭包叫做*形式 ω 的支集*..

用 $\mathrm{supp}\omega$ 表示形式 ω 的支集, 在 0- 形式的情形, 即 ω 是函数时, 我们曾遇到过这一概念, 在形式支集之外, 在任何局部坐标下, 形式的坐标表示是与给定形式次数相同的零形式.

定义 9 在流形 M 上给出的形式 ω 叫做*具紧支集的形式*, 假如 $\mathrm{supp}\omega$ 是 M 中的紧集.

定义 10 设 ω 是 n 维光滑流形 M 上的具紧支集的 n 次形式,M 由图册 A 定向. 又设 $\varphi_i : D_i \to U_i, \{(U_i, \varphi_i), i = 1, \cdots, m\}$ 是图册 A 的有限多个图构成的有限图组, 其有效域 $U_1, \cdots, U_m$ 覆盖 $\mathrm{supp}\omega$, 而 $e_1, \cdots, e_k$ 是从属于这个覆盖的 $\mathrm{supp}\omega$ 上的单位分解. 把某些图重复若干次, 即可认为 $m = k$ 且 $\mathrm{supp} e_i \subset U_i, i = 1, \cdots, m$.

称

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \varphi_i^*(e_i\omega) \tag{17}$$

为*具紧支集的形式 ω 沿定向流形 M 的积分*; 这里 $\varphi_i^*(e_i\omega)$ 是在相应的局部图的坐标变化区域 D_i 内, 形式 $e_i\omega|_{U_i}$ 的坐标表示.

我们来证明这定义的合理性.

◀ 设 $\widetilde{A} = \{\widetilde{\varphi}_j : \widetilde{D}_j \to \widetilde{U}_j\}$ 是在 M 上给定的与图册 A 具有同样的光滑结构及定向的另一个图册, 并设 $\widetilde{U}_1, \cdots, \widetilde{U}_{\widetilde{m}}, \widetilde{e}_1, \cdots, \widetilde{e}_{\widetilde{m}}$ 是 $\mathrm{supp}\omega$ 的相应的覆盖以及从属于它的 $\mathrm{supp}\omega$ 上的单位分解. 引入函数 $f_{ij} = e_i\widetilde{e}_j, i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, \widetilde{m}$, 并令 $\omega_{ij} = f_{ij}\omega$.

注意,$\mathrm{supp}\omega_{ij} \subset W_{ij} = U_i \cap \widetilde{U}_j$. 由此, 并根据沿由一个图给定的定向流形的积分定义 7 的合理性得到

$$\int_{D_i} \varphi_i^*(\omega_{ij}) = \int_{\varphi_i^{-1}(W_{ij})} \varphi_i^*(\omega_{ij}) = \int_{\widetilde{\varphi}_j^{-1}(W_{ij})} \widetilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}) = \int_{\widetilde{D}_j} \widetilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}).$$

将这些等式关于 i 从 1 到 m, 关于 j 从 1 到 $\widetilde{m}$ 求和, 并注意 $\sum\limits_{i=1}^{m} f_{ij} = \tilde{e}_j, \sum\limits_{j=1}^{\tilde{m}} f_{ij} = e_i$, 就能得到我们所需要的恒等式. ▶

5. 斯托克斯公式

定理 *设 M 是定向光滑 n 维流形, 而 ω 是 M 上具紧支集的 $n-1$次光滑微分形式. 则成立*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega, \tag{18}$$

其中流形 M 的边界 ∂M 的定向取得与 M 的定向和谐. 若 $\partial M = \varnothing$, 则 $\int_M d\omega = 0$.

◀ 不失一般性可以认为, 流形 M 的所有局部图的坐标 (参数) 的变化区域, 或者是开的方体 $I=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^i<1, i=1,\cdots,n\}$, 或者是对方体 I 加上一个 (确定的!) 面而成的方体 $\tilde{I}=\{x\in\mathbb{R}^n|0<x^1\leqslant 1\wedge 0<x^i<1, i=2,\cdots,n\}$.

借助单位分解, 定理的论断可归结为 $\operatorname{supp}\omega$ 包含在一张形如 $\varphi: I\to U$ 或 $\varphi:\tilde{I}\to U$ 的图的有效域 U 内. 形式 ω 在这张图的坐标下的表达式是

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

这里的符号 "$\frown$" 照例表示这个因子空缺.

由于积分是线性的, 所以只要对和中的一项

$$\omega_i=a_i(x)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n \tag{19}$$

来证明我们的断言即可. 这个形式的微分是 n- 形式

$$d\omega_i=(-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n. \tag{20}$$

对于形如 $\varphi: I\to U$ 的图, 形式 (19),(20) 在 (18) 内的两个积分都等于零: 第一个等于零是因为 $\operatorname{supp}a_i\subset I$; 而如果考虑到富比尼定理及关系 $\int_0^1\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^i=a_i(1)-a_i(0)=0$, 则根据同样的理由, 得到第二个积分也等于零. 这就把 $\partial M=\varnothing$ 的情况一并都解决了.

因此, 剩下的是对图 $\varphi:\tilde{I}\to U$ 验证 (18) 式.

如果 $i>1$, 则对于这样的图, 从上述推理得, 两个积分也都等于零.

而如果 $i=1$, 则

$$\begin{aligned}\int_M\omega_1=\int_U\omega_1&=\int_{\tilde{I}}\frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)dx^1\cdots dx^n\\&=\int_0^1\cdots\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)dx^1\right)dx^2\cdots dx^n\\&=\int_0^1\cdots\int_0^1 a_1(1,x^2,\cdots,x^n)dx^2\cdots dx^n\\&=\int_{\partial U}\omega_1=\int_{\partial M}\omega_1.\end{aligned}$$

因此, 在 $n>1$ 情况证明了公式 (18).

当 $n=1$ 时, 只要把定向线段 $[\alpha,\beta]$ 的端点 α,β 表做 α_- 与 β_+, 并令 0- 形式 $g(x)$ 沿此定向点的积分分别为 $-g(\alpha)$ 与 $+g(\beta)$, 那么, 这种情况就是牛顿 – 莱布尼茨公式. ▶

对于刚才证明的定理做几个注释.

注 1 在定理的叙述中, 对流形 M 及形式 ω 的光滑程度什么都没说. 在这种情况下, 通常就表示这些对象的光滑度是 $C^{(\infty)}$. 但由定理的证明显然可见, 当流形 M 及形式 ω 的光滑度都是 $C^{(2)}$ 时, 定理就成立.

注 2 由定理的证明, 还可从公式 (18) 本身看出, 如果 $\mathrm{supp}\omega$ 是严格位于 M 内 (即 $\mathrm{supp}\omega \cap \partial M = \varnothing$) 的紧集, 则 $\int_\omega d\omega = 0$.

注 3 若 M 是紧流形, 则对 M 上的任何形式 ω, 其支集 $\mathrm{supp}\omega$, 作为紧集 M 的闭子集, 仍然是紧集. 因此, 这时 M 上的任何形式都是具紧支集的, 且等式 (18) 成立. 特别地, 当 M 是没有边界的紧流形时, 对于 M 上的任何光滑形式, 必有等式 $\int_M d\omega = 0$ 成立.

注 4 设流形 M 本身不是紧的, 则对于 M 上的非紧支的形式 ω, 公式 (18) 一般来说不再成立.

例如, 在标准笛卡儿坐标下, 考察定义在圆环 $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$ 内的大家熟知的形式 $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, 这时,$M$ 是紧的二维定向流形, 它的边界 ∂M 由两个圆周 $C_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = i\}$ 组成,$i = 1, 2$. 因为 $d\omega = 0$, 所以据公式 (18) 得到

$$0 = \int_M d\omega = \int_{C_2} \omega - \int_{C_1} \omega,$$

这里圆周 C_1 与 C_2 都是沿着逆时针方向运行的. 我们知道

$$\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega = 2\pi \neq 0.$$

这就是说, 如果代替 M 而来考察 $\widetilde{M} = M \backslash C_1$, 则 $\partial\widetilde{M} = C_2$, 且

$$\int_{\widetilde{M}} d\omega = 0 \neq 2\pi = \int_{\partial\widetilde{M}} \omega.$$

练 习

1. a) 称光滑流形 M 上的两条光滑道路 $\gamma_i : \mathbb{R} \to M, i = 1, 2$, 在点 $p \in M$ *相切*, 如果 $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, 且在有效域 U 包含 p 的每个图 $\varphi : \mathbb{R}^n(H^n) \to U$ 的局部坐标系中, 成立关系式

$$|\varphi^{-1} \circ \gamma_1(t) - \varphi^{-1} \circ \gamma_2(t)| = o(t), \text{ 当 } t \to 0. \tag{21}$$

试证, 如果等式 (19) 在上面说的一个坐标系内成立, 那么, 它在光滑流形 M 的其他这样的局部坐标系内也成立.

b) 道路在点 p 相切这个性质, 是 M 上通过该点的光滑道路之集合上的等价关系. 按照这种关系组成的等价类, 叫做*在点 $p \in M$ 处的切径束*,试建立 §3 第 1 段中所设想的空间 TM_p 的向量与在点 $p \in M$ 处的切径束之间的一一对应关系.

c) 试证, 如果道路 γ_1, γ_2 在点 $p \in M$ 相切, 而 $f \in C^{(1)}(M, \mathbb{R})$, 则

$$\frac{df \circ \gamma_1}{dt}(0) = \frac{df \circ \gamma_2}{dt}(0).$$

d) 试指出, 对于每个向量 $\xi \in TM_p$, 具有性质 (8),(9) 的泛函 $l = l_\xi (= D_\xi) : C^{(\infty)}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是怎样与之对应的, 这里 $x_0 = p$. 具有这些性质的泛函, 叫做**在点 $p \in M$ 的微分法**.

验证, 在点 p 的微分法 l 是局部算子, 即若 $f_1, f_2 \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ 且在点 p 的某邻域内 $f_1(x) \equiv f_2(x)$, 则 $lf_1 = lf_2$.

e) 试证, 若 $x^1, \cdots, x^n$ 是点 p 的邻域内的局部坐标, 则 $l = \sum\limits_{i=1}^{n} (lx_i) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, 其中 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 是在点 x 处对 x^i 的偏导数运算,x 是与点 p 对应的点. (**提示**: 用局部坐标写出函数 $f|_{U(p)} : M \to \mathbb{R}$. 注意, 对于函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 成立分解式 $f(x) = f(0) + \sum\limits_{i=1}^{n} x^i g_i(x)$, 这里 $g_i \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 且 $g_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(0), i = 1, \cdots, n$).

f) 验证, 若 M 是 $C^{(\infty)}$ 类流形, 则在点 $p \in M$ 处微分法的线性空间, 与本节第 1 段内 M 在 p 点的切空间 TM_p 同构.

2. a) 若在光滑流形 M 的每点 $p \in M$ 处, 固定一向量 $\xi(p) \in TM_p$, 就说在流形 M 上给出了一个**向量场**. 设 X 是流形 M 上的向量场. 因为根据前面的练习, 任何向量 $X(p) = \xi \in TM_p$都可解释成在对应点 p 处的微分法, 所以对于任何函数 $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, 可以做出一个函数 $Xf(p)$, 它在任意点 p 处的值, 就是 $X(p)$ 对 f 作用的值, 即 f 沿场 X 的向量 $X(p)$ 的微分值. M 上的场 X 叫做 **$C^{(\infty)}$ 类光滑的**, 如果对于任何函数 $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, 函数 Xf 也属于 $C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ 类.

试给出向量场的局部坐标写法, 以及等价于前边在光滑流形上引进的 ($C^{(\infty)}$ 类) 光滑向量场的用坐标形式写出的定义.

b) 设 X, Y 是流形 M 上的两个光滑向量场. 对于函数 $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, 建立泛函: $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$. 试验证, $[X, Y]$ 也是 M 上的光滑向量场, 叫做**向量场 X, Y 的泊松括号**.

c) 试在流形上的光滑向量场中建立李代数结构.

3. a) 设 X 与 ω 是光滑流形 M 上的光滑向量场与光滑 1- 形式. 令 ωX 表示将 ω 作用于场 X, 在流形 M 的相应点处的向量. 试证, ωX 是 M 上的光滑函数.

b) 考虑到练习 2, 证明下面的关系式成立

$$d\omega^1(X, Y) = X(\omega^1 Y) - Y(\omega^1 X) - \omega^1([X, Y]),$$

其中 X, Y 是光滑向量场, $d\omega^1$ 是形式 ω^1 的微分, $d\omega^1(X, Y)$ 表示将 $d\omega^1$ 作用在同一点处场 X, Y 的向量对上.

c) 验证, 在 ω 是 m 次形式的一般情况下, 下面的关系式成立

$$\begin{aligned}&d\omega(X_1,\cdots,X_{m+1})\\=&\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{m+1})\\&+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,\widehat{X_j},\cdots,X_{m+1})\end{aligned}$$

这里记号 "⌢" 表示空项, $[X_i,X_j]$ 是场 X_i,X_j 的泊松括号, 而 $X_i\omega$ 是函数 $\omega(X_1,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_{m+1})$ 沿场 X_i 的向量作微分. 因为泊松括号是定义不变的, 所以, 得到的关系式可以看作是外微分算子 $d:\Omega\to\Omega$ 的相当复杂, 但不变的定义.

d) 设 ω 是光滑 n 维流形 M 上的光滑 m- 形式. 设 $(\xi_1,\cdots,\xi_m)_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内的一组向量, 它们在图 $\varphi_i:\mathbb{R}^n\to U\subset M$ 下对应于向量 $\xi_1,\cdots,\xi_m\in TM_p$. 用 Π_i 记由 $\mathbb{R}^n$ 内的向量 $(\xi_1,\cdots,\xi_m)_i$ 构成的平行多面体, $\lambda\Pi_i$ 是向量 $(\lambda\xi_1,\cdots,\lambda\xi_m)_i$ 所张成的平行多面体. 这些平行多面体在 M 中的像 $\varphi(\Pi_i),\varphi(\lambda\Pi_i)$ 分别用 $\Pi,\lambda\Pi$ 表示. 试证

$$d\omega(p)(\xi_1,\cdots,\xi_{m+1})=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^{m+1}}\int_{\partial(\lambda\Pi)}\omega.$$

4. a) 设 $f:M\to N$ 是 m 维光滑流形 M 到 n 维光滑流形 N 内的光滑映射. 试利用流形的切向量的切径束解释 (参看练习 1), 建立由 f 诱导出的映射 $f_*(p):TM_p\to TN_{f(p)}$.

b) 试证映射 f_* 是线性的, 并把它用流形 M 与 N 相应的局部坐标写出来, 说明为什么把 $f_*(p)$ 叫做映射 f 在点 p 处的微分, 或 f 在此点处的切映射.
设f是微分同胚. 试验证, $f_*[X,Y]=[f_*X,f_*Y]$. 这里是M上的向量场, 而 $[\cdot,\cdot]$ 是它们的泊松括号 (参看练习2).

c) 由 §1 已知, 切空间中的切映射 $f_*(p):TM_p\to TN_{q=f(p)}$ 产生共轭空间中的共轭映射 $f^*(p)$, 一般来说, 这里的共轭空间是定义在空间 $TN_{f(p)}$ 与 TM_p 上 k- 形式的空间.
设 ω 是 N 上的 k- 形式; M 上的 k- 形式 $f^*\omega$ 由以下关系定义:

$$(f^*\omega)(p)(\xi_1,\cdots,\xi_k):=\omega(f(p))(f_*\xi_1,\cdots,f_*\xi_k),$$

这里 $\xi_1,\cdots,\xi_k\in TM_p$. 于是产生了映射 $f^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$, 这是从 N 上 k- 形式的空间 $\Omega^k(N)$ 到 M 上 k- 形式的空间 $\Omega^k(M)$ 内的映射.

设 M,N 都是 $C^{(\infty)}$ 类光滑流形. 试验证映射 f^* 有以下的性质:

1° f^* 是线性映射;

2° $f^*(\omega_1\wedge\omega_2)=f^*\omega_1\wedge f^*\omega_2$;

3° $d\circ f^*=f^*\circ d$, 即 $d(f^*\omega)=f^*(d\omega)$;

4° $(f_2\circ f_1)^*=f_1^*\circ f_2^*$.

d) 设 M,N 都是 n 维光滑定向流形, 而 $\varphi:M\to N$ 是 M 到 N 上的微分同胚. 试证, 若 ω 是 N 上具有紧支集的 n- 形式, 则

$$\int_{\varphi(M)}\omega=\varepsilon\int_M\varphi^*\omega,$$

这里 $\varepsilon = \begin{cases} 1, & 当\ \varphi\ 保持定向; \\ -1, & 当\ \varphi\ 改变定向. \end{cases}$

e) 设 $A \supset B$. 映射 $i: B \to A$, 把每点 $\lambda \in B$ 对应到集 A 内的此点本身, 就说 i 是 B 到 A 内的**典型嵌入**.

若 ω 是流形 M 上的形式, 而 M' 是 M 的子流形, 则由典型嵌入 $i: M' \to M$ 在 M' 上产生的形式 $i^*\omega$ 叫做**形式 ω 在 M' 上的约束或限制**. 试证斯托克斯公式 (18) 的正规写法应是

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega,$$

其中 $i: \partial M \to M$ 是 ∂M 到 M 内的典型嵌入, 而在 ∂M 上所取的定向是与 M 的定向和谐的定向.

5. a) 设 M 是 n 维定向 $C^{(\infty)}$ 光滑流形, $\Omega_c^n(M)$ 是在 M 上具紧支集的 $C^{(\infty)}$ 光滑 n- 形式的空间. 试证, 存在唯一的映射 $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$, 具有以下的性质:

$1°$ 映射 $\int_M$ 是线性的;

$2°$ 如果 $\varphi: I^n(\tilde{I}^n) \to U \subset M$ 是 M 的定向图册中的一个图, $\operatorname{supp}\omega \subset U$, 且在这个图的局部坐标 $x^1, \cdots, x^n$ 下有 $\omega = a(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 则

$$\int_M \omega = \int_{I^n(\tilde{I}^n)} a(x)dx^1 \cdots dx^n,$$

此式右边是函数 a 沿方体 $I^n(\tilde{I}^n)$ 的黎曼积分.

b) 上面所指出的映射, 是不是总能延拓成定义在 (M 上所有光滑 n- 形式的空间) $\Omega^n(M)$ 上, 且具有同样性质的映射 $\int_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$?

c) 试利用以下这两个事实 (参看 §2 练习 9): "从流形 M 的任何开覆盖中, 可选出至多可数的 M 的局部有限覆盖" 及 "对 M 上的这种覆盖存在从属于此覆盖的单位分解", 定义 n- 形式沿定向光滑 n 维 (不一定紧) 流形的积分, 使它对积分取有限值的那些形式具有上面指出的性质 $1°, 2°$. 试证, 对此积分, 公式 (18) 一般不再成立, 并在 $M = \mathbb{R}^n$ 及 $M = H^n$ 情况, 给出一个保证公式 (18) 成立的加在 ω 上的充分条件.

6. a) 利用微分方程 $\dot{x} = v(x)$ 的解的存在性与唯一性, 及对于初始条件的光滑依赖性证明, $\mathbb{R}^n$ 内的光滑有界向量场 $v(x)$ 可以看做是稳定流的速度场. 准确地说, 就是证明存在这样的光滑依赖于参数 (时间) t 的微分同胚族 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, 使对于固定的值 $x \in \mathbb{R}^n, \varphi_t(x)$ 是我们方程的积分曲线, 即 $\dfrac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = v(\varphi_t(x))$, 并且 $\varphi_0(x) = x$. 显然, 映射 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 刻画的是介质质点在时段 t 内的位移. 试验证映射族 $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是单参数的同胚群, 即 $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}, \varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_2+t_1}$.

b) 设 v 是 $\mathbb{R}^n$ 内的向量场, 而 φ_t 是 $\mathbb{R}^n$ 中由场 v 产生的单参数同胚群. 验证: 对任何光滑函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, 成立如下关系式

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\varphi_t(x)) - f(x)) = D_{v(x)}f.$$

如果引用练习 2 的记号 $v(f) := D_v f$, 而且记得 $f \circ \varphi_t =: \varphi_t^* f$, 就能得出

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^* f - f)(x) = v(f)(x).$$

c) 现在自然也能给出 $\mathbb{R}^n$ 内的任意次光滑流形沿着场 v 的微分的定义, 即令

$$v(\omega)(x) := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_t^*\omega - \omega)(x)$$

形式 $v(\omega)$ 叫做形式 ω 沿场 v 的李导数, 常常用专门的记号 $L_v\omega$ 表示它. 设 X 是任意光滑流形 M 上的场, 试定义形式 ω 沿着 X 的李导数 $L_X\omega$.

d) 试证在 $C^{(\infty)}$ 流形 M 上, 李导数具有以下性质:

1° L_X 是局部运算, 即若在点 $x\in M$ 的一个邻域 $U\subset M$ 内, 场 X_1, X_2 和形式 ω_1, ω_2 分别相同, 则 $(L_{X_1}\omega_1)(x) = (L_{X_2}\omega_2)(x)$.

2° $L_X\Omega^k(M)\subset\Omega^k(M)$.

3° $L_X:\Omega^k(M)\to\Omega^k(M)$ 是线性映射, $k=0,1,2,\cdots$.

4° $L_X(\omega_1\wedge\omega_2) = (L_X\omega_1)\wedge\omega_2 + \omega_1\wedge L_X\omega_2$.

5° 若 $f\in\Omega^0(M)$, 则 $L_Xf = df(X) =: Xf$.

6° 若 $f\in\Omega^0(M)$, 则 $L_Xdf = d(Xf)$.

e) 验证, 由上面的性质 1°—6°, 能唯一地确定算子 L_X

7. 设 M 是光滑流形, X 是 M 上的向量场, 而 ω 是 M 上的 k 次形式.

用关系式 $(i_X\omega)(X_1,\cdots,X_{k-1}) := \omega(X, X_1,\cdots,X_{k-1})$ 确定的 $(k-1)$ 形式, $i_X\omega$, 也记作 $X\lrcorner\omega$, 叫做场 X 与形式 ω 的内积, 其中 $X_1,\cdots,X_{k-1}$ 是 M 上的向量场. 对于 o- 形式 (即 M 上的函数) 令 $X\lrcorner f = 0$

a) 试证, 若在图 $\varphi:\mathbb{R}^n\to U\subset M$ 的局部坐标 $x^1,\cdots,x^n$ 下, 形式 ω (确切的记法是 $\omega|_U$) 的表达式是 $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1\cdots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} = \frac{1}{k!}a_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$, 而 $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $i_X\omega = \frac{1}{(k-1)!}X^ia_{ii_2\cdots i_k}dx^{i_2}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$.

b) 再验证: 如果 $df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$, 则 $i_Xdf = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i} = X(f)\equiv D_Xf$.

c) 设 $X(M)$ 是流形 M 上向量场空间, 而 $\Omega(M)$ 是 M 上的斜对称形式环. 试证, 只存在一个映射 $i: X(M)\times\Omega(M)\to\Omega(M)$ 具有以下的性质:

1° i 是局部运算, 即若场 X_1, X_2 及形式 ω_1,ω_2 分别在点 $x\in M$ 的一个邻域内一致, 则 $(i_{X_1}\omega_1)(x) = (i_{X_2}\omega_2)(x)$;

2° $i_X(\Omega^k(M))\subset\Omega^{k-1}(M)$;

3° $i_X:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ 是线性映射;

4° 若 $\omega_1\in\Omega^{k_1}(M), \omega_2\in\Omega^{k_2}(M)$, 则 $i_X(\omega_1\wedge\omega_2) = i_X\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1\wedge i_X\omega_2$;

5° 若 $\omega\in\Omega(M)$, 则 $i_X\omega = \omega(X)$, 而若 $f\in\Omega^0(M)$, 则 $i_Xf = 0$.

8. 试证下列诸断言:

a) 算子 d, i_X 及 L_X(参看习题 6,7) 满足所谓同伦恒等式

$$L_X = i_Xd + di_X, \tag{22}$$

这里 X 是流形上的任意的光滑向量场.

b) 李导数与 d 及 i_X 可交换, 即

$$L_X \circ d = d \circ L_X, L_X \circ i_X = i_X \circ L_X$$

c) $[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}, [L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$, 这里, 照例对任何使 $A \circ B - B \circ A$ 有定义的算子 A, B, 记 $[A, B] = A \circ B - B \circ A$. 在现在的情况, 所有括号 [,] 都有定义.

d) $L_X f\omega = fL_X\omega + df \wedge i_X\omega$, 这里 $f \in \Omega^0(M)$, 而 $\omega \in \Omega^k(M)$.

(提示. 在本题内,a) 是基本的. 它可用比如归纳法去验证; 归纳是对算子所作用的形式的次数做的.)

§4　流形上的闭形式与恰当形式

1. 庞加莱定理

本节将补充介绍闭微分形式与恰当微分形式的知识, 这些概念, 在第 14 章 §3 中由于讲述空间 $\mathbb{R}^n$ 的区域内的向量场理论, 已作过说明. 像前面一样, 用 $\Omega^p(M)$ 记光滑流形 M 上所有光滑实值 p 次形式的空间, 而 $\Omega(M) = \bigcup\limits_p \Omega^p(M)$.

定义 1　形式 $\omega \in \Omega^p(M)$ 叫闭形式, 假如 $d\omega = 0$.

定义 2　形式 $\omega \in \Omega^p(M), p > 0$, 叫做恰当形式, 假如存在形式 $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$, 使 $\omega = d\alpha$.

流形 M 的所有闭 p- 形式的集记作 $Z^p(M)$, 而 M 上所有恰当 p- 形式的集记作 $B^p(M)$.

对于任何形式 $\omega \in \Omega(M)$, 关系式[①] $d(d\omega) = 0$ 成立, 它说明 $Z^p(M) \supset B^p(M)$. 我们已由第 14 章 §3 知道, 一般地说, 这个包含关系是严格的.

方程 $d\alpha = \omega$(关于 α) 的可解性这个重要问题, 当形式满足必要条件 $d\omega = 0$ 时, 是与流形 M 的拓扑结构密切相关的, 下面将给出一个比较全面的说明.

定义 3　称流形 M 为可缩 (于一点 $x_0 \in M$) 的, 或单点同伦的, 假如存在光滑映射 $h : M \times I \to M$, 这里 $I = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, 使 $h(x, 1) = x$, 而 $h(x, 0) = x_0$.

例 1　空间 $\mathbb{R}^n$, 借助于映射 $h(x, t) = tx$ 收缩于一点.

定理 1 (庞加莱)　*设流形 M 可缩于一点, 则 M 上的任何闭 $(p+1)$- 形式 $(p \geqslant 0)$ 都是恰当形式.*

◀ 证明的非平凡部分, 由下面的对于任何流形都适用的 "柱" 结构组成.

[①] 由于算子 d 引入的方法不同, 这一性质或为需要证明的断言, 这时, 常把它叫做庞加莱引理, 或把它放到算子 d 的定义中去.

考察 "柱" $M \times I$ (M 与单位线段 I 的直积) 及使 M 分别等同于柱 $M \times I$ 的两底的映射 $j_i : M \to M \times I, j_i(x) = (x, i), i = 0, 1$. 这时, 自然产生相应的两个映射 $j_i^* : \Omega^p(M \times I) \to \Omega^p(M)$, 它们是把 $\Omega^p(M \times I)$ 的形式中的变量 t 代之以相应的 i 的值 (=0,1) 的运算, 这时, 当然 $di = 0$.

做线性算子 $K : \Omega^{p+1}(M \times I) \to \Omega^p(M)$, 它在单项式上的取值如下定义:

$$K(a(x,t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+1}}) := 0,$$
$$K(a(x,t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) := \left(\int_0^1 a(x,t)dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

我们所需要算子 K 的基本性质是, 对任何 $\omega \in \Omega^{p+1}(M \times I)$ 成立以下关系式:

$$K(d\omega) + d(K\omega) = j_1^*\omega - j_0^*\omega \tag{1}$$

只要对单项式验证这一性质就够了, 因为所有算子 K, d, j_1^*, j_0^* 都是线性的.

如果 $\omega = a(x,t)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+1}}$, 则 $K\omega = 0, dK\omega = 0$,

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+1}} + [\text{ 不含 } dt \text{ 的项 }],$$
$$K(d\omega) = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+1}}$$
$$= (a(x,1) - a(x,0))dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+1}} = j_1^*\omega - j_0^*\omega,$$

从而关系式 (1) 成立.

如果 $\omega = a(x,t)dt \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, 则 $j_1^*\omega = j_0^*\omega = 0$. 此外,

$$K(d\omega) = K\left(-\sum_{i_0} \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right)$$
$$= -\sum_{i_0} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p},$$

$$d(K\omega) = d\left(\left(\int_0^1 a(x,t)dt\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right)$$
$$= \sum_{i_0} \frac{\partial}{\partial x^{i_0}} \left(\int_0^1 a(x,t)dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$
$$= \sum_{i_0} \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^{i_0}} dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

因此, 在这种情况下,(1) 式也成立①.

①在上式中, 能在积分号下对变量进行微分的理由, 可参看第 17 章 §1.

今设 M 是可缩于点 $x_0 \in M$ 的流形.$h: M \times I \to M$ 是定义 3 中指出的映射, ω 是 M 上的 $(p+1)$- 形式. 这时, 显然 $h_1 \circ j_1: M \to M$ 是恒等映射, 而 $h \circ j_0: M \to x_0$ 是 M 到一点 x_0 的映射, 所以 $(j_1^* \circ h^*)\omega = \omega$, 而 $(j_0^* \circ h^*)\omega = 0$. 因此这时由 (1) 式推出

$$K(d(h^*\omega)) + d(K(h^*\omega)) = \omega. \tag{2}$$

如果加上 ω 是 M 上的闭形式这个条件, 那么, 因为 $d(h^*\omega) = h^*(d\omega) = 0$, 从 (2) 式即得

$$d(K(h^*\omega)) = \omega.$$

于是, 闭形式 ω 是形式 $\alpha = K(h^*\omega) \in \Omega^p(M)$ 的外微分, 亦即 ω 是 M 上的恰当形式. ►

例 2　设 A, B, C 是 $\mathbb{R}^3$ 内变量 x, y, z 的光滑实值函数. 要从方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = A, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = B, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = C. \end{cases} \tag{3}$$

求出函数 P, Q, R.

要使方程组 (3) 相容, 显然函数 A, B, C 必须满足关系

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

它与形式

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

在 $\mathbb{R}^3$ 内的闭性等价.

如果能找到形式

$$\alpha = P dx + Q dy + R dz$$

使 $d\alpha = \omega$, 则方程组 (3) 可解.

根据定理 1 的证明中叙述的方案, 再考虑到例 1 内所建立的映射 h, 经过简单的计算, 就得到

$$\begin{aligned} \alpha = K(h^*\omega) = & \left(\int_0^1 A(tx, ty, tz) t dt\right)(y dz - z dy) \\ & + \left(\int_0^1 B(tx, ty, tz) t dt\right)(z dx - x dz) \\ & + \left(\int_0^1 C(tx, ty, tz) t dt\right)(x dy - y dx). \end{aligned}$$

直接验证即知 $d\alpha = \omega$.

注 选取满足条件 $d\alpha = \omega$ 的形式 α 通常有很大的任意性. 例如当用任何形如 $\alpha + d\eta$ 的形式代替形式 α 时, 显然也满足这个方程.

根据定理 1, 在可缩流形 M 上, 满足条件 $d\alpha = d\beta = \omega$ 的任意两个形式 α, β, 其差是一个恰当形式. 实际上, $d(\alpha - \beta) = 0$, 即形式 $(\alpha - \beta)$ 在 M 上是闭的, 因此, 根据定理 1, 它是恰当的.

2. 同调与上同调

据庞加莱定理, 流形上的任何闭形式是局部恰当的. 要把这些局部的原像粘成整个流形上的一个形式, 并不是总能做到的, 这与流形的拓扑结构有关. 例如, 在第 14 章 §3 内考察的打了洞的平面 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内, 形式 $\omega = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ 局部地是点 (x, y) 的极角函数 $\varphi = \varphi(x, y)$ 的微分. 然而, 这个函数在区域 $\mathbb{R}^2 \backslash O$ 内的延拓, 当这延拓沿着一个绕过小洞 (点 O) 的闭路进行时, 就导致多值性的产生. 对其他次数的形式情况大致也是这样. 流形内的 "洞", 可能各种各样, 不只是针孔, 也可能是像环面或 8 字形小面点有的那样的洞. 高维流形的结构可能相当复杂. 流形作为拓扑空间的结构, 流形上的闭形式和恰当形式的相互关系, 这两个问题之间的联系是用所谓流形的 (上) 同调群来描述的.

流形 M 上的闭实形式与恰当实形式, 分别构成线性空间 $Z^p(M)$ 与 $B^p(M)$, 并且 $Z^p(M) \supset B^p(M)$.

定义 4 称商空间

$$H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M) \tag{4}$$

为流形 M 的(实系数) p 维上同调群.

因此, 两个闭形式 $\omega_1, \omega_2 \in Z^p(M)$ 位于同一个上同调类, 或说它们是上同调的, 是指 $\omega_1 - \omega_2 \in B^p(M)$, 即它们只相差一个恰当形式, 形式 $\omega \in Z^p(M)$ 所属的上同调类记作 $[\omega]$.

因为 $Z^p(M)$ 是算子 $d^p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ 的核, 而 $B^p(M)$ 是算子 $d^{p-1} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)$ 的像, 所以经常把 (4) 式写成

$$H^p(M) = \mathrm{Ker} d^p / \mathrm{Im} d^{p-1}.$$

计算上同调, 通常是一件困难的事情. 然而我们可以做一些简单明显的一般观察.

由定义 4 推知, 若 $p > \dim M$, 则显然 $H^p(M) = 0$.

由庞加莱定理知, 如果 M 是可缩的, 则当 $p > 0$ 时, $H^p(M) = 0$.

在任何连通流形 M 上, 群 $H^0(M)$ 与 $\mathbb{R}$ 同构, 因为 $H^0(M) = Z^0(M)$, 而当在连通流形 M 上定义的函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 满足关系 $df = 0$ 时, 有 $f =$ 常数.

因此, 例如对于空间 $\mathbb{R}^n$ 得到: 当 $p>0$ 时, 有 $H^p(\mathbb{R}^n)=0$, 而 $H^0(\mathbb{R}^n)\sim\mathbb{R}$. 这一断言 (除最后这种平凡的关系) 等价于当 $M=\mathbb{R}^n$ 时的定理 1, 并且也叫做庞加莱定理.

所谓同调群与流形 M 有更直观的几何联系.

定义 5 将 p 维方体 $I^p\subset\mathbb{R}^p$ 映入流形 M 的光滑映射 $c: I^p\to M$, 叫做流形 M 上的**奇异方体**.

这是光滑道路概念往任意维数 p 的情况的直接推广. 特别地, 奇异方体可能是将方体 I^p 变为一点的变换.

定义 6 任意有限个流形 M 上的奇异 p 维方体的形式的实系数线性组合 $\sum\limits_k \alpha_k c_k$, 叫做流形 M 上的 p 维 (奇异方体的) **链**.

像道路那样, 两个奇异方体, 如果能用具正雅可比的参变量微分同胚变换从一个得出另一个, 则说它们是等价的, 而且视两个等价的奇异方体是等同的. 如果这种参变量的变换是具负雅可比的, 则称这两个 (定向相反的) 奇异方体 c 和 c_- 是相反的, 并记作 $c_-=-c$.

流形 M 上的 p 维链, 关于标准的加法及乘以实数的运算, 显然构成线性空间. 我们用 $C_p(M)$ 表示这个空间.

定义 7 称 $\mathbb{R}^p$ 中的 $p-1$ 维链

$$\partial I := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c_{ij} \tag{5}$$

为 $\mathbb{R}^p$ 内的 p 维方体 I^p 的**边界**, 这里 $c_{ij}: I^{p-1}\to\mathbb{R}^p$ 是从 $p-1$ 维方体到 $\mathbb{R}^p$ 内的映射, 它是由方体 I^p 的相应边界往 $\mathbb{R}^p$ 内的典型嵌入诱导出的映射. 确切地说, 若 $I^{p-1}=\{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{p-1}|0\leqslant\tilde{x}^m\leqslant 1, m=1,\cdots,p-1\}$, 则 $c_{ij}(\tilde{x})=(\tilde{x}^1,\cdots,\tilde{x}^{j-1},i,\tilde{x}^{j+1},\cdots,\tilde{x}^p)\in\mathbb{R}^p$.

容易验证, 这样定义的方体边界, 与取标准定向方体 I^p 的边界的运算是完全一致的 (参看第 12 章 §3).

定义 8 p 维奇异方体的**边界** ∂c 是 $(p-1)$ 维链

$$\partial c := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c\circ c_{ij}.$$

定义 9 流形 M 上 p 维链 $\sum\limits_k\alpha_k c_k$ 的边界是 $p-1$ 维链

$$\partial\left(\sum_k \alpha_k c_k\right) := \sum_k \alpha_k \partial c_k.$$

因此, 在任何 p 维链空间 $C_p(M)$ 上, 定义了线性算子

$$\partial = \partial_p : C_p(M) \to C_{p-1}(M).$$

根据关系式 (5), 对任何方体可以验证 $\partial(\partial I) = 0$. 因此 $\partial \circ \partial = \partial^2 = 0$ 普遍成立.

定义 10 设 z 是流形 M 上的 p 维链. 如果 $\partial z = 0$, 就称它是*p 维闭链*或*p-闭链*.

定义 11 如果流形 M 上的 p 维链 b 是某个 $p+1$ 维链的边界, 就称 b 为流形上的*p维边界闭链*.

设 $Z_p(M)$ 与 $B_p(M)$ 是流形 M 上的 p 维闭链与 p 维边界闭链的集. 显然, $Z_p(M)$ 与 $B_p(M)$ 都是域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 并且 $Z_p(M) \supset B_p(M)$.

定义 12 我们把商空间

$$H_p(M) := Z_p(M)/B_p(M) \tag{6}$$

叫做*流形 M 的 p 维 (实系数) 同调群*.

因此, 如果两个闭链 $z_1, z_2 \in Z_p(M)$ 的差 $z_1 - z_2 \in B_p(M)$, 即它们只相差某个链的边界, 则称 z_1, z_2 位于同一个同调类中, 或说它们同调. 闭链 $z \in Z_p(M)$ 的同调类记作 $[z]$.

如同上同调的情形, 我们又可把 (6) 式改写成

$$H_p(M) = \mathrm{Ker}\partial_p / \mathrm{Im}\partial_{p+1}.$$

定义 13 设 $c: I \to M$ 是奇异 p 维方体, ω 是流形 M 上的 p- 形式. 就称

$$\int_c \omega := \int_I c^* \omega \tag{7}$$

为形式 ω 沿此奇异方体 c 的积分.

定义 14 设 $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ 是 p 维链, 而 ω 是流形 M 上的 p- 形式. 就把 ω 沿着这些奇异方体积分的线性组合 $\sum\limits_k \alpha_k \int_{c_k} \omega$ 叫做形式 ω 沿着该链的积分.

由定义 5—8 及 13,14 推知, 对于沿着奇异方体的积分, 斯托克斯公式

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \tag{8}$$

成立, 这里 c 的维数是 p, ω 的次数为 $p-1$. 如果再把定义 9 考虑进去, 就得到结论: 斯托克斯公式 (8), 对于沿链的积分仍然有效.

定理 2 a) *恰当形式沿闭链的积分为零.*

b) *闭形式沿链的边界的积分为零.*

c) 闭形式沿闭链的积分, 只与闭链的同调类有关.

d) 闭形式沿闭链的积分, 只与形式的上同调类有关.

e) 如果 p 次闭形式 ω_1, ω_2 与 p 维闭链 z_1, z_2 满足 $[\omega_1]=[\omega_2], [z_1]=[z_2]$, 那么

$$\int_{z_1} \omega_1 = \int_{z_2} \omega_2.$$

◀ a) 因为 $\partial z = 0$, 所以由斯托克斯公式,$\int_z d\omega = \int_{\partial z} \omega = 0$.

b) 因为 $d\omega = 0$, 所以由斯托克斯公式,$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = 0$.

c) 由 b) 推知

d) 由 a) 推知.

e) 由 c) 与 d) 推知. ▶

推论 由公式 $(\omega, c) \mapsto \int_c \omega$ 给出的双线性映射 $\Omega^p(M) \times C_p(M) \to \mathbb{R}$, 诱导出双线性映射 $Z^p(M) \times Z_p(M) \to \mathbb{R}$ 及双线性映射 $H^p(M) \times H_p(M) \to \mathbb{R}$, 后者由公式

$$([\omega], [z]) \mapsto \int_z \omega \tag{9}$$

给出, 这里 $\omega \in Z^p(M), z \in Z_p(M)$.

定理 3 (狄 · 拉姆[①]). 由公式 (9) 给出的双线性映射 $H^p(M) \times H_p(M) \to \mathbb{R}$ 是非退化的[②].

我们不去证明拉姆定理, 只给出它的一些变形, 使它能够对于分析提供一些有用的推论.

首先注意, 根据 (9) 式, 每个上同调类 $[\omega] \in H^p(M)$, 可以解释成线性函数 $[\omega]([z]) = \int_z \omega$. 于是, 自然地产生了一个映射 $H^p(M) \to H_p^*(M)$, 这里 $H_p^*(M)$ 是 $H_p(M)$ 的共轭空间. 狄 · 拉姆定理断定, 这个映射是同构映射. 在这种意义下, $H^p(M) = H_p^*(M)$.

定义 15 如果 ω 是 p 次闭形式,z 是流形 M 上的 p 维闭链, 则称量 $\operatorname{per}(z) := \int_z \omega$ 为形式 ω 在闭链 z 上的周期 (或者叫做闭链常数).

特别地, 当闭链 z 同调于零时, 则由定理 2 的断言 b) 应推出 $\operatorname{per}(z) = 0$. 据此原因, 周期之间具有以下关系:

$$[\sum_k \alpha_k z_k] = 0 \Longrightarrow \sum_k \alpha_k \operatorname{per}(z_k) = 0, \tag{10}$$

① 狄 · 拉姆 (de Rham) (1903—1969) 比利时数学家, 其基本工作在代数拓扑学方面.

② 双线性形式 $L(x, y)$ 叫做非退化的, 如果任意固定它的一个变量于非零值, 所得关于另一变量的线性形式不恒等于零.

这就是说, 如果闭链的线性组合构成边界闭链, 或者说它同调于零, 那么其相应周期的线性组合也等于零.

还有以下两个狄 · 拉姆定理, 它们合起来等价于定理 3.

定理 4 (狄 · 拉姆第一定理) *闭形式为恰当形式的充要条件是它的所有周期都是零.*

定理 5 (狄 · 拉姆第二定理) *如果把流形 M 上的每个 p 闭链 $z \in Z_p(M)$ 对应于一个数 $\mathrm{per}(z)$, 且保持条件 (10), 则在 M 上存在闭 p- 形式 ω, 使得对于任何闭链 $z \in Z_p(M)$, 有 $\int_z \omega = \mathrm{per}(z)$.*

练　习

1. 用直接计算验证例 2 中所得的形式 α 确实满足方程 $d\alpha = \omega$.

2. a) 试证 $\mathbb{R}^2$ 内的任何单连通域可收缩于一点.

b) 试证, 对 $\mathbb{R}^3$ 来说, 上面的断言一般不成立.

3. 分析一下庞加莱定理的证明, 并证明, 如果把光滑映射 $h: M \times I \to M$, 看做是一族依赖于参数 $t \in I$ 的映射 $h_t: M \to M$, 那么对于 M 上的任何闭形式 ω, 所有闭形式 $h_t^*\omega, t \in I$, 将属于同一个上同调类.

4. a) 设 $t \mapsto h_t \in C^{(\infty)}(M, N)$ 是光滑地依赖于参数 $t \in I \subset \mathbb{R}$ 的一族把流形 M 映入流形 N 的映射. 试验证对任何形式 $\omega \in \Omega(N)$, 以下同伦公式成立

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_t^*\omega)(x) = dh_t^*(i_X\omega)(x) + h_t^*(i_X d\omega)(x) \tag{11}$$

这里 $x \in M, X$ 是 N 上的向量场, 并且 $X(x,t) \in TN_{h_t(x)}$ 而 $X(x,t)$ 是道路 $t' \mapsto h_{t'}(x)$ 在 $t' = t$ 时的速度向量; 形式与向量场的内积算子 i_X 是在上节练习 7 内定义的.

b) 试由公式 (11) 求出练习 3 所说的断言.

c) 试依据公式 (11) 重新证明庞加莱定理 1.

d) 试证, 如果 K 是可缩于一点的流形, 则对于任何流形 M 及任何整数 p, 等式 $H^p(K \times M) = H^p(M)$ 成立.

e) 试从公式 (11) 推出前节的公式 (20).

5. a) 利用定理 4 直接证明: 如果球面 S^2 上的闭 2- 形式满足 $\int_{S^2} \omega = 0$, 则 ω 是恰当形式.

b) 试证群 $H^2(S^2)$ 同构于 $\mathbb{R}$

c) 试证: $H^1(S^2) = 0$.

6. a) 设 $\varphi: S^2 \to S^2$ 是一映射, 它使每点 $x \in S^2$ 与过此点的直径的另一端点 $-x \in S^2$ (反极点) 对应. 试证在射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 上的形式与球面 S^2 上关于映射 φ 不变的形式 (即 $\varphi^*\omega = \omega$) 之间有双方单值对应.

b) 把 $\mathbb{RP}^2$ 看做商流形 S^2/Γ, 这里 Γ 是由球面 S 上的恒等映射及反极点映射 φ 组成的变换群. 设 $\pi: S^2 \to \mathbb{RP}^2 = S^2/\Gamma$ 是自然射影, 即 $\pi(x) = \{x, -x\}$. 试证 $\pi \circ \varphi = \pi$, 并验证

$$\forall \eta \in \Omega^p(S^2)(\varphi^*\eta = \eta) \Longleftrightarrow \exists \omega \in \Omega^p(\mathbb{RP}^2)(\pi^*\omega = \eta).$$

c) 利用练习 5a), 证明 $H^2(\mathbb{R}^2\mathbb{P}) = 0$.

d) 试证, 如果函数 $f \in C(S^2, \mathbb{R})$ 满足 $f(x) - f(-x) \equiv$ 常数, 则 $f \equiv 0$. 考虑到练习 5 c), 由此即可推得 $H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$.

7. a) 把 $\mathbb{RP}^2$ 表示成标准矩形 Π 的形式, 并使其反向放置的对边等同起来, 在图 98 上指出了其对边的定向. 试证: $\partial\Pi = 2c' - 2c, \partial c = P - Q; \partial c' = P - Q$.

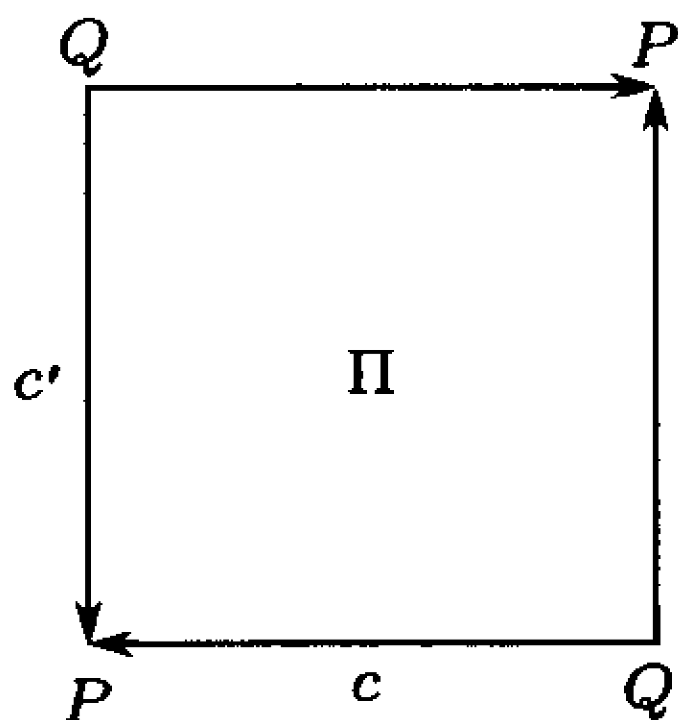


图 98

b) 从对上面习题的观察导出: 在 $\mathbb{RP}^2$ 上设有非平凡二维闭链, 并利用狄 · 拉姆定理证明 $H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$.

c) 试证, 在 $\mathbb{RP}^2$ 上唯一的 (不计及因数) 非平凡一维闭链是闭链 $c' - c$, 而且, 因为有 $c' - c = \frac{1}{2}\partial\Pi$, 由狄 · 拉姆定理能导出 $H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$.

8. 求群 $H^0(M), H^1(M), H^2(M)$, 如果:

a) $M = S^1$ —— 圆周;

b) $M = T^2$ —— 二维环面;

c) $M = K^2$ —— 克莱因瓶.

9. a) 证明: 微分同胚的流形有相应维数的同构 (上) 同调群.

b) 以 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{RP}^2$ 为例证明: 一般来说, 上述断言的逆命题不成立.

10. 设 X, Y 是域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 而 $L: X \times Y \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto L(x, y)$ 是非退化的双线性形式, 考察映射 $X \ni x \mapsto L(x, \cdot) \in Y^*$.

a) 证明: 这个映射是内射.

b) 证明: 对空间 Y 中任意的线性无关的向量组 $y_1, \cdots, y_k$, 在空间 X 中能找到这样一组向量 $x^1, \cdots, x^k$, 使得 $x^i(y_j) := L(x^i, y_j) = \delta^i_j$, 其中 $\delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$

c) 验证: 上边建立的映射 $X \to Y^*$ 是线性空间 X 与 Y^* 间的同构映射.

d) 试证: 狄 · 拉姆第一、第二定理合在一起, 就表明, 在同构意义下有 $H^p(M) = H^*_p(M)$.

第十六章　一致收敛性，函数项级数与函数族的基本分析运算

§1　逐点收敛与一致收敛

1. 逐点收敛

定义 1　称函数 $f_n : X \to \mathbb{R}$ 的序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在点 $x \in X$ 收敛，如果这些函数在点 x 的值的序列 $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛.

定义 2　使函数 $f_n : X \to \mathbb{R}$ 的序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 收敛的点的集 $E \subset X$ 叫做函数序列的收敛集.

定义 3　在函数序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 收敛集 E 上由关系式 $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 产生的函数 $f : E \to \mathbb{R}$，叫做序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限函数或函数序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限.

定义 4　如果 $f : E \to \mathbb{R}$ 是序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的极限函数，那么，就说这个函数序列在 E 上收敛（或逐点收敛）到函数 f.

在这种情况下，记作 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)(x \in E)$ 或当 $n \to \infty$ 时，$f_n \to f$(在 E 上).

例 1　设 $X = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 0\}$，函数 $f_n : X \to \mathbb{R}$ 由关系式 $f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ 给出. 这个函数序列的收敛集显然是区间 $I = [0, 1]$，而极限是由条件

$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant x < 1, \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

确定的函数 $f: I \to \mathbb{R}$.

例 2 函数序列 $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上收敛到恒等于零的函数 $f: x \mapsto 0$.

例 3 序列 $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$ 也有恒等于零的极限函数 $f: x \mapsto 0$.

例 4 我们考虑在区间 $I = [0,1]$ 上的函数序列 $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. 因为当 $|q| < 1$ 时,$nq^n \to 0(n \to \infty)$, 所以这个序列在整个区间 I 上趋于零.

例 5 设 $m, n \in \mathbb{N}$, 且 $f_m(x) := \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n}$. 如果 $m!x$ 是整数, 那么 $f_m(x) = 1$; 如果 $m!x \notin \mathbb{Z}$, 那么显然有 $f_m(x) = 0$.

现在, 我们考虑序列 $\{f_m, m \in \mathbb{N}\}$, 并且证明在整个数轴上, 它收敛到狄利克雷函数

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 0, x \notin \mathbb{Q}, \\ 1, x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

事实上, 如果 $x \notin \mathbb{Q}$, 那么对任何一个 $m \in \mathbb{N}, m!x \notin \mathbb{Z}$, 且 $f_m(x) = 0$, 因此, $f(x) = 0$. 而如果 $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. 其中 $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, 那么当 $m \geqslant q$ 时, 有 $m!x \in \mathbb{Z}$, 且 $f_m(x) = 1$, 从而 $f(x) = 1$.

因此, $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = \mathfrak{D}(x)$.

2. 基本问题的提出

在分析中每走一步都会遇到极限过渡问题, 而且, 弄清楚极限函数具有怎样的函数性质常常是很重要的. 在这些性质中对于分析来说主要的是连续性、可微性和可积性. 这就是说, 重要的是要阐明: 如果趋于极限的函数是连续, 可微, 可积的, 极限函数是否也具有相应的性质. 这时, 特别重要的是要寻求足够方便的条件, 当这些条件满足的时候. 能从函数的收敛性推出这些函数的导数或积分收敛到极限函数的导数或积分.

从分析过的最简单的例子中看出, 如果没有任何附加条件, 一般来说, 由关系式 "$f_n \to f$ 在 $[a,b]$ 上, 当 $n \to \infty$" 既不能推出极限函数的连续性 (即使函数 f_n 是连续的), 也不能推出关系式 $f'_n \to f'$ 或 $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$(即使所指出的导数和积分都是有定义的).

事实上,

在例 1 中, 极限函数在区间 $[0,1]$ 上是间断的, 虽然趋于极限的函数在该区间上是连续的.

在例 2 中, 趋于极限的函数的导数 $n\cos n^2 x$ 一般不收敛, 当然也就不会收敛到极限函数的导数, 这个极限函数恒等于零.

在例 4 中, 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$. 同时有 $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

在例 5 中, 在任何区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上, 每个函数 f_n 除去有限个点外处处为零, 因此 $\int_a^b f_m(x)dx=0$, 而此时, 极限函数 $\mathfrak{D}$ 本身在数轴内任何一个区间上都不可积.

此外:

在例 2, 3, 4 中, 无论是趋于极限的函数还是极限函数都是连续的.

在例 3 中, 函数序列 $\frac{\sin nx}{n^2}$ 的导数 $\frac{\cos nx}{n}$ 的极限和这个序列的极限函数的导数是一样的.

在例 1 中,$\int_0^1 f_n(x)dx\to\int_0^1 f(x)dx\quad(n\to\infty)$.

我们的基本目的是阐明在什么样的条件下, 在积分符号或微分符号下取极限是合理的.

再来看一个这方面的例子.

例 6 我们知道, 对任何 $x\in\mathbb{R}$. 有

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\cdots, \tag{1}$$

然而, 在看了上边举的那些例子之后, 我们知道, 关系式

$$(\sin x)'=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right)', \tag{2}$$

$$\int_a^b \sin x dx=\sum_{m=0}^{\infty}\int_a^b\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}dx \tag{3}$$

一般来说是需要检验的.

事实上, 如果把等式

$$S(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_m(x)+\cdots$$

理解为 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, 其中 $S_n(x)=\sum\limits_{m=1}^{n}a_m(x)$, 那么, 由于微分与积分运算的线性性质, 关系式

$$S'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a'_m(x),$$

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b a_m(x)dx$$

分别等价于

$$S'(x)=\lim_{n\to\infty}S'_n(x),$$

$$\int_a^b S(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx.$$

它们是我们现在应该谨慎地对待的等式.

关系式 (2),(3) 是容易验证的. 因为对任一 $x \in \mathbb{R}$, 显然有

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \cdots$$

但是, 设想等式 (1) 是函数 $\sin x$ 的定义. 要知道当自变量是复值时, 函数 $\sin z$, $\cos z, e^z$ 的定义正是这样的. 那时, 如果我们需要所产生的新函数的性质 (它的连续性、可微性、可积性) 的话, 和等式 (2),(3) 的合理性一样, 就要直接从这个函数是给定的级数的部分和序列的极限函数的事实去析取.

一致收敛性是个重要的概念, 在 §3 中将利用它得到上述极限过渡合理性的充分条件.

3. 依赖于参数的函数族的收敛性和一致收敛性

在问题提法的讨论中, 我们仅局限于考察函数序列的极限. 而函数序列是依赖于参数 t 的函数族 $f_t(x)$ 当 $t \in \mathbb{N}$ 时的重要的特殊情形. 这样一来, 函数序列所处的位置和序列极限理论在函数极限理论中所处的位置是一样的. 关于函数序列的极限以及和它相联系的函数项级数的收敛理论, 我们将在 §2 中详细叙述, 这里只讨论依赖于参数的函数族的收敛性与一致收敛性这些在整个后续理论中的基本概念.

定义 5 称定义在集合 $X \times T$ 上的两个变量 x, t 的函数 $(x,t) \mapsto F(x,t)$ 为*依赖于参数 t 的函数族*, 如果由于这样或那样的原因, 能把变量 $t \in T$ 分出来. 并称它为*参变量的话*.

这时, 集合 T 称为*参变量集*或*参变量域*. 而函数族本身, 则把参数直接标出来, 常记作 $f_t(x)$ 或 $\{f_t, t \in T\}$.

在本书中. 我们通常需要考虑这样的函数族. 它的参数域 T 是自然数集 $\mathbb{N}$, 实数集 $\mathbb{R}$ 或复数集 $\mathbb{C}$, 或者是它们相应的子集, 虽然, 一般来说, 集 T 可以是有任何自然属性的集合. 这样, 在上面考察的例 1—5 中 $T = \mathbb{N}$. 在例 1—4 中, 如果不损害它们具有的丰富内容, 可以认为参数 n 是任意的正数, 而极限是关于基底 $n \to \infty, n \in \mathbb{R}_+$ 的极限.

定义 6 设 $\{f_t : X \to \mathbb{R}, t \in T\}$ 是依赖于参数 t 的函数族, $\mathfrak{B}$ 是参变量集 T 的基.

如果对于确定的 $x \in X$, 极限 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x)$ 存在. 则称*函数族在点 x 收敛*.

全体收敛点的集合称为*函数族关于给定基 $\mathfrak{B}$ 的收敛集*.

定义 7 如果函数族在每点 $x \in E$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 收敛. 则称*函数族在集 $E \subset X$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 收敛*

E 上的函数 $f(x) := \lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x)$ 叫做函数族 f_t 在 E 上关于基 $\mathfrak{B}$ 的极限函数或极限.

例 7 设 $f_t(x) = e^{-\left(\frac{x}{t}\right)^2}, x \in X = \mathbb{R}, t \in T = \mathbb{R} \setminus 0, \mathfrak{B}$ 是基 $t \to 0$. 这个函数族在整个 $\mathbb{R}$ 上收敛, 且

$$\lim_{t \to 0} f_t(x) = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x \neq 0. \end{cases}$$

现在给出两个基本定义

定义 8 如果在每一点 $x \in E$, 有 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f_t(x) = f(x)$, 则称函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{f_t, t \in T\}$ *在集* $E \subset X$ *上关于基* $\mathfrak{B}$ *逐点收敛* (简称为收敛) 到函数 $f : E \to \mathbb{R}$.

此时, 常记作 (在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\to} f$).

定义 9 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $B \in \mathfrak{B}$. 使得对任意的 $t \in B$ 及任意的 $x \in E$, 有

$$|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{f_t, t \in T\}$ *在集* $E \subset X$*上关于基* $\mathfrak{B}$ *一致收敛*到函数 $f : E \to \mathbb{R}$.

此时, 常记作 (在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$)

下面再给出这些重要定义的形式写法.

(在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\to} f$)

$$:= \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \quad \exists B \in \mathfrak{B} \quad \forall t \in B(|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon),$$

(在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f$)

$$:= \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathfrak{B} \quad \forall x \in E \quad \forall t \in B(|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon).$$

收敛和一致收敛之间的关系使我们联想到函数在集合上连续和一致连续之间的关系.

为了更好地了解函数族的收敛和一致收敛之间的相互关系, 我们引入度量在点 $x \in E$ 处函数 f_t 的值对 f 的值的偏差量 $\Delta_t(x) = |f(x) - f_t(x)|$. 还考察量 $\Delta_t = \sup\limits_{x \in E} \Delta_t(x)$, 粗糙地说, 它刻画了对一切 $x \in E$, 函数 f_t 的值与函数 f 相应的值之间的最大的偏差 (虽然它可能不存在). 这样一来, 对每个 $x \in E$, 有 $\Delta_t(x) \leqslant \Delta_t$.

用这些记号, 显然可以把上边引进的定义写成以下形式:

(在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\to} f$) $:= \forall x \in E(\Delta_t(x) \to 0$ 关于 $\mathfrak{B})$,

(在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f) := (\Delta_t \to 0$ 关于 $\mathfrak{B})$,

现在, 显然有

(在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} f) \Rightarrow$(在 E 上 $f_t \underset{\mathfrak{B}}{\to} f)$.

即, 如果函数族 f_t 在集 E 上一致收敛到函数 f, 那么它在 E 上逐点收敛到 f. 一般来说, 相反的断言是不正确的.

例 8 我们考虑定义在区间 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 上依赖于参数 $t \in [0, 1]$ 的函数族 $f_t : I \to \mathbb{R}$, 函数 $y = f_t(x)$ 的图像如图 99 所示. 显然, 在任一点 $x \in I$. 有 $\lim\limits_{t \to 0} f_t(x) = 0$, 即, 当 $t \to 0$ 时, 有 $f_t(x) \to f(x) = 0$, 并且

$$\Delta_t = \sup_{x \in I} |f(x) - f_t(x)| = \sup_{x \in I} |f_t(x)| = 1.$$

即, 当 $t \to 0$ 时, $\Delta_t \nrightarrow 0$, 这就是说, 函数族收敛但不一致收敛.

为了方便起见, 在这种情况下, 我们就说函数族**不一致地收敛**到极限函数.

如果把参数 t 解释为时间, 那么函数族 f_t 在集 E 上收敛到函数 f 就意味着, 对任给的精确度 $\varepsilon > 0$ 及任一点 $x \in E$, 能指出时刻 t_ε, 从这个时刻起, 即当 $t > t_\varepsilon$ 时, 所有的函数 f_t 在点 x 的值与 $f(x)$ 值的误差均小于 ε.

而一致收敛则表示总有一个时刻 t_ε, 从这个时刻开始, 即当 $t > t_\varepsilon$ 时, 立即在所有的点 $x \in E$, 已都满足关系式 $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$.

图 99 所描绘的斜率很大的跑动驼峰的图形是不一致收敛的典型例子.

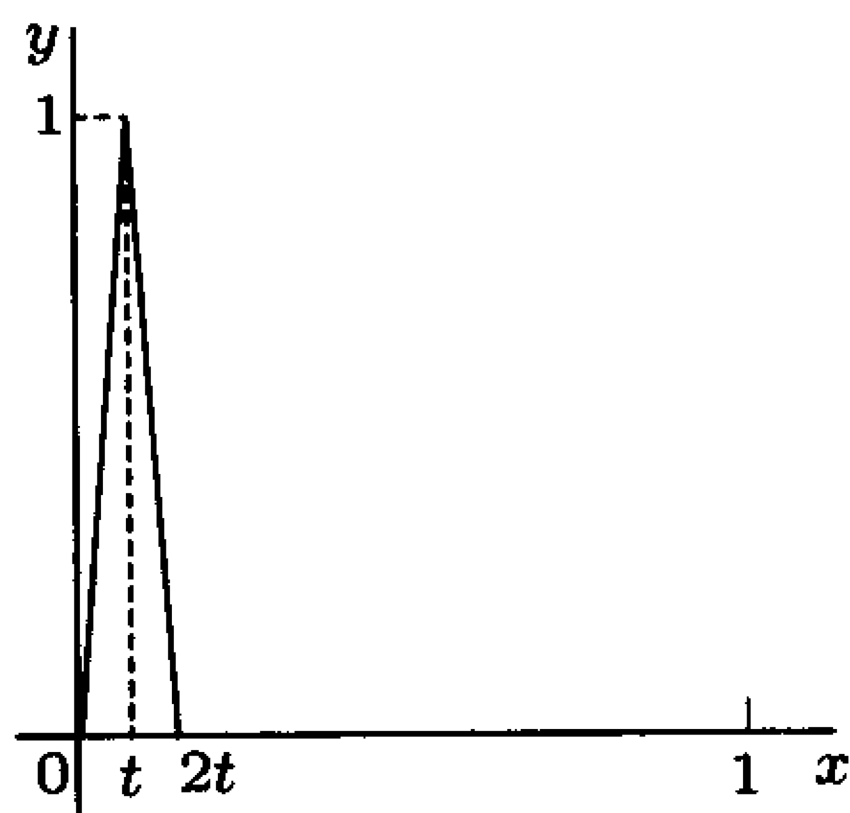


图 99

例 9 给定在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的函数序列 $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, 容易看出, 在这个区间上的任一点 x, 当 $n \to \infty$ 时, 它趋于零. 为了说明这个收敛性是不是一致的, 我们先求出量 $\Delta_n = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x)|$. 因为当 $x = 0$ 和 $x = 2^{-\frac{1}{n}}$ 时 $f_n'(x) = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0$, 所以显然有 $\Delta_n = f_n(2^{-\frac{1}{n}}) = 1/4$. 这样一来, 当 $n \to \infty$ 时,$\Delta_n \nrightarrow 0$, 从而, 我们的序列不一致地收敛到极限函数 $f(x) \equiv 0$.

例 10 在例 1 中研究的函数序列 $f_n(x) = x^n$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上不一致地收敛到极限函数 $f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant x < 1, \\ 1, x = 1. \end{cases}$ 这是因为对任一 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{0 \leqslant x < 1} |f(x) - f_n(x)| \\ &= \sup_{0 \leqslant x < 1} |f_n(x)| = \sup_{0 \leqslant x < 1} |x^n| = 1. \end{aligned}$$

例 11 在例 2 中研究的函数序列 $f_n(x)=\dfrac{\sin n^2x}{n}$ 在整个集合 $\mathbb{R}$ 上, 当 $n\to\infty$ 时一致收敛到零. 这是因为这时有

$$|f(x)-f_n(x)|=|f_n(x)|=\left|\frac{\sin n^2x}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$$

即 $\Delta_n\leqslant\dfrac{1}{n}$, 因此,当 $n\to\infty$ 时,$\Delta_n\to 0$.

4. 一致收敛的柯西准则

在定义 9 中, 我们曾说过函数族 f_t 在一个集合上一致收敛到该集合上给定的一个函数是什么意思. 通常, 当给定了函数族时, 极限函数还是未知的, 因此采用以下定义是合理的.

定义 10 称函数 $f_t:X\to\mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{f_t,t\in T\}$ 在集 $E\subset X$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛, 如果它在这个集合上收敛, 并且由这个收敛性确定的极限函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 按定义 9 的意义是一致的.

定理 (函数族一致收敛性的柯西准则) *设 $\{f_t,t\in T\}$ 是依赖于参数 $t\in T$ 的由函数 $f_t:X\to\mathbb{R}$ 构成的函数族, 而 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基. 函数族 $\{f_t,t\in T\}$ 在集 $E\subset X$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 是一致收敛的充分必要条件是: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在基 $\mathfrak{B}$ 中的元素 B, 使对任何参数值 $t_1,t_2\in B$ 及任一点 $x\in E$, 都满足不等式*

$$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon.$$

用形式化的写法, 这就是: f_t 在 E 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists B\in\mathfrak{B},\forall t_1,t_2\in B,\ \forall x\in E,|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon.$$

◀ **必要性** 引进的条件的必要性是显然的. 因为如果 $f:E\to\mathbb{R}$ 是极限函数, 且在 E 上关于基 $\mathfrak{B}$ 有 $f_t\rightrightarrows f$, 那么能找到 $B\in\mathfrak{B}$, 对任一 $t\in B$ 及任一 $x\in E$, 有 $|f(x)-f_t(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 这时, 对任意的 $t_1,t_2\in B$ 和任一 $x\in E$, 将有

$$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|\leqslant|f(x)-f_{t_1}(x)|+|f(x)-f_{t_2}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

充分性 对每一个确定的 $x\in E$, 量 $f_t(x)$ 可以看作参变量 $t\in T$ 的函数. 如果定理的条件满足, 那么这个函数就会满足它关于基 $\mathfrak{B}$ 的极限存在的柯西准则.

这就是说, 函数族 $\{f_t,t\in T\}$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 在集 E 上至少逐点收敛到某个函数 $f:E\to\mathbb{R}$.

现在, 如果对任何的 $t_1,t_2\in B$ 和任何的 $x\in E$ 都正确的不等式 $|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon$ 中取极限. 那么对任何的 $t_2\in B$ 和任何的 $x\in E$ 能够得到 $|f(x)-f_{t_2}(x)|\leqslant\varepsilon$. 不计一些非本质的记号的变化以及用非严格不等式代替严格不等式, 这正好与函数族 $\{f_t,t\in T\}$ 在集 E 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛到函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 的定义一致. ▶

注 1 我们对于实值函数族 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 引进的收敛与一致收敛性定义当然对于在任何一个度量空间 Y 内取值的函数族 $f_t : X \to Y$ 也是适用的. 这时在定义中应该做的自然的变更是将 $|f(x) - f_t(x)|$ 换为 $d_Y(f(x), f_t(x))$, 其中 d_Y 是空间 Y 的度量.

对于赋范向量空间 Y, 特别地, 对于 $Y = \mathbb{C}$, 或 $Y = \mathbb{R}^m$, 或 $Y = \mathbb{C}^m$, 甚至连这种形式的变更也不需要.

注 2 当然, 柯西准则对于函数值取在度量空间 Y 中的函数族 $f_t : X \to Y$ 也是适用的, 如果 Y 是完备度量空间的话. 从证明中可以看到, Y 的完备性条件仅仅在准则的充分性条件中是需要的.

练 习

1. 说明例 3—5 中所研究的函数序列是否一致收敛.

2. 证明等式 (2),(3).

3. a) 证明例 1 中所研究的函数序列在任何一个区间 $[0, 1-\delta] \subset [0, 1]$ 上一致收敛, 但在集合 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

b) 证明上述结论对于例 9 所研究的序列也是正确的.

c) 证明例 8 中研究的函数族 f_t, 当 $t \to 0$ 时, 在任何一个区间 $[\delta, 1] \subset [0, 1]$ 上一致收敛, 但在集合 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

d) 研究函数族 $f_t(x) = \sin tx$ 当 $t \to 0$ 时的收敛性和一致收敛性, 然后再研究 $t \to \infty$ 的情况.

e) 说明函数族 $f_t(x) = e^{-tx^2}$ 当 $t \to +\infty$ 时在任意确定的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上的收敛性特性.

4. a) 验证: 如果函数族在集合上收敛 (一致收敛), 那么它在这个集合的任一子集上也收敛 (一致收敛).

b) 证明: 如果函数族 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 在集合 E 上收敛 (一致收敛), 而 $g : X \to \mathbb{R}$ 是有界函数, 那么, 函数族 $g \cdot f_t : X \to \mathbb{R}$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 在集合 E 上也收敛 (一致收敛).

c) 证明: 如果函数族 $f_t : X \to \mathbb{R}, g_t : X \to \mathbb{R}$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 在集合 $E \subset X$ 上一致收敛, 那么函数族 $h_t = \alpha f_t + \beta g_t (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 在集合 E 上也一致收敛.

5. a) 在证明柯西准则充分性条件时, 我们关于 T 中的基 $\mathfrak{B}$ 取极限 $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f_{t_1}(x) = f(x)$, 但是 $t_1 \in B$, 而 $\mathfrak{B}$ 是 T 的基, 不是 B 的基. 我们能保持 t_1 在 B 中, 实现这个极限过渡吗?

b) 说明在函数族 $f_t : X \to \mathbb{R}$ 的一致收敛性柯西准则的证明中, 何处用到了 $\mathbb{R}$ 的完备性.

c) 注意, 如果函数族 $\{f_t : X \to \mathbb{R}, t \in T\}$ 中所有函数都是常值函数, 那么所证明的定理正好给出了函数 $\varphi : T \to \mathbb{R}$ 关于 T 中基 $\mathfrak{B}$ 的极限存在性的柯西准则.

6. 证明: 如果区间 $I = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$ 上的连续函数族 $f_t \in C(I, \mathbb{R})$ 在区间 $]a, b[$ 上一致收敛, 那么它在整个区间 $[a, b]$ 上收敛而且是一致的.

§2 函数项级数的一致收敛性

1. 级数一致收敛性的基本定义和判别准则

定义 1 设 $\{a_n : X \to \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}\}$ 是复值 (包括实值) 函数序列, 如果序列 $\{S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n(x), m \in \mathbb{N}\}$ 在 E 上收敛或一致收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $E \subset X$ 上收敛或一致收敛.

定义 2 如同数项级数的情况一样, 称函数 $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n(x)$ 为部分和, 更确切地说, 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的前 m 项部分和.

定义 3 级数的部分和序列的极限叫做级数的和.

这样一来, 记号

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \ \text{在}E\text{上}$$

表示当 $m \to \infty$ 时, 在 E 上有 $S_m(x) \to S(x)$. 而

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ 在 } E \text{ 上一致收敛}$$

表示当 $m \to \infty$ 时, 在 E 上有 $S_m(x) \rightrightarrows S(x)$.

函数项级数的逐点收敛性实质上就是数项级数的收敛性, 这是我们已经知道的.

例 1 我们曾用关系式

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \tag{1}$$

定义了函数 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 右端的级数对每个 $Z \in \mathbb{C}$ 都收敛是先前已经确认的.

用定义 1—3 的语言可以说, 函数 $a_n(z) = \frac{1}{n!} z^n$ 的级数 (1) 在整个复平面上收敛, 而函数 $\exp z$ 是它的和.

根据定义 1,2, 在级数及它的部分和序列之间建立了互逆的联系: 知道了级数的项, 就能得到部分和序列; 而知道部分和序列, 也能获得级数的所有的项; 级数的收敛性质等价于它的部分和序列的收敛性.

例 2 在 §1 的例 5 中, 我们曾构造过在 $\mathbb{R}$ 上收敛到狄利克雷函数 $\mathfrak{D}(x)$ 的函数序列 $\{f_m, m \in \mathbb{N}\}$. 如果令 $a_1(x) = f_1(x), a_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, 当 $n > 1$ 时, 那么, 我们将得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, 它在整个数轴上收敛且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \mathfrak{D}(x)$.

例 3 在 §1 的例 9 中, 曾指出函数序列 $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛到零, 但不一致收敛. 这就是说, 令 $a_1(x) = f_1(x)$, 而当 $n > 1$ 时, $a_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, 我们得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛到零, 但不一致收敛.

函数项级数和函数序列的直接联系使得每个函数序列的断言都能改变陈述成为函数项级数的相应论断.

比如, 把 §1 中证明了的函数序列在集 $E \subset X$ 上一致收敛的柯西准则运用到函数序列 $\{S_n : X \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$, 就得到

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n_1, n_2 > N \quad \forall x \in E \quad (|S_{n_1}(x) - S_{n_2}(x)| < \varepsilon). \tag{2}$$

由此并考虑定义 1, 就得到

定理 1 (级数一致收敛的柯西准则) *级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集 E 上一致收敛, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 能找到 $N \in \mathbb{N}$, 使对任何满足 $m \geqslant n > N$ 的自然数 m, n, 在一切点 $x \in E$, 满足不等式*

$$|a_n(x) + \cdots + a_m(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

◀ 事实上, 在 (2) 中取 $n_1 = m, n_2 = n - 1$, 且认为 $S_n(x)$ 是级数的部分和时, 就得到不等式 (3). 同样地, 在相同的符号与定理条件下, 从不等式 (3) 能得到关系式 (2). ▶

注 1 在定理 1 的叙述中, 我们没有指明函数 $a_n(x)$ 的值域, 这就意味着它可以是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 显然, 值域实际上可以是任何一个赋范向量空间, 只要它是完备的, 例如 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$.

注 2 如果在定理 1 的条件下, 所有函数 $a_n(x)$ 是常数, 我们就得到早已熟悉的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的柯西准则.

推论 1 (级数一致收敛的必要条件) *若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集 E 上一致收敛, 则当 $n \to \infty$ 时, 在 E 上有 $a_n(x) \rightrightarrows 0$.*

◀ 这可从序列一致收敛到零的定义和在不等式 (3) 得到, 只要在其中令 $n = m$. ▶

例 4 级数 (1) 在复平面 $\mathbb{C}$ 上的收敛是不一致的, 这是因为对任何 $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \left|\frac{1}{n!} z^n\right| = \infty$. 可是按一致收敛的必要条件, 当 (1) 一致收敛时, 量 $\sup\limits_{z \in \mathbb{C}} \left|\frac{1}{n!} z^n\right|$ 应该收敛于零.

例 5 正如我们所知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 在单位圆 $K = \{z \in \mathbb{C} \| z| < 1\}$ 内收敛. 因为 $\forall z \in K, \left|\dfrac{z^n}{n}\right| < \dfrac{1}{n}$, 那么, 在 K 上, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $\dfrac{z^n}{n} \rightrightarrows 0$. 一致收敛的必要条件成立; 但这个级数在 K 上不一致收敛. 事实上, 对任一固定的 $n \in \mathbb{N}$, 当 z 充分靠近 1 时, 由于级数各项的连续性, 能使不等式

$$\left|\frac{z^n}{n} + \cdots + \frac{z^{2n}}{2n}\right| > \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > \frac{1}{4}$$

成立. 由柯西准则推出此级数在集 K 上的收敛性不一致.

2. 级数一致收敛的魏尔斯特拉斯检验法

定义 4 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *在集 E 上绝对收敛*, 如果在任一点 $x \in E$, 对应的数项级数绝对收敛.

命题 1 *如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 对任一$x \in E$和所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$ 有 $|a_n(x)| \leqslant b_n(x)$, 那么从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 E 上的一致收敛能推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 E 上绝对且一致收敛.*

◀ 由条件, 对所有足够大的足码 n 和 m(设 $n \leqslant m$), 及任一点 $x \in E$, 有不等式

$$\begin{aligned} |a_n(x) + \cdots + a_m(x)| &\leqslant |a_n(x)| + \cdots + |a_m(x)| \\ &\leqslant b_n(x) + \cdots + b_m(x) = |b_n(x) + \cdots + b_m(x)|. \end{aligned}$$

由柯西准则, 对任意 $\varepsilon > 0$, 从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的一致收敛性可找到 $N \in \mathbb{N}$, 使对一切 $m \geqslant n > N$ 及一切 $x \in E$, 有 $|b_n(x) + \cdots + b_m(x)| < \varepsilon$, 再由所写出的不等式及柯西准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|$ 都一致收敛. ▶

推论 2 (级数一致收敛的魏尔斯特拉斯强函数检验法) *如果对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, 能找到一个收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, 使得对一切足够大的 $n \in \mathbb{N}$, 有*

$$\sup_{x \in E} |a_n(x)| \leqslant M_n.$$

那么, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在集 E 上绝对且一致收敛.

◀ 收敛的数项级数可看成集 E 上常值函数组成的级数, 由柯西准则知它在 E 上一致收敛. 因此, 如果令 $b_n(x) = M_n$, 则由命题 1 就得到魏尔斯特拉斯检验法. ▶

魏尔斯特拉斯检验法是最简单的同时也是最常用的级数一致收敛的充分条件. 作为它的应用例子, 我们证明下面有用的

命题 2 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在点 $\zeta \neq z_0$ 收敛, 那么它在任何一个圆 $K_q = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < q|\zeta - z_0|\}(0 < q < 1)$ 内绝对且一致收敛.

◀ 从级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta-z_0)^n$ 的收敛性的必要条件推出, 当 $n \to \infty$ 时,$c_n(\zeta-z_0)^n \to 0$, 这就是说, 在所考虑的圆 K_q 中, 对一切充分大的 $n \in \mathbb{N}$, 估计式

$$|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(\zeta-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n \leqslant |c_n(\zeta-z_0)^n|q^n < q^n$$

是正确的. 因为当 $|q| < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 由估计式 $|c_n(z-z_0)^n| < q^n$ 及一致收敛的强函数检验法就得到命题 2. ▶

把这个命题和关于幂级数收敛半径的柯西 – 阿达马公式比较 (参看第 5 章, §5, (17) 式), 我们能得到和那里一样的结论.

定理 2 (关于幂级数的收敛性质) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在圆 $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$ 中收敛, 半径由柯西 – 阿达马公式① $R = (\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|})^{-1}$ 确定. 在这个圆外级数发散. 在任何严格位于级数收敛圆 K 内的闭圆上, 幂级数绝对且一致收敛.

注 3 如例 1 和例 5 指出, 在整个圆 K 中, 幂级数未必一致收敛. 同时, 也可能有那样的情况, 幂级数甚至在闭圆 $\overline{K}$ 上一致收敛.

例 6 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径等于 1. 如果 $|z| \leqslant 1$. 那么 $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, 按魏尔斯特拉斯检验法知级数在闭圆 $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ 上绝对且一致收敛.

3. 阿贝尔 – 狄利克雷检验法

下面一对相近的级数一致收敛的充分条件是比较专门的, 并且本质上是与所考察的级数的某些成分的实值性有关. 但是这些条件比魏尔斯特拉斯检验法精细些, 因为利用它们能够研究收敛但不绝对收敛的那些级数.

定义 5 称由形如 $f: X \to \mathbb{C}$ 的函数构成的函数族 $\mathfrak{F}$ 是集 $E \subset X$ 上的一致有界函数族, 如果存在常数 $M \in \mathbb{R}$, 对任何一个 $f \in \mathfrak{F}$, 关系式 $\sup\limits_{x\in E}|f(x)| \leqslant M$ 成立.

定义 6 称函数序列 $\{b_n : X \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ 在集 $E \subset X$ 上是不减的 (不增的), 如果对每个 $x \in E$, 数列 $\{b_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ 是不减的 (不增的). 集合上不减的和不增的函数序列统称为该集合上的单调序列.

①在特殊情况 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ 时, 认为 $R = 0$, 此时圆退化为一点 z_0.

我们记得 (必要时可参看第 6 章,§2, 第 3 段) 以下等式, 它叫做阿贝尔变换:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \tag{4}$$

其中 $a_k = A_k - A_{k-1}, k = n, \cdots, m$.

如果 $b_n, b_{n+1}, \cdots, b_m$ 是单调实数列, 那么, 即使 $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_m$ 是复数或某个赋范空间中的向量, 根据恒等式 (4) 能得到下面的我们所需要的估计式:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \max\{|b_n|, |b_m|\}. \tag{5}$$

◀ 事实上,

$$\begin{aligned} &|A_m b_m| + |A_{n-1} b_n| + \left| \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right| \\ \leqslant &\max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \left(|b_m| + |b_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \\ = &\max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot (|b_m| + |b_n| + |b_n - b_m|) \\ \leqslant &4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \max\{|b_n|, |b_m|\}. \end{aligned}$$

在上述计算的等式中, 恰好利用了数列 b_k 的单调性. ▶

命题 3 (级数一致收敛的阿贝尔 – 狄利克雷检验法) 设 $a_n : X \to \mathbb{C}$ 是复函数,$b_n : X \to \mathbb{R}$ 是实函数. 为使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在集 $E \subset X$ 上一致收敛. 只要满足下面任何一对条件就可以了:

α_1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和 $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ 在 E 上一致有界;

β_1) 函数列 $b_n(x)$ 在 E 上单调且一致趋于零;

或者

α_2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 E 上一致收敛;

β_2) 函数列 $b_n(x)$ 在 E 上单调且一致有界.

◀ 对每个 $x \in E$, 由序列 $b_n(x)$ 的单调性, 可得类似于 (5) 的估计式

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}, \tag{5'}$$

其中我们取 $S_k(x) - S_{n-1}(x)$ 作为 $A_k(x)$.

如果条件 $\alpha_1), \beta_1)$ 实现, 那么, 一方面存在这样的常数 M, 使对任一 $k \in \mathbb{N}$ 和任一 $x \in E$, 有 $|A_k(x)| \leqslant M$; 另一方面, 无论怎样的 $\varepsilon > 0$, 对所有足够大的 n, m 和任

一 $x \in E$, 将成立不等式 $\max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\} < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. 因此, 从 (5) 推出, 对所有足够大的 n, m 和任一 $x \in E$, 有 $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| < \varepsilon$, 也就是说, 所考虑的级数满足一致收敛的柯西准则.

在条件 $\alpha_2), \beta_2)$ 实现的情况, 量 $\max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$ 是有界的, 同时, 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 一致收敛, 根据柯西准则, 对任意的 $\varepsilon > 0$. 对任何足够大的 n 和 $k > n$ 以及任何 $x \in E$, 有 $|A_k(x)| = |S_k(x) - S_{n-1}(x)| < \varepsilon$. 由此, 从不等式 (5) 再次推出所考虑的级数满足一致收敛的柯西准则. ▶

注 4 当函数 a_n 和 b_n 取常值时, 命题 3 化作数项级数收敛的阿贝尔–狄里克雷检验法.

例 7 我们研究当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{inx} \tag{6}$$

的收敛性.

因为

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} e^{inx}\right| = \frac{1}{n^\alpha}, \tag{7}$$

所以当 $\alpha \leqslant 0$ 时, 级数 (6) 不满足收敛性的必要条件, 从而对任一 $x \in \mathbb{R}$ 都发散. 于是, 以下认为 $\alpha > 0$.

如果 $\alpha > 1$, 那么根据魏尔斯特拉斯检验法, 由 (7) 推出级数 (6) 在整个数轴 $\mathbb{R}$ 上绝对且一致收敛.

为了研究当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时的收敛性, 利用阿贝尔–狄利克雷检验法, 令 $a_n(x) = e^{inx}, b_n(x) = \dfrac{1}{n^\alpha}$. 因 $\alpha > 0$, 常值函数 $b_n(x)$ 单调, 而且, 显然它关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛到零. 剩下来的是要研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{inx}$ 的部分和.

为了下面引用欧拉公式方便起见, 我们考虑和式 $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$, 它与我们的级数的部分和的差别仅仅是最开始的一项 1.

利用几何级数公式和欧拉公式, 当 $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ 时, 我们依次得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{n}{2}x} \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{n}{2}x + i \sin \frac{nx}{2}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

因此, 对任一 $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}, \tag{9}$$

由此根据阿贝尔 - 狄利克雷检验法推出, 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, 级数 (6) 在任何一个使得 $\inf\limits_{x\in E}\left|\sin\frac{x}{2}\right| > 0$ 的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛. 特别地, 级数 (6) 对任一 $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ 当然是收敛的. 如果 $x = 2\pi m$, 那么 $e^{in2\pi m} = 1$, 级数 (6) 化为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时它发散.

我们指出, 由上所述已能断定, 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时, 级数 (6) 在每个其闭包包含形如 $2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ 的点的集 E 上不可能一致收敛. 为确定起见, 设 $0 \in \overline{E}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时发散. 由柯西准则, 能找到 $\varepsilon_0 > 0$, 使无论取怎样的 $N \in \mathbb{N}$, 都能找到 $m \geqslant n > N$, 满足 $\left|\frac{1}{n^\alpha} + \cdots + \frac{1}{m^\alpha}\right| > \varepsilon_0 > 0$, 根据函数 e^{ikx} 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 由此可以推出, 在 E 中能找到充分靠近零的 x, 使

$$\left|\frac{e^{inx}}{n^\alpha} + \cdots + \frac{e^{imx}}{m^\alpha}\right| > \varepsilon_0.$$

但由级数一致收敛的柯西准则. 这表示在集 E 上级数 (6) 不能一致收敛.

除上面所说的还能发现, 从等式 (7) 看出, 级数 (6) 当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时不绝对收敛.

注 5 注意到下面事实对今后是有益的. 把 (8) 中的实部与虚部分离, 我们得到如下的关系式:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx = \frac{\cos\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx = \frac{\sin\frac{n}{2}x \cdot \sin\frac{n+1}{n}x}{\sin\frac{x}{2}}, \tag{11}$$

其中 $x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

作为阿贝尔 - 狄利克雷检验法应用的又一个例子, 我们来证明如下的

命题 4 (阿贝尔第二定理) *如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 在某点 $\zeta \in \mathbb{C}$ 收敛, 那么它在以 z_0, ζ 为端点的闭区间上一致收敛.*

◀ 所指区间上的点可表为 $z = z_0 + (\zeta - z_0)t$ 的形式, 其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$. 用此表达式代换所给幂级数中的 z, 得到级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - z_0)^n t^n$, 由条件知数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - z_0)^n$ 收敛, 而函数列 t^n 在区间 $[0, 1]$ 上单调且一致地以 1 为界. 因此, 满足阿贝尔 - 狄利克雷检验法的条件 $\alpha_2), \beta_2)$, 从而命题 4 得证. ▶

练 习

1. 研究下列级数对于各种实参数 α 的值在集 $E \subset \mathbb{R}$ 上的收敛性.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^{\alpha}}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^{\alpha}}$

2. 证明下列级数在指定集合上一致收敛.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$, 当 $0 \leqslant x < +\infty$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$, 当 $0 \leqslant x < +\infty$.

3. 证明. 如果狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{n^x}$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 收敛, 那么它在集合 $x \geqslant x_0$ 上一致收敛, 而且, 如果 $x > x_0 + 1$, 那么级数绝对收敛.

4. 验证. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 虽然在 $\mathbb{R}$ 上收敛但不一致收敛.

5. a) 以练习 2 的级数为例验证: 级数一致收敛的魏尔斯特拉斯检验法中的条件是级数一致收敛的充分但非必要的条件.

b) 构造级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, 使它的项在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上非负连续, 它在此区间上一致收敛,同时, 由 $M_n = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |a_n(x)|$ 组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 发散.

6. a) 叙述注 4 所说的级数收敛性的阿贝尔 – 狄利克雷检验法.

b) 试证, 其中 $\{b_n\}$ 的单调性条件可以减弱一些, 只要求序列 $\{b_n\}$ 在作了修正 $\{\beta_n\}$ 后是单调的, 这里 $\{\beta_n\}$ 构成绝对收敛级数.

7. 作为命题 4 的补充, 试证 (遵循阿贝尔), 如果幂级数在其收敛圆的某一边界点上收敛, 那么当在圆内沿不与圆周相切的方向趋于这个点时, 级数有极限.

§3 极限函数的函数性质

1. 问题的具体化

在本节中, 我们将回答 §1 中提出的问题, 即在什么条件下, 连续, 可微或可积函数族的极限是具有相同性质的函数, 又在什么条件下, 族中函数的导数或积分的极限与族中函数的极限的导数或积分一致.

为了阐明所提问题的数学含义, 我们考虑, 例如连续性与极限过程的关系.

设 $n \to \infty$ 时, $f_n(x) \to f(x), x \in \mathbb{R}$, 又设所有函数序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 连续. 我们对极限函数 f 在 x_0 的连续性感兴趣. 为了回答这个问题, 我们需要验

证等式 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 这个等式按原序列的术语可改写成 $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$, 或者, 考虑到已假定函数 f_n 在 x_0 连续, 把它写成下面必须验证的形式

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)). \tag{1}$$

在这个等式的左边, 首先关于基底 $n\to\infty$ 取极限, 而后再关于基底 $x\to x_0$ 取极限. 而在这等式右边, 关于同样基底但按不同次序取极限.

研究多变量函数时, 我们看到过, 等式 (1) 绝不是总成立的. 在对上面两节例子的分析中我们也看到了, 连续函数序列的极限并不总是连续函数.

微分法与积分法是一些特殊的极限运算. 因此, 问题在于, 如果对函数族中函数先微分 (积分) 而后关于函数族的参变量取极限, 与先求函数族的极限函数, 而后对它微分 (积分), 是否得到同样的结果. 问题重新归结为检验两个极限过程改变次序的可能性.

2. 两个极限过程可交换的条件

我们将证明, 在逐次完成的两个极限过程中, 只要有一个是一致的,则两极限过程的次序就可以调换.

定理 1 *设 $\{F_t : t\in T\}$ 是由依赖于参数 t 的函数 $F_t : X\to\mathbb{C}$ 构成的函数族, $\mathfrak{B}_X$ 是 X 中的基. $\mathfrak{B}_T$ 是 T 中的基. 如果关于基 $\mathfrak{B}_T$, 这个函数族在 X 上一致收敛到函数 $F : X\to\mathbb{C}$, 而对每个 $t\in T, \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} f_t(x) = A_t$ 存在, 那么两个累次极限 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_X}(\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} F_t(x))$ 与 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_T}(\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F_t(x))$ 都存在且成立等式*

$$\lim_{\mathfrak{B}_X}(\lim_{\mathfrak{B}_T} F_t(x)) = \lim_{\mathfrak{B}_T}(\lim_{\mathfrak{B}_X} F_t(x)). \tag{2}$$

这个定理很适宜写成下面的图示

$$\begin{array}{ccc} F_t(x) & \overset{}{\underset{\mathfrak{B}_T}{\rightrightarrows}} & F(x) \\ {\scriptstyle\mathfrak{B}_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\exists\,\mathfrak{B}_X} \\ A_t & \overset{\exists}{\underset{\mathfrak{B}_T}{\longrightarrow}} & A \end{array} \tag{3}$$

图中对角线上方是指出了定理的条件, 而下方是它的结论. 等式 (2) 表明. 这个图是可交换的, 即最终结果 A 不依赖于究竟是先按图上方, 然后按图的右方取极限, 还是先按图左方, 然后按图下方取极限.

我们来证明所述定理.

◀ 因在 X 上关于基 $\mathfrak{B}_T$ 有 $F_t \rightrightarrows F$, 根据柯西准则, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 能找到 $B_T\in\mathfrak{B}_T$, 使得对任何 $t_1, t_2\in B_T$ 和任何 $x\in X$, 都满足不等式

$$|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

在这个不等式中, 关于基 $\mathfrak{B}_X$ 取极限, 得

$$|A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

它对任何 $t_1, t_2 \in B_T$ 都是正确的. 由此根据函数极限存在的柯西准则可推出, 函数 A_t 关于基 $\mathfrak{B}_T$ 存在极限 A. 现在, 我们来验证 $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F(x)$.

固定 $t_2 \in B_T$, 可以找到 $B_X \in \mathfrak{B}_X$, 使对任一 $x \in B_X$, 有不等式

$$|F_{t_2}(x) - A_{t_2}| < \varepsilon \tag{6}$$

成立. 不改变 t_2, 在 (4),(5) 中, 关于参数 t_1, 按基 $\mathfrak{B}_T$ 取极限. 就得到

$$|F(x) - F_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

$$|A - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon, \tag{8}$$

并且不等式 (7) 对任意 $x \in X$ 都成立.

比较不等式 (6)—(8), 利用三角形不等式得到, 对任一 $x \in B_X$, 有

$$|F(x) - A| < 3\varepsilon.$$

这就证明了 $A = \lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F(x)$. ►

注 1 正如证明中看到的那样, 定理 1 对于在任一完备度量空间 Y 中取值的函数 $F_t : X \to Y$ 仍然有效.

注 2 如果把极限 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_T} A_t = A$ 的存在性补充到定理 1 的条件中, 那么, 正如证明中看到的那样, 即使不假设函数 $F_t : X \to Y$ 的值所在空间 Y 具有完备性, 也能得到等式 $\lim\limits_{\mathfrak{B}_X} F(x) = A$.

3. 连续性与极限过渡

我们将证明, 如果在给定集合上定义、且在该集合的一点连续的一族函数,在这个集合上一致收敛, 则极限函数在该点也连续.

定理 2 *设有由依赖于参数 t 的函数 $f_t : X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族 $\{f_t, t \in T\}$, 而 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基. 如果在 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 有 $f_t \rightrightarrows f$, 且每个函数 f_t 都在 $x_0 \in X$ 连续, 那么, 函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 在 x_0 也连续.*

◄ 在我们的情形中, 图 (3) 具有如下具体形式

$$\begin{array}{ccc} f_t(x) & \overset{}{\underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows}} & f(x) \\ {\scriptstyle x\to x_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\to x_0} \\ f_t(x_0) & \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} & f(x_0) \end{array}$$

这里除右端竖直线所示的极限外, 其他所有极限过程都是定理 2 条件本身给出的. 我们所需要的定理 1 的那个不平常的结果正是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ►

注 3 我们不具体说明集 X 的性质, 事实上, 这个集合可以是仅仅定义了基底 $x \to x_0$ 的拓扑空间. 函数 f_t 可以在任何一个度量空间中取值, 从注 2 知, 这个空间甚至不必是完备的.

推论 1 *定义在集合上的连续的函数序列, 如果在该集合上一致收敛, 那么极限函数在这个集合上也连续.*

推论 2 *由在集合上连续的函数组成的级数, 如果在该集合上一致收敛, 那么级数的和在这个集合上也连续.*

作为能利用所得结果的例证, 我们考虑

例 1 级数求和的阿贝尔方法 (阿贝尔求和法).

把推论 2 和阿贝尔第二定理 (§2 定理 4) 相比较, 就得出以下结果:

命题 1 *如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 在点 ζ 收敛, 那么它在从点 z_0 到点 ζ 的区间 $[z_0, \zeta]$ 上一致收敛, 且级数的和在此区间上连续.*

特别地, 如果数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛, 那么幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在实轴上的区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上一致收敛, 且它的和 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在该区间上连续. 因为 $S(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, 这样一来, 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛, 则成立等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{9}$$

有趣的是, 在关系式 (9) 中, 甚至有时其左端按通常对它的理解是发散的, 而右端却是有意义的. 例如, 与发散级数 $1-1+1-\cdots$ 相应的级数 $x - x^2 + x^3 - \cdots$, 在 $|x| < 1$ 时收敛到函数 $x/(1+x)$, 当 $x \to 1$ 时, 这个函数有极限 $1/2$.

所谓级数求和的*阿贝尔方法*是在等式 (9) 右边有确定的值时, 就规定它是等式 (9) 左边的值. 我们已经看到, 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 在传统意义下收敛, 那么它的和与它

按阿贝尔求和法得到的结果一致, 此外, 例如按通常意义发散的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, 按阿贝尔方法的和是它的部分和的自然平均值 1/2.

与所分析的例 1 相联系的更进一步问题, 可以在习题 5—8 中找到.

例 2 当初在讨论泰勒公式时, 我们证明了, 当 $|x|<1$ 时, 有展开式

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots. \tag{10}$$

可以验证, 当 $\alpha>0$ 时, 数项级数

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+\cdots$$

收敛. 因此, 按阿贝尔定理, 若 $\alpha>0$, 级数 (10) 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致收敛, 但函数 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=1$ 连续, 因此能断言, 如果 $\alpha>0$, 那么等式 (10) 当 $x=1$ 时成立.

特别地, 能断言, 如果 $\alpha>0$, 有

$$(1-t^2)^\alpha = 1-\frac{\alpha}{1!}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^4-\cdots+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^{2n}+\cdots, \tag{11}$$

且这个级数在区间 $[-1,1]$ 上一致收敛到 $(1-t^2)^\alpha$.

在 (11) 中当 $|x|\leqslant 1$ 时, 令 $\alpha=\frac{1}{2}, t^2=1-x^2$ 得到

$$|x| = 1-\frac{\frac{1}{2}}{1!}(1-x^2)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(1-x^2)^2-\cdots, \tag{12}$$

即右边的多项式级数在区间 $[-1,1]$ 上一致收敛到函数 $|x|$.

令 $P_n(x):=S_n(x)-S_n(0)$, 这里 $S_n(x)$ 是这个级数的前 n项部分和. 我们得到, 无论给定怎样的精度 $\varepsilon>0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$, 使得 $P(0)=0$ 且

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}||x|-P(x)|<\varepsilon \tag{13}$$

现在回到一般的定理.

我们证明了, 函数的连续性在一致极限过程中得以保持. 但是极限过程的一致性条件仅仅是保障连续函数列的极限仍是连续函数的充分条件 (参看 §1 的例 8,9), 同时有那样的具体情形, 从连续函数序列收敛到连续函数的假定, 能推出此收敛是一致的.

命题 2 (迪尼[①]定理) 如果紧集上的连续函数列单调收敛到连续函数, 那么, 这个收敛性是一致的.

[①] 迪尼 (B.Dini)(1845—1918)—— 意大利数学家. 他最著名的工作是在函数论方面.

◀ 为确定起见, 设紧集 K 上的连续函数列 f_n 单调不减地趋于连续函数 f. 任意给定 $\varepsilon > 0$, 对任一 $x \in K$, 能找到足码 n_x, 使 $0 \leqslant f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon$. 因函数 f, f_n 在 K 上连续, 不等式 $0 \leqslant f(\xi) - f_{n_x}(\xi) < \varepsilon$ 在点 $x \in K$ 的某个邻域 $U(x)$ 内仍然有效. 从紧集 K 的由这样的邻域构成的覆盖中能找到有限覆盖 $U(x_1), \cdots, U(x_k)$, 然后固定足码 $n(\varepsilon) = \max\{n_{x_1}, \cdots, n_{x_k}\}$. 这时, 对任一 $n > n(\varepsilon)$, 由序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 的不减性, 在任一点 $\xi \in K$, 有 $0 \leqslant f(\xi) - f_n(\xi) < \varepsilon$. ▶

推论 3 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的项是紧集 K 上的非负连续函数 $a_n : K \to \mathbb{R}$. 并且级数在 K 上收敛到连续函数, 那么它在 K 上一致收敛.

◀ 易见, 级数的部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ 满足迪尼定理的条件. ▶

例 3 我们来证明. 函数序列 $f_n(x) = n(1 - x^{1/n})$ 当 $n \to \infty$ 时, 在位于间隔 $0 < x < \infty$ 内的每个闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛到函数 $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$.

◀ 函数 $x^t = e^{t \ln x}$ 当 $x > 0$ 固定时关于 t 是凸的, 因此, 比值 $(x^t - x^0)/(t - 0)$ (作为弦的角系数) 当 $t \to +0$ 时是不增的且趋于 $\ln x$.

因此, 对于 $x > 0$, 当 $n \to +\infty$ 时有 $f_n(x) \nearrow \ln \dfrac{1}{x}$. 由此, 根据迪尼定理得, 上述 $f_n(x)$ 到 $\ln \dfrac{1}{x}$ 的收敛性, 在每一个闭区间 $[a, b] \subset]0, +\infty[$ 上是一致的. ▶

我们指出, 例如在区间 $0 < x \leqslant 1$ 上显然不是一致收敛的, 因为函数 $\ln \dfrac{1}{x}$ 在该区间上无界, 可是, 每个函数 $f_n(x)$ 在该区间上都有界 (依赖于常数 n).

4. 积分法与极限过渡

我们来证明, 如果闭区间上的可积函数族在该区间上一致收敛, 则极限函数也可积, 且在该区间上的积分等于函数族中函数的积分的极限.

定理 3 给定由定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上且依赖于参数 $t \in T$ 的函数 $f_t : [a, b] \to \mathbb{C}$ 构成的函数族 $\{f_t, t \in T\}$, 设 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基. 如果族中函数在区间 $[a, b]$ 上可积, 且在 $[a, b]$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 有 $f_t \rightrightarrows f$, 那么极限函数 $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ 在区间 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\mathfrak{B}} \int_a^b f_t(x) dx.$$

◀ 设 $p = (P, \xi)$ 是区间 $[a, b]$ 上的带标志点 $\xi = \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ 的分划 (P 是 $[a, b]$ 的分划). 考虑积分和 $F_t(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_t(\xi_i) \Delta x_i, t \in T$ 以及 $F(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$, 估计差式 $F(p) - F_t(p)$. 因为在 $[a, b]$ 上关于基 $\mathfrak{B}$, 有 $f_t \rightrightarrows f$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 能找到基 $\mathfrak{B}$ 中这样的 B, 对任一 $t \in B$ 和任一 $x \in [a, b]$, 都满足不等式 $|f(x) - f_t(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$.

因此, 当 $t \in B$ 时, 有

$$|F(p) - F_t(p)| = \left|\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) - f_t(\xi_i))\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i) - f_t(\xi_i)|\Delta x_i < \varepsilon.$$

这个估计式不仅对每个 $t \in B$, 而且对集合 $\mathfrak{P} = \{(P, \xi)\}$ 中任何一个带标志点的分划 p 都是正确的. 这样一来, 在 $\mathfrak{P}$ 上关于基 $\mathfrak{B}$ 有 $F_t \rightrightarrows F$. 现在, 在 $\mathfrak{P}$ 中取通常的基 $\lambda(P) \to 0$, 根据定理 1, 可得, 下图是可换的:

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\Delta x_i =: F_t(p) & \rightrightarrows & F(p) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
{\scriptstyle \lambda(P)\to 0}\downarrow & \diagup & \exists \downarrow {\scriptstyle \lambda(P)\to 0} \\
\int_a^b f_t(x)dx =: A_t & \longrightarrow & A := \int_a^b f(x)dx \ ,
\end{array}$$

这就证明了定理 3. ►

推论 4 如果由区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 上可积函数组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在这个区间上一致收敛, 那么它的和在区间 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

例 4 在这个例子中, 当写 $\dfrac{\sin x}{x}$ 时, 将认为当 $x = 0$ 时这个比值等于 1.

我们曾指出, 函数 $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t} dt$ 不是初等的. 但是, 利用已证明的定理能得到它用幂级数表示的足够简单的表达式.

为此, 注意到

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} \tag{14}$$

且右边级数在任一区间 $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ 上一致收敛. 级数的一致收敛性由魏尔斯特拉斯强函数检验法推出, 因为, 当 $|t| \leqslant a$ 时, $\dfrac{|t|^{2n}}{(2n+1)!} \leqslant \dfrac{a^{2n}}{(2n+1)!}$, 而数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^{2n}}{(2n+1)!}$ 收敛.

根据推论 4, 现在可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}(x) &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} dt\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.
\end{aligned}$$

顺便指出, 所得到的级数在数轴的任一区间上也一致收敛, 因此, 对自变量 x 变化的任何区间 $[a,b]$, 以及任意指定的容许绝对误差, 都能挑选出级数的部分和 —— 多项式, 使得在区间 $[a,b]$ 的任何一点, 可用这个多项式计算 $\mathrm{Si}(x)$, 其误差不超过给定的误差界.

5. 微分法与极限过渡

定理 4 给定由定义在凸有界集 X(属于 $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 或任一线性赋范空间) 上且依赖于参数 t 的函数 $f_t: X \to \mathbb{C}$ 构成的函数族 $\{f_t, t \in T\}$, 设 $\mathfrak{B}$ 是 T 中的基, 如果族中函数在 X 上可微, 导函数族 $\{f'_t, t \in T\}$ 在 X 上一致收敛到某个函数 $\varphi: X \to \mathbb{C}$, 而原函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 至少在一点 $x_0 \in X$ 收敛, 那么, 它在整个集合 X 上一致收敛到可微函数 $f: X \to \mathbb{C}$, 且 $f' = \varphi$.

◀ 我们首先证明. 函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 在集 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛. 在下面估计中我们利用了有限增量定理:

$$\begin{aligned}|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| &\leqslant |(f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)) - (f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0))| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| \\ &\leqslant \sup_{\xi \in [x_0, x]} |f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)||x - x_0| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| \\ &= \Delta(x, t_1, t_2).\end{aligned}$$

由条件知, 函数族 $\{f'_t, t \in T\}$ 在 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛, 量 $f_t(x_0)$ 作为 t 的函数关于同一基 $\mathfrak{B}$ 有极限, 而 $|x - x_0|$ 当 $x \in X$ 时是有界量. 由函数族 f'_t 一致收敛柯西准则的条件的必要性和函数 $f_t(x_0)$ 的极限的存在性, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 能找到 $B \in \mathfrak{B}$, 使对任何 $t_1, t_2 \in B$ 和任何 $x \in X$, 有 $\Delta(x, t_1, t_2) < \varepsilon$. 而根据上边的估计, 这表明函数族 $\{f_t, t \in T\}$ 也满足柯西准则条件. 因而它在 X 上关于基 $\mathfrak{B}$ 一致收敛到某个函数 $f: X \to \mathbb{C}$.

再次利用有限增量定理, 我们现在得到如下估计式

$$\begin{aligned}&|(f_{t_1}(x+h) - f_{t_1}(x) - f'_{t_1}(x)h) - (f_{t_2}(x+h) - f_{t_2}(x) - f'_{t_2}(x)h)| \\ &= |(f_{t_1} - f_{t_2})(x+h) - (f_{t_1} - f_{t_2})(x) - (f_{t_1} - f_{t_2})'(x)h| \\ &\leqslant \sup_{0<\theta<1} |(f_{t_1} - f_{t_2})'(x+\theta h)||h| + |(f_{t_1} - f_{t_2})'(x)||h| \\ &= \left(\sup_{0<\theta<1} |f'_{t_1}(x+\theta h) - f'_{t_2}(x+\theta h)| + |f'_{t_1}(x) - f'_{t_2}(x)|\right)|h|.\end{aligned}$$

根据函数族 $\{f'_t, t \in T\}$ 在 X 上的一致收敛性, 当 $x, x+h \in X$ 时成立的这些估计式, 这就证明了, 对于固定的 $x \in X$, 由函数

$$F_t(h) = \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - f'_t(x)h}{|h|}$$

构成的函数族 $\{F_t, t \in T\}$ 关于基 $\mathfrak{B}$ 对所有满足 $h \neq 0$ 与 $x+h \in X$ 的 h 的值一致收敛.

注意到, 由函数 f_t 在 $x \in X$ 的可微性知, 当 $h \to 0$ 时, 有 $F_t(h) \to 0$, 而由于关于基 $\mathfrak{B}$, 有 $f_t \to f, f_t' \to \varphi$, 我们得到,关于基 $\mathfrak{B}$, 有

$$F_t(h) \to F(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|}.$$

利用定理 1, 现在能写出交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{f_t(x+h) - f_t(x) - f_t'(x)h}{|h|} =: & F_t(h) & \underset{\mathfrak{B}}{\rightrightarrows} & F(h) & := \dfrac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|} \\
& {\scriptstyle h\to 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h\to 0} & \\
& 0 & \underset{\mathfrak{B}}{\longrightarrow} & 0 &
\end{array}$$

当 $h \to 0$ 时, 右端极限过程表明, 函数 f 在 $x \in X$ 可微且 $f'(x) = \varphi(x)$. ►

推论 5 设由在有界凸集 X(它属于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 或任一线性赋范空间) 上可微的函数 $f_n : X \to \mathbb{C}$ 组成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 至少在一点 $x_0 \in X$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 在 X 上一致收敛, 那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 X 上也一致收敛, 它的和在 X 上可微, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

这可由定理 4, 级数的和与一致收敛的定义, 并注意微分算子的线性性质得到.

注 4 定理 3,4 及其推论的证明, 对于函数 $f_t : X \to Y$ 的值域 Y 是任何一个完备的线性赋范空间的情形也是有效的, 例如,Y 可以是 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, C[a,b]$ 等等. 定理 4 中函数 f_t 的定义域 X 也可以是任何一个线性赋范空间中适当的子集, 特别地, X 可以属于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$. 对于实变量的实值函数 (在对收敛性的附加要求下), 这些定理的证明可以做得更简单些. (参看练习 11).

作为定理 2—4 的应用例子, 我们来证明以下无论在理论上还是在具体计算中都有广泛应用的.

命题 3 如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛圆 $K \subset \mathbb{C}$ 不缩成唯一的一个点 $z = z_0$, 那么在圆 K 内, 这个级数的和 $f(z)$ 可微, 且

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}. \tag{15}$$

此外，函数 $f: K \to \mathbb{C}$ 沿任何一条光滑道路 $\gamma: [0,1] \to K$ 可积，而当 $[0,1] \ni t \overset{\gamma}{\mapsto} z(t) \in K, z(0) = z_0, z(1) = z$ 时，有

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}. \tag{16}$$

注 5 这里 $\int_\gamma f(z)dz := \int_0^1 f(z(t))z'(t)dz$. 特别地，如果在实轴 $\mathbb{R}$ 的区间 $-R < x - x_0 < R$ 上有等式 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，那么

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

◀ 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n-1]{n|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$，那么，从柯西 – 阿达马公式 (§2 的定理) 推出，由幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 逐项微分得到的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ 与原幂级数有相同的收敛圆 K. 但是按 §2 的同一个定理；级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ 在任何一个圆 $K_q \subset K$ 中一致收敛. 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 显然在 $z = z_0$ 收敛，由命题 5 就得到了 (15) 式，于是，证明了幂级数可以逐项微分.

现在验证，它也可以逐项积分.

如果 $\gamma: [0,1] \to K$ 是 K 中光滑道路，则存在这样的圆 K_q，使 $\gamma \subset K_q, K_q \subset K$. 在 K_q 上收敛的幂级数一致收敛，因此在等式

$$f(z(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z(t)-z_0)^n$$

中，右边的由在区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上连续函数组成的级数，在这个区间上一致收敛到连续函数 $f(z(t))$.

用区间 $[0,1]$ 上连续的函数 $z'(t)$ 乘这个等式，既不破坏等式本身，也不破坏级数的一致收敛性，因此，据定理 3 得到

$$\int_0^1 f(z(t))z'(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 c_n(z-z_0)^n z'(t)dt$$

但是

$$\begin{aligned}\int_0^1 (z(t)-z(0))^n z'(t)dt &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 d(z(t)-z(0))^{n+1} = \frac{1}{n+1}(z(1)-z(0))^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}(z(1)-z_0)^{n+1},\end{aligned}$$

于是我们得到了等式 (16). ▶

显然在展开式 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 中,$c_0=f(z_0)$, 那么, 逐次应用等式 (15), 重又得到已知的关系式 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. 这些关系式表明. 幂级数由它本身的和函数唯一确定, 且此幂级数就是它的和的泰勒级数.

例 5 贝塞尔函数 $J_n(x), n\in\mathbb{N}$ 是贝塞尔[①]方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

的解. 我们试图寻找这个方程 (例如当 $n=0$ 时) 的幂级数形式 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的解. 依次利用公式 (15). 经过初等变换, 得到关系式

$$c_1+\sum_{k=2}^{\infty}(k^2c_k+c_{k-2})x^{k-1}=0.$$

由此式, 根据具有给定和的幂级数的唯一性, 得到

$$c_1=0,\quad k^2c_k+c_{k-2}=0,\quad k=2,3,\cdots.$$

由此容易看出 $c_{2k-1}=0, k\in\mathbb{N}$, 而 $c_{2k}=(-1)^k\dfrac{c_0}{(k!)^22^{2k}}$. 如果认为 $J_0(0)=1$, 那么我们就得到关系式

$$J_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^22^{2k}}.$$

写出的级数在整个直线 $\mathbb{R}$(或在全平面 $\mathbb{C}$) 上收敛, 因此, 得到这个级数的上述具体形式的运算都是合理的.

例 6 在例 5 中, 我们曾叙述过方程的幂级数形式的解. 如果级数是给定的, 那么利用公式 (15) 能直接检验级数的和是不是给定方程的解. 因此, 用直接计算就能确信, 高斯引进的函数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

(*超几何级数*) 当 $|x|<1$ 时是有定义的, 且满足*超几何微分方程*

$$x(x-1)y''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'+\alpha\beta y=0.$$

最后指出, 与定理 2,3 不同, 在定理 4 中并不要求原来的函数族收敛, 而是要求导数族一致收敛, 我们已经得到 (参看 §1, 例 2) 函数序列 $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin n^2x$ 能一致收敛到可微函数 $f(x)\equiv0$, 可同时导函数序列 $f_n'(x)$ 不收敛到 $f'(x)$. 问题在于, 导数

---
① 贝塞尔 (F.V.Bessel) (1784—1846) —— 德国天文学家.

是函数变化的速度特征, 而不是函数值的大小, 哪怕函数按其绝对值变化是很小的, 导函数也可以变化很大, 这可在研究大频率小振幅的情形时出现. 正是这样一种情境成了魏尔斯特拉斯构造处处连续且处处不可微函数的例子的基础. 这个例子是用级数形式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$ 给出. 显然, 当 $0<a<1$ 时, 它在整个直线 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 魏尔斯特拉斯证明了, 如果选取满足条件 $ab>1+\frac{3}{2}\pi$ 的参数 b, 那么, 一方面, f 作为由连续函数组成的级数的一致收敛极限将是连续的; 另一方面, 它无论在哪一点 $x\in\mathbb{R}$ 都没有导数. 最后这个断言的正式的验证是十分繁琐的. 因此, 希望得到连续但不可微函数的更简单的例子的读者, 可参看第 5 章 §1 的习题 5.

练 习

1. 利用幂级数, 求方程 $y''(x)-y(x)=0$ 满足以下条件 a) 或 b) 的解:

a) $y(0)=0, y(1)=1$;

b) $y(0)=1, y(1)=0$.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n(n+1)}$ 的和.

3. a) 验证. 用级数形式给定的函数

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

是例 5 中带有指标 $n\geqslant 0$ 的贝塞尔方程的解.

b) 验证, 例 6 中的超几何级数给出超几何微分方程的解.

4. 导出下面对计算适用的第一和第二型全椭圆积分当 $0<k<1$ 时的展开式, 并说明理由:

a)
$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2k^{2n}\right);$$

b)
$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right).$$

5. 求

a) $\sum\limits_{k=0}^{n}r^ke^{ik\varphi}$;

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}r^k\cos k\varphi$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n}r^k\sin k\varphi$.

证明当 $|r|<1$ 时,

d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}r^ke^{ik\varphi}=\dfrac{1}{1-r\cos\varphi-ir\sin\varphi}$;

e) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}$;

f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}$.

用级数求和的阿贝尔方法验证:

g) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi = 0$, 如果 $\varphi \neq 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\varphi$, 如果 $\varphi \neq 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

6. 考虑级数的乘积

$$(a_0+a_1+\cdots)(b_0+b_1+\cdots)=(c_0+c_1+\cdots).$$

其中 $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$. 利用命题 1 证明: 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ 分别收敛于 A,B,C, 那么 $AB=C$.

7. (级数求和的切萨罗方法) 设 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, \sigma_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}s_k$, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = A$. 则称级数在切萨罗[①]意义下可和, 准确地说, 称级数 $(c,1)$ 可和于 A, 记作 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = A(c,1)$.

a) 验证: $\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots(c,1)$.

b) 证明: $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k$.

c) 验证: 如果在通常意义下有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = A$, 那么, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = A(c,1)$.

d) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n)$ 存在, 则称此极限是级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 在 $(c,2)$ 意义下的和. 仿此可定义任何阶 r 的 (c,r) 和, 试证: 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = A(c,r)$, 那么, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = A(c,r+1)$.

e) 试证: 如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k = A(c,1)$, 那么, 这个级数在阿贝尔方法下的和也是 A.

8. a) "陶伯 (Tauber) 型定理" —— 这是一类定理的总的名称, 它们能在某些附加的正则性条件下, 根据所考察的量的某些均值性质对这个量本身的性质作出判断. 有关级数的切萨罗求和法的下述断言是这类定理的一个范例. 你们可以尝试着按照哈代[②] 的方法去证明它.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = A(c,1)$ 且 $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在普通意义下收敛到同一个和.

b) 陶伯[③]定理本身属于级数的阿贝尔求和法, 该定理如下:

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 当 $0<x<1$时收敛, 且 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n = A$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$, 那么, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在通常意义下也收敛于 A.

[①] 切萨罗 (A. Cesàro) (1859—1906) —— 从事分析与几何研究的意大利数学家.

[②] 哈代 (T. G. Hardy) (1877—1947) —— 英国数学家. 主要的工作是在数论和函数论方面的贡献.

[③] 陶伯 (A. Tauber) (1866— 卒年不详) —— 奥地利数学家. 主要研究数论和函数论.

9. 注意到下面的事实是有益的, 关于积分号下取极限有那样一些定理, 它们给出了远比定理 3 自由得多且保证这种运算合理的充分条件. 这些定理是勒贝格积分理论的基本成果之一. 当函数按黎曼意义在区间 $[a,b]$ 上可积时, 即 $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, 这个函数也属于按勒贝格意义可积的函数空间 $\mathfrak{L}[a,b]$, 并且 f 的黎曼与勒贝格积分值 $(R)\int_a^b f(x)dx$ 与 $(L)\int_a^b f(x)dx$ 是相同的.

一般地, 空间 $\mathfrak{L}[a,b]$ 是空间 $\mathfrak{R}[a,b]$ 按积分度量的完备化 (更准确地说是 $\widetilde{\mathfrak{R}}[a,b]$), 而积分 $(L)\int_a^b$ 是线性函数 $(R)\int_a^b$ 从 $\mathfrak{R}[a,b]$ 到 $\mathfrak{L}[a,b]$ 的延拓.

勒贝格控制收敛定理断言: *给定由函数 $f_n \in \mathfrak{L}[a,b]$ 构成的序列 $\{f_n, n\in\mathbb{N}\}$, 如果存在它的一个非负控制函数 $F \in \mathfrak{L}[a,b]$, 即对 $[a,b]$ 上几乎所有 x, 有 $|f_n(x)| \leqslant |F(x)|$, 那么从对区间 $[a,b]$ 上几乎所有 x 点有 $f_n \to f$ 的收敛性可以得出 $f \in \mathfrak{L}[a,b]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int_a^b f_n(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$.*

a) 举例说明, 即使序列 $\{f_n, n\in\mathbb{N}\}$ 的所有函数在区间 $[a,b]$ 上有同一个常数界 M, 从条件 $f_n \in \mathfrak{R}[a,b], n\in\mathbb{N}$, 以及在区间 $[a,b]$ 上所有点有 $f_n \to f$, 也不能推出 $f \in \mathfrak{R}[a,b]$(参看 §1, 例 5).

b) 试根据所叙述的积分 $(R)\int_a^b$ 与 $(L)\int_a^b$ 的相互关系和勒贝格定理证明: 如果在习题 a) 的条件下, 还知道 $f\in\mathfrak{R}[a,b]$, 那么 $(R)\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx$. 这是定理 3 的本质性的加强.

c) 可以再叙述一个适合于黎曼积分的勒贝格单调收敛定理:
如果由函数 $f_n \in \mathfrak{R}[a,b]$ 构成的序列 $\{f_n, n\in\mathbb{N}\}$ 单调地收敛于零, 即 $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$, 且对任意 $x\in[a,b]$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $f_n(x)\to 0$, 那么, $(R)\int_a^b f_n(x)dx \to 0$.

试证这个断言, 在必要时可以利用下面有益的事实.

d) 设 $f\in\mathfrak{R}[0,1], |f|\leqslant M$ 且 $\int_0^1 f(x)dx \geqslant \alpha > 0$, 那么集合 $E = \left\{x\in[0,1] \middle| f(x) \geqslant \dfrac{\alpha}{2}\right\}$ 包含有限多个长度之和 l 不小于 $\dfrac{\alpha}{4M}$ 的区间.

这个结论的证明, 比如说, 可以利用闭区间 $[0,1]$ 的那种划分 P 中的构成区间, 它所对应的达布下和 $s(f,P)$ 满足关系式 $0 \leqslant \int_0^1 f(x)dx - s(f,P) \leqslant \dfrac{\alpha}{4}$.

10. a) 用 §1 中的例子说明: 在区间上收敛的函数序列中不是总能选出在这个区间上一致收敛的子序列.

b) 更为困难的是直接地验证, 从函数 $f_n(x) = \sin nx$ 构成的序列 $\{f_n, n\in\mathbb{N}\}$ 中不可能选出在区间 $[0,2\pi]$ 的每一点都收敛的子序列. 然而, 你可以证明, 事实确实如此 (利用习题 9b) 的结果, 以及当 $n_k < n_{k+1}$ 时成立等式 $\int_0^{2\pi}(\sin n_k x - \sin n_{k+1}x)^2dx = 2\pi \neq 0$) 这样一个事实.

c) 设 $\{f_n, n\in\mathbb{N}\}$ 是由函数 $f_n\in\mathfrak{R}[a,b]$ 构成的一致有界序列. 设

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt, \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

试证: 从序列 $\{F_n, n\in\mathbb{N}\}$ 中能够选出在区间 $[a,b]$ 上一致收敛的子序列.

11. a) 试证: 如果 $f, f_n \in \mathfrak{R}([a,b],\mathbb{R})$ 且当 $n\to\infty$ 时, 在 $[a,b]$ 上, 有 $f_n \rightrightarrows f$, 那么, 对于任

意的 $\varepsilon > 0$, 能找到这样的 $N \in \mathbb{N}$, 使对任何 $n > N$, 成立关系式

$$\left|\int_a^b (f - f_n)(x)dx\right| < \varepsilon(b - a)$$

b) 设 $f_n \in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, 试利用公式 $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt$ 证明: 如果在区间 $[a,b]$ 上,$f_n' \rightrightarrows \varphi$, 并且存在点 $x_0 \in [a,b]$, 使序列 $\{f_n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ 收敛, 那么, 由函数 f_n 构成的序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到某个函数 $f \in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$, 而且 $f_n' \rightrightarrows f' = \varphi$.

*§4 连续函数空间的紧子集和稠密子集

本节讲的是比较专门的问题, 然而它涉及的是分析中无处不在的连续函数空间. 所有这些问题, 像连续函数空间的度量①一样, 都和一致连续性概念紧紧地联系在一起的.

1. 阿尔采拉 – 阿斯柯利定理

定义 1 称定义在集合 X 上, 在度量空间 Y 中取值的一些函数 $f: X \to Y$ 构成的函数族 $\mathfrak{F}$ 是在集 X 上一致有界的函数族, 如果函数值的集合 $V = \{y \in Y | \exists f \in \mathfrak{F}, \exists x \in X(y = f(x))\}$ 在 Y 中有界.

对于数值函数或函数 $f: X \to \mathbb{R}^n$, 直截了当地说, 就是存在常数 $M \in \mathbb{R}$. 对任何 $x \in X$ 和任何函数 $f \in \mathfrak{F}$, 都有 $|f(x)| \leqslant M$.

定义 1′ 如果函数族 $\mathfrak{F}$ 中函数的取值集合 $V \subset Y$ 完全有界 (亦即, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 在 Y 中存在 V 的有限 $\varepsilon-$ 网), 则称函数族 $\mathfrak{F}$ 是完全有界的.

如果在空间 Y 中有界集和完全有界集概念一致 (例如空间 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m$ 以及一般的局部紧空间 Y 的情形), 则在 Y 中取值的函数族的一致有界和完全有界概念也一致.

定义 2 设 X, Y 是度量空间, 称由一些函数 $f: X \to Y$ 构成的函数族 $\mathfrak{F}$ 是集 X 上等度连续函数族, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x_1, x_2 \in X$ 时, 由关系式 $d_X(x_1, x_2) < \delta$ 能导出对任何函数 $f \in \mathfrak{F}$, 有$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

例 1 函数族 $\{x^n, n \in \mathbb{N}\}$ 在区间 $[0,1]$ 上不是等度连续的, 但它在任何一个形如 $[0,q], (0 < q < 1)$ 的区间上是等度连续的.

例 2 函数族 $\{\sin nx, n \in \mathbb{N}\}$ 在任何一个非蜕化区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上都不是等度连续的.

①如果你还没有完全掌握第 9 章中的一般概念, 那么, 在不损失后继内容的丰富性的情况下, 可以认为所讨论的都是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$, 或从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$, 或从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的函数.

例 3 如果由一些可微函数 f_α 构成的函数族 $\{f_\alpha:[a,b]\to\mathbb{R},\alpha\in A\}$ 是这样的, 相应的导函数族 $\{f'_\alpha,\alpha\in A\}$ 一致有界, 那么从有限增量公式就得到 $|f_\alpha(x_2)-f_\alpha(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$, 这就是说, 原来的函数族 $\{f_\alpha,\alpha\in A\}$ 等度连续.

下面的引理展示了上边引进的概念与连续函数的一致收敛性之间的联系

引理 1 *设 K,Y 是度量空间, 且 K 是紧的. 为使由连续函数 $f_n:K\to Y$ 构成的序列 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 在紧集 K 上一致收敛, 它必须完全有界且等度连续.*

◀ 设在 K 上,$f_n\rightrightarrows f$. 由 §3, 根据定理 2 推出 $f\in C(K,Y)$. 从 f 在紧集 K 上的一致连续性得出, 对任何 $\varepsilon>0$, 能找到 $\delta>0$, 使当 $x_1,x_2\in K$ 时, $(d_K(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x_1);f(x_2))<\varepsilon)$. 因此, 对这个 $\varepsilon>0$, 能找到 $N\in\mathbb{N}$, 使当 $n>N$ 时, 对任何 $x\in K$, 有 $d_Y(f(x),f_n(x))<\varepsilon$. 比较这些不等式并利用三角形不等式就得到, 对任何 $n>N$ 和 $x_1,x_2\in K$, 从 $d_K(x_1,x_2)<\delta$, 推出 $d_Y(f_n(x_1),f_n(x_2))<3\varepsilon$. 这就是说, 函数族 $\{f_n,n>N\}$ 是等度连续的. 再把由有限个在紧集 K 上连续的函数组成的等度连续族 $\{f_1,\cdots,f_N\}$ 补充进去, 就得到函数族 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 是等度连续的.

它的完全有界性可以从对 $x\in K$ 和 $n>N$ 成立的不等式 $d_Y(f(x),f_n(x))<\varepsilon$ 以及集合 $f(K)$ 和 $\bigcup\limits_{n=1}^{N}f_n(K)$ 在 Y 中的紧性得到. ▶

事实上, 有下面一般的定理成立

定理 1 (阿尔采拉 – 阿斯柯利定理) *设 $\mathfrak{F}$ 是由定义在度量紧集 K 上而在完备度量空间 Y 中取值的函数 $f:K\to Y$ 构成的函数族.*

为使 $\mathfrak{F}$ 任一序列 $\{f_n\in\mathfrak{F};n\in\mathbb{N}\}$ 都包含一致收敛的子序列, 必要且充分的条件是函数族 $\mathfrak{F}$ 完全有界且等度连续.

◀ **必要性** 如果 $\mathfrak{F}$ 不是完全有界族, 那么显然可以得到这样的函数序列 $\{f_n;n\in\mathbb{N}\},f_n\in\mathfrak{F}$, 它不是完全有界的, 从而 (参看引理) 已经不可能选出它的一致收敛的子序列.

如果函数族 $\mathfrak{F}$ 不是等度连续的, 那么可找到 $\varepsilon_0>0$, 和这样的函数列 $\{f_n\in\mathfrak{F},n\in\mathbb{N}\}$ 及点对序列 $\{(x'_n,x''_n),n\in\mathbb{N}\}$, 其中的点 x'_n,x''_n 当 $n\to\infty$ 时收敛到 $x_0\in K$, 且 $d_Y(f_n(x'_n),f_n(x''_n))\geqslant\varepsilon_0>0$. 这时, 由序列 $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ 已经不可能选出一致收敛的子序列, 这是因为由引理 1 知, 一致收敛函数序列中的函数应是等度连续的.

充分性 紧集 K 可认为是无限集, 否则的话, 论断是不证自明的. 在 K 中固定处处稠密的可数子集 E—— 序列 $\{x_n\in K,n\in\mathbb{N}\}$. 这样的集合 E 很容易找到, 例如, 对 $\varepsilon=1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$ 得到的 K 的有限 $\varepsilon-$ 网的并集.

设 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ 是族 $\mathfrak{F}$ 的任意函数序列. 这些函数在点 x_1 的值的序列 $\{f_n(x_1), n \in \mathbb{N}\}$, 根据条件, 它完全有界, 从而, 由 Y 是完备空间, 从中能选出收敛的子序列 $\{f_{n_k}(x_1), k \in \mathbb{N}\}$. 将所得到的函数列记作 $\{f_n^1; n \in \mathbb{N}\}$ 将是方便的, 指标 1 表示关于点 x_1 建立的序列.

从得到的序列又可选出子列 $\{f_{n_k}^1, k \in \mathbb{N}\}$, 它使 $\{f_{n_k}^1(x_2), k \in \mathbb{N}\}$ 也收敛, 并把它记作 $\{f_n^2; n \in \mathbb{N}\}$.

继续这个过程, 得到序列的系列 $\{f_n^k, n \in \mathbb{N}\}, k = 1, 2, \cdots$. 如果现在取对角线序列 $\{g_n = f_n^n, n \in \mathbb{N}\}$, 那么, 容易看出, 它将在处处稠密集合 $E \subset K$ 的任何一点收敛.

我们来证明, 序列 $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在紧集 K 的任何一点是收敛的, 而且收敛性在 K 上是一致的. 为此, 任意给定 $\varepsilon > 0$ 并根据族 $\mathfrak{F}$ 的等度连续性定义 2 取 $\delta > 0$. 设 $E_1 = \{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ 是 E 的有限子集, 它构成 K 的 δ- 网. 因为序列 $\{g_n(\xi_i), n \in \mathbb{N}\}, i = 1, 2, \cdots, k$ 都收敛, 所以能找到 $N \in \mathbb{N}$, 使当 $m, n \geqslant N$ 时, 有 $d_Y(g_m(\xi_i), g_n(\xi_i)) < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, k$.

对每个点 $x \in K$, 找出 $\xi_j \in E_1$, 使得 $d_X(x, \xi_j) < \delta$. 由于 $\mathfrak{F}$ 是等度连续族, 由此得到, 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 有 $d_Y(g_n(x), g_n(\xi_j)) < \varepsilon$. 利用这个不等式, 现在可以得到, 对任何 $m, n > N$, 有

$$\begin{aligned} d_Y(g_m(x), g_n(x)) &\leqslant d_Y(g_n(x), g_n(\xi_j)) + d_Y(g_m(\xi_j), g_n(\xi_j)) + d_Y(g_m(x), g_m(\xi_j)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 x 是紧集 K 中任一点, 因此, 根据柯西准则, 序列 $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ 在 K 上实际上是一致收敛的. ►

2. 度量空间 $C(K, Y)$

在紧集 K 上连续且在度量空间 Y 中取值的函数 $f: K \to Y$ 的集合 $C(K, Y)$ 的最自然的度量之一是下面的**一致收敛性度量**

$$d(f, g) = \max_{x \in K} d_Y(f(x), g(x))$$

其中 $f, g \in C(K, Y)$, 而最大值是存在的, 因为 K 是紧集. 该度量名称的来源显然与在 K 上 $d(f_n, f) \to 0 \Leftrightarrow f_n \rightrightarrows f$ 有关.

考虑到最后的关系式, 根据 §3 定理 2 和一致收敛的柯西准则, 能够推出, 具有一致收敛性度量的度量空间 $C(K, Y)$ 是完备的.

请注意, 度量空间中的相对列紧子集是这样一种集合. 从它的任何一个序列中能选出一个柯西列 (或基本列). 如果原来的度量空间是完备的. 那么这样选出的子列也是收敛的.

阿尔采拉 - 阿斯柯利定理给出了度量空间 $C(K, Y)$ 中相对列紧子集的描述.

下面我们要证明的重要定理将给出空间 $C(K,Y)$ 的各种形式的处处稠密子集的描述. 对这些子集原本的兴趣在于, 能够用它们当中的函数一致地, 也就是在 K 上以给定的任意小的绝对误差, 逼近 K 上任何一个连续函数 $f:K\to Y$.

例 4 我们还将不止一次地遇到魏尔斯特拉斯定理的经典结果, 后面引进的斯通 (Stone) 定理是它的推广. 魏尔斯特拉斯的经典结果是

定理 2 (魏尔斯特拉斯逼近定理) *如果 $f\in C([a,b],\mathbb{C})$, 那么存在由多项式 $P_n:[a,b]\to\mathbb{C}$ 构成的序列 $\{P_n, n\in\mathbb{N}\}$, 使在 $[a,b]$ 上有 $P_n\rightrightarrows f$, 这时, 如果 $f\in C([a,b],\mathbb{R})$, 那么多项式能够从 $C([a,b],\mathbb{R})$ 中选取.*

用几何语言表述, 这就是, 所有实系数多项式构成空间 $C([a,b],\mathbb{R})$ 中处处稠密的子集.

例 5 如果定理 2 还需要证明 (下面将给出) 的话, 那么根据任何一个函数 $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ 的一致连续性, 容易推出, 区间 $[a,b]$ 上分段线性的连续实函数的集合是 $C([a,b],\mathbb{R})$ 中的处处稠密子集.

注 我们指出, 如果 E_1 在 E_2 中处处稠密, 而 E_2 在 E_3 中处处稠密, 那么在同样的度量下, 显然 E_1 也将在 E_3 中处处稠密.

这就是说, 为了证明定理 2, 只要证明分段线性连续函数在相应的区间上能够用多项式任意逼近即可.

3. 斯通定理

在正式进入一般的斯通定理的讨论之前, 先给出实函数情形下定理 2(魏尔斯特拉斯) 的证明, 它对理解以后的内容是有益的.

◄ 首先注意, 如果 $f,g\in C([a,b],\mathbb{R}), \alpha\in\mathbb{R}$ 且函数 f,g 能用多项式一致逼近 (以任意精度), 那么区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f+g, f\cdot g, \alpha f$ 也能用多项式一致逼近.

在区间 $[-1,1]$ 上, 如 §3 例 2 指出的那样, 函数 $|x|$ 能用多项式 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 一致逼近. 因此, 相应的多项式序列 $M\cdot P_n(x/M)$ 在区间 $|x|\leqslant M$ 上也一致逼近函数 $|x|$.

如果 $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ 且 $M=\max|f(x)|$. 那么, 从 $\left||y|-\sum\limits_{k=0}^{n}c_ky^k\right|<\varepsilon$(当 $|y|\leqslant M$ 时) 得到 $\left||f(x)|-\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kf^k(x)\right|<\varepsilon$(当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时), 因此, 如果在区间 $[a,b]$ 上,f 能用多项式一致逼近, 那么 $\sum\limits_{k=0}^{n}c_kf^k$ 和 $|f|$ 也能这样逼近.

最后, 如果 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上能用多项式一致逼近, 那么函数 $\max\{f,g\}=\frac{1}{2}((f+g)+|f-g|), \min\{f,g\}=\frac{1}{2}((f+g)-|f-g|)$ 也能用多项式一致逼近.

设 $a \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant b, f(x) \equiv 0, g_{\xi_1\xi_2}(x) = \dfrac{x-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}, h(x) \equiv 1, \varPhi_{\xi_1\xi_2} = \max\{f, g_{\xi_1\xi_2}\}$, $F_{\xi_1\xi_2} = \min\{h, \varPhi_{\xi_1\xi_2}\}$, 显然, 形如 $F_{\xi_1\xi_2}$ 的函数的线性组合能产生出整个在区间 $[a,b]$ 上分段线性的连续函数的集合, 由此, 根据例 5, 就推出魏尔斯特拉斯定理. ▶

在叙述斯通定理之前, 先定义某些新概念.

定义 3 称集合 X 上的实 (复) 值函数族 A 为 X 上的实 (复) 函数代数, 如果从 $f, g \in A, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, 能得到

$$(f+g) \in A;\ (f \cdot g) \in A;\ (\alpha f) \in A.$$

例 6 设 $X \subset \mathbb{C}$, 显然, 所有的多项式 $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n, n \in \mathbb{N}$, 构成 X 上的复函数代数.

如果取 $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, 以及所有实系数多项式, 那么就得到区间 $[a,b]$ 上的实函数代数.

例 7 在任意区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上, 函数 $e^{nx}, n = 0, 1, 2, \cdots$ 的一切实系数 (或复系数) 线性组合, 显然构成实 (或复)函数代数.

关于函数 $\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ 的线性组合能作同样的叙述.

定义 4 我们说集合 X 上的函数族 S 能分离 X 的点, 如果对任意两点 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 能找到函数 $f \in S$, 使 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

例 8 函数族 $\{e^{nx}, n \in \mathbb{N}\}$, 甚至其中每一个函数都能分离 $\mathbb{R}$ 的点.

同时, 2π 为周期的函数族 $\{e^{inx}, n \in \mathbb{N}\}$ 能分离长度小于 2π 的区间中的点. 显然它不能分离长度大于或等于 2π 的区间中的点.

例 9 所有实多项式之族能分离任何区间 $[a,b]$ 中的点, 因为由一个多项式 $P(x) = x$ 就已经能分离任何区间 $[a,b]$. 关于集合 $X \subset \mathbb{C}$ 以及 X 上的复多项式族可以重复上面的叙述与结论, 作为例子可取 $P(z) = z$.

定义 5 我们说由一些函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 构成函数族 $\mathfrak{F}$ 是在集 X 上不消失的函数族, 如果对任一点 $x_0 \in X$, 都能找到一个函数 $f_0 \in \mathfrak{F}$, 使得 $f_0(x) \neq 0$.

例 10 函数族 $\mathfrak{F} = \{1, x, x^2, \cdots\}$ 在区间 $[0,1]$ 上不消失, 而函数族 $\mathfrak{F}_0 = \{x, x^2, \cdots\}$ 中的所有函数在 $x = 0$ 点都变为零.

引理 2 如果集 X 上实 (复) 函数代数 A 能分离 X 的点且在 X 上不消失, 那么, 对任何两个不同的点 $x_0, x_1 \in X$ 和任何实 (复) 数 c_0, c_1, 都能找到函数 $f \in A$, 使得 $f(x_0) = c_0, f(x_1) = c_1$.

◀ 显然只要在 $c_0 = 0, c_1 = 1$ 和 $c_1 = 1, c_0 = 0$ 两种情况下证明引理就够了.

由于点 x_1, x_2 是平权的, 我们只考虑 $c_1 = 1, c_2 = 0$ 的情形.

首先注意, 在 A 中存在一个分离点 x_1, x_2 的函数 s, 除条件 $s(x_1) \neq s(x_2)$ 外, 还满足要求 $s(x_1) \neq 0$.

设 $g, h \in A, g(x_1) \neq g(x_2), g(x_1) = 0, h(x_1) \neq 0$. 显然存在数 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, 使 $\lambda[h(x_1) - h(x_2)] \neq g(x_2)$. 于是函数 $s = g + \lambda h$ 就满足我们的要求.

现在令 $f(x) = \dfrac{s^2(x) - s(x_2)s(x)}{s^2(x_1) - s(x_1)s(x_2)}$, 则函数 f 属于我们的代数 A, 且满足上边提出的条件:$f(x_1) = 1$ 和 $f(x_2) = 0$. ▶

定理 3 (**斯通**[①]) *设 A 是由定义在紧集 K 上的实连续函数构成的代数. 如果 A 分离 K 的点且在 K 上不消失, 那么 A 是空间 $C(K, \mathbb{R})$ 的处处稠密子集.*

◀ 设 $\overline{A}$ 是集 $A \subset C(K, \mathbb{R})$ 在 $C(K, \mathbb{R})$ 中的闭包, 即 $\overline{A}$ 是 $C(K, \mathbb{R})$ 中能够用 A 中的函数以任意精度一致逼近的那些连续函数的集合. 定理断言, $\overline{A} = C(K, \mathbb{R})$.

重复在证明魏尔斯特拉斯定理时所作的论证, 注意到, 如果 $f, g \in \overline{A}$ 且 $\alpha \in \mathbb{R}$, 那么函数 $f + g, f \cdot g, \alpha f, |f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ 也属于 $\overline{A}$. 按归纳法, 一般地, 如果 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \overline{A}$, 那么 $\max\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 和 $\min\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 也在 $\overline{A}$ 中.

现在证明, 对于任一函数 $f \in C(K, \mathbb{R})$, 任一点 $x \in K$ 和任一数 $\varepsilon > 0$, 能找到这样的函数 $g_x \in A$, 使得 $g_x(x) = f(x)$, 且对任意 $t \in K$ 有 $g_x(t) > f(t) - \varepsilon$.

为了证明这个结果, 对每个点 $y \in K$, 根据引理 2 能找到函数 $h_y \in A$, 使得 $h_y(x) = f(x), h_y(y) = f(y)$. 由于函数 f 和 h_y 在 K 上连续, 能找到点 y 的开邻域 U_y, 使对任意的 $t \in U_y$, 有 $h_y(t) > f(t) - \varepsilon$. 从由这样的开集 U_y 作成的紧集 K 的覆盖中选取有限覆盖 $\{U_{y_1}, U_{y_2}, \cdots, U_{y_n}\}$. 于是, 函数 $g_x = \max\{h_{y_1}, h_{y_2}, \cdots, h_{y_n}\} \in A$ 即为所求.

现在, 对每个点 $x \in K$, 取这样的函数 g_x, 再注意到函数 g_x 和 f 的连续性, 能找到点 $x \in K$ 的开邻域 V_x, 使对任意的 $t \in V_x$, 有 $g_x(t) < f(t) + \varepsilon$. 因为 K 是紧的, 从开邻域 V_x 作成的 K 的覆盖中能找到有限覆盖 $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \cdots, V_{x_m}\}$, 于是函数 $g = \min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \cdots, g_{x_m}\}$ 属于代数 A, 由构造知, 在任一点满足不等式.

$$f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon.$$

但 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 这就证明了, 任何一个函数 $f \in C(K, \mathbb{R})$ 都能以任意精度用代数 A 中的函数一致逼近. ▶

练 习

1. 称由一些定义在度量空间 X 上在度量空间 Y 中取值的函数 $f: X \longrightarrow Y$ 构成的函数族

[①] 斯通 (M. Stone) (1903—1989) —— 美国数学家. 主要从事拓扑与泛函分析的研究.

$\mathfrak{F}$ 为在点 $x_0 \in X$ 等度连续的函数族, 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 能找到 $\delta > 0$, 使对任何函数 $f \in \mathfrak{F}$, 能由关系式 $d_X(x_0, x) < \delta$ 推出 $d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

a) 试证: 如果由一些函数 $f : X \longrightarrow Y$ 构成的族 $\mathfrak{F}$ 在点 $x_0 \in X$ 等度连续, 那么任何一个函数 $f \in \mathfrak{F}$ 在点 x_0 都是连续的, 但相反的断言是错误的.

b) 试证: 如果由一些函数 $f : K \longrightarrow Y$ 构成的族 $\mathfrak{F}$ 在紧集 K 的任何一点都是等度连续的, 那么在定义 2 的意义下它在 K 上也是等度连续的.

c) 试证: 如果度量空间 X 不是紧的, 那么从由一些函数 $f : X \longrightarrow Y$ 构成的族 $\mathfrak{F}$ 在每点 $x_0 \in X$ 等度连续还不能推出 $\mathfrak{F}$ 在 X 上等度连续.

根据这个理由, 如果函数族 $\mathfrak{F}$ 按定义 2 在集合 X 上是等度连续的, 常称它为在集 X 上是一致等度连续的函数族. 因此, 函数族在点的等度连续性和在集上的一致等度连续性之间的关系就像集合 X 上的单个函数 $f : X \longrightarrow Y$ 的连续性和一致连续性之间的关系一样.

d) 设 $\omega(f; E)$ 是函数 $f : X \longrightarrow Y$ 在集 $E \subset X$ 上的振幅. 而 $B(x, \delta)$ 是以点 $x \in X$ 为中心, 半径为 δ 的球. 试述, 下面写的是哪两个概念的定义:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad \omega(f; B(x, \delta)) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in \mathfrak{F} \quad \forall x \in X \quad \omega(f; B(x, \delta)) < \varepsilon.$$

e) 举例说明, 如果 K 不是紧的, 一般来说阿尔采拉 – 阿斯柯利定理不成立: 在 $\mathbb{R}$ 上构造一致有界且等度连续函数序列 $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, 其中 $f_n(x) = \varphi(x + n)$. 从这个序列中不可能选出在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛的子序列.

f) 利用阿尔采拉 – 阿斯柯利定理求解 §3 的习题 10, c).

2. a) 详细说明, 为什么在区间 $[a, b]$ 上任何一个分段线性的连续函数能够表成魏尔斯特拉斯定理证明中所指出的形如 $F_{\xi_1 \xi_2}$ 的函数的线性组合.

b) 对复值连续函数 $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ 证明魏尔斯特拉斯定理.

c) 常称量 $M_n = \int_a^b f(x) x^n dx$ 为函数 $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ 在区间 $[a, b]$ 上的 *n 次矩*.试证: 如果 $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ 且对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有 $M_n = 0$, 那么在 $[a, b]$ 上,$f(x) \equiv 0$.

3. a) 试证: 由函数对 $\{1, x^2\}$ 生成的代数在区间 $[-1, 1]$ 上全体连续偶函数的集合中是稠密的.

b) 对于由一个函数 $\{x\}$ 生成的代数与在区间 $[-1, 1]$ 上全体连续奇函数的集合, 解答上述问题.

c) 任何一个函数 $f \in C([0, \pi], \mathbb{C})$ 都能用函数对 $\{1, e^{ix}\}$ 生成的代数中的函数以任意精度一致逼近吗?

d) 对 $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, 回答上述问题.

e) 试证: 当且仅当 $f(-\pi) = f(\pi)$ 时, 上述问题的答案是肯定的.

f) 如果 $[a, b] \subset]-\pi, \pi[$, 任何一个函数 $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ 都能用函数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 的线性组合一致逼近吗?

g) 任何一个偶函数 $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ 都能用函数系 $\{1, \cos x, \cdots, \cos nx, \cdots\}$ 一致逼近吗?

h) 设 $[a, b]$ 是直线 $\mathbb{R}$ 的任一闭区间, 试证: 由任何一个恒不为零的严格单调函数 $\varphi(x)$ (例如 e^x) 在区间 $[a, b]$ 上生成的代数在 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中是稠密的.

i) 闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 处在什么位置时, 由函数 $\varphi(x) = x$ 生成的代数在 $C([a, b], \mathbb{R})$ 中稠密?

4. a) 称复函数代数 A 为自共轭函数代数, 如果能由 $f \in A$ 推出 $\bar{f} \in A$, 其中 $\bar{f}(x)$ 是 $f(x)$ 的共轭值. 试证: 如果复代数 A 在 X 上是非退化的并且能分离 X 的点, 那么在代数 A 自共轭的条件下, 能够断定, 由代数 A 的一切实函数构成的 A 的子代数 A_R, 在 X 上也是非退化的, 并且也能分离 X 的点.

b) 证明下面的复形式的斯通定理:

如果由一些函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 构成的复化数 A 在 X 上是非退化的, 并且能分离 X 的点, 那么在代数 A 自共轭的条件下能够断言, 它在 $C(X, \mathbb{C})$ 中是稠密的.

c) 设 $X = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ 是单位圆,A 是由函数 $e^{i\varphi}$ 生成的 X 上的代数, 其中 φ 是点 $z \in X$ 的幅角. 这个代数在 X 上是非退化的且能分离 X 的点, 但不是自共轭的.

试证: 如果函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 能用 A 中的元素一致逼近, 那么对任何 $n \in \mathbb{N}$, 等式 $\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{in\varphi} d\varphi = 0$ 成立. 利用这个结果验证, 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在圆 X 上的限制是 X 上的连续函数, 但不在代数 A 的闭包中.

第十七章　含参变量的积分

这一章将把依赖于参变量的函数族的一般定理应用于分析中最常见的一个这种函数族, 这就是含参变量的积分.

§1　含参变量的常义积分

1. 含参变量积分的概念

含参变量积分就是形如

$$F(t)=\int_{E_t} f(x,t)dx \tag{1}$$

的积分. 其中 t 是参数, 它跑遍集合 T. 对每个 $t\in T$ 有相应的集合 E_t, 函数 $\varphi_t(x)=f(x,t)$ 在集合 E_t 上是常义或广义可积的.

当然, 集合 T 可以是各种各样的, 但最重要的显然是空间 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 的子集.

如果对每个参变量 $t\in T$, 积分 (1) 是常义的, 那么通常就说, (1) 中的函数F *是含参变量的常义积分*.

如果对于全体或某个 $t\in T$, (1) 中的积分只在反常积分意义下存在, 那么通常就说, 函数F *是含参变量的反常积分*.

当然, 这仅仅是一些术语的约定.

当 $x\in\mathbb{R}^m, E_t\subset\mathbb{R}^m, m>1$ 时, 我们常称 (1) 为*含参变量重积分* (二重, 三重等等).

然而, 我们首先把注意力集中在一维的情况, 它是构成任何一般情况的基础. 此外, 为了简单起见, 我们先取不依赖于参数的直线 $\mathbb{R}$ 上的区间作为 E_t, 并且认为在它上面积分 (1) 在普通意义下存在.

2. 含参变量积分的连续性

命题 1 设 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$, 即平面 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形. 如果函数 $f: P \to \mathbb{R}$ 连续, 即 $f \in C(P, \mathbb{R})$, 那么函数

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{2}$$

在任何一点 $y \in [c,d]$ 都连续.

◄ 从函数 f 在紧集 P 上的一致连续性推出: 在 $[a,b]$ 上, 当 $y, y_0 \in [c,d]$ 且 $y \to y_0$ 时, 有 $\varphi_y(x) := f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0) =: \varphi_{y_0}(x)$. 对每个 $y \in [c,d]$, 函数 $\varphi_y(x) = f(x,y)$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上连续, 从而知道它在 $[a,b]$ 上可积. 由关于积分号下取极限的定理, 现在能够断定

$$F(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \lim_{y \to y_0} F(y). \ ►$$

注 1 从上边的证明中可以看出, 如果取任何一个紧集 K, 作为参变量 y 的取值的集合, 命题 1 仍然有效. 当然是在条件 $f \in C(I \times K, \mathbb{R})$ 下, 其中 $I = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$.

特别地, 由此可作出结论, 如果 $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$, 其中 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 那么 $F \in C(D, \mathbb{R})$. 因为对任一点 $y_0 \in D$, 有一紧邻域 $K \subset D$, 而函数 f 在 $I \times K$ 上的限制是紧集 $I \times K$ 上的连续函数.

我们叙述了关于实值函数的命题 1, 当然, 这个命题以及它的证明, 在复值函数情形, 例如对在 $\mathbb{C}$ 中,$\mathbb{R}^m$ 中或 $\mathbb{C}^m$ 中取值的函数, 仍保持有效.

例 1 在莫尔斯引理 (参看第 1 卷第 8 章 §6) 的证明中, 我们曾提到过下述称之为阿达马引理的命题.

如果函数 f 在点 x_0 的邻域 U 中属于 $C^{(1)}(U, \mathbb{R})$, 那么在点 x_0 的某个邻域中, 它能表为

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), \tag{3}$$

其中 φ 在 x_0 连续且 $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

等式 (3) 容易从牛顿 – 莱布尼茨公式

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 f'(x_0 + th)dt \cdot h \tag{4}$$

以及对函数 $F(h)=\int_0^1 f'(x_0+th)dt$ 应用命题 1 推出. 剩下来的只需再作替换 $h=x-x_0$, 并令 $\varphi(x)=F(x-x_0)$.

注意到等式 (4) 对 $x_0,h\in\mathbb{R}^n$ 仍成立, 这里 n 不一定仅是 1. 详细展开 f', 且为了简单, 假设 $x_0=0$, 等式 (4) 就能写成

$$f(x^1,\cdots,x^n)-f(0,\cdots,0)=\sum_{i=1}^n\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1,\cdots,tx^n)dt\cdot x^i$$

的形式, 而且这时在等式 (3) 中应令

$$\varphi(x)x=\sum_{i=1}^n\varphi_i(x)x^i,$$

其中 $\varphi_i(x)=\int_0^1\dfrac{\partial f}{\partial x^i}(tx)dt$.

3. 含参变量积分的微分法

命题 2 *如果函数 $f:P\to\mathbb{R}$ 在矩形 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续且对 y 有连续偏导数, 那么积分 (2) 属于 $C^{(1)}([c,d],\mathbb{R})$, 且*

$$F'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx. \tag{5}$$

常义积分 (2) 关于参变量的微分公式 (5) 常称为*莱布尼茨公式*或*莱布尼茨法则*.

◀ 我们来直接验证, 如果 $y_0\in[c,d]$, 那么 $F'(y_0)$ 能按公式 (5) 计算:

$$\begin{aligned}&\left|F(y_0+h)-F(y_0)-\left(\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx\right)h\right|\\ =&\left|\int_a^b\left(f(x,y_0+h)-f(x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)h\right)dx\right|\\ \leqslant&\int_a^b\left|f(x,y_0+h)-f(x,y_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)h\right|dx\\ \leqslant&\int_a^b\sup_{0<\theta<1}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta h)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right|dx\cdot|h|=\varphi(y_0,h)|h|.\end{aligned}$$

由条件 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\in C(P,\mathbb{R})$. 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上, 当 $y\to y_0$ 时, 有 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\rightrightarrows\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$. 由此推出, 当 $h\to 0$ 时, 有 $\varphi(y_0,h)\to 0$. ▶

注 2 函数 f 的连续性只是作为有关积分的存在性的充分条件在证明中被利用到.

注 3 命题证明以及其中应用有限增量定理的形式表明, 如果取任何一个线性赋范空间中的凸紧集代替区间 $[c, d]$, 命题 2 仍然有效. 显然这时还可认为, f 是在某个完备的向量赋范空间中取值.

特别地 (这有时是极有用的), 公式 (5) 既适用于复变量 $y \in \mathbb{C}$ 的复值函数 F, 也适用于向量参变量 $y = (y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{C}^n$ 的函数 $F(y) = F(y^1, \cdots, y^n)$.

当然, 对后面这种情况, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 能按坐标写开成 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y^1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial y^n}\right)$ 的形式, 且从 (5) 式能得到函数 F 的相应的偏导数 $\dfrac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y^i}(x, y^1, \cdots, y^n)dx$.

例 2 验证函数 $u(x) = \int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin n\varphi)d\varphi$ 满足贝塞尔方程 $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$.

事实上, 按公式 (5) 进行微分, 经过一些简单的变换, 得到

$$\begin{aligned}
&-x^2\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi + x\int_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \\
&+(x^2 - n^2)\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi \\
=&\int_0^\pi ((x^2\sin^2\varphi + n^2 - x^2)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) - x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi))d\varphi \\
=&-(n + x\cos\varphi)\sin(n\varphi - x\sin\varphi)|_0^\pi = 0.
\end{aligned}$$

例 3 全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}d\varphi, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{6}$$

作为参变量 $k(0 < k < 1)$ 的函数, 满足关系式

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}, \quad \frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k}.$$

式 (6) 中的 k 叫做相应的椭圆积分的模数.

例如我们来验证它们中的第一个. 按公式 (5)

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dk} &= -\int_0^{\pi/2} k\sin^2\varphi(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi \\
&= \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{1/2}d\varphi - \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}d\varphi = \frac{E - K}{k}.
\end{aligned}$$

例 4 有时, 甚至能利用公式 (5) 来计算积分. 设

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi)d\varphi \qquad (\alpha > 1)$$

按公式 (5)

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha d\varphi}{\alpha^2 - \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}},$$

由此得到 $F(\alpha) = \pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) + c$.

值 c 也容易找到, 如果注意到 $\alpha \to +\infty$ 时, 一方面, $F(\alpha) = \pi\ln\alpha + \pi\ln 2 + c + o(1)$, 另一方面, 从 $F(\alpha)$ 的定义, 同时考虑到等式 $\ln(\alpha^2 - \sin^2\varphi) = 2\ln\alpha + o(1)$, 当 $\alpha \to +\infty$ 时, 得到 $F(\alpha) = \pi\ln\alpha + o(1)$. 因此, $\pi\ln 2 + c = 0$, 从而, $F(\alpha) = \pi\ln\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$.

命题 2 能稍加强.

命题 2′ *设函数 $f: P \to \mathbb{R}$ 在矩形 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x \leqslant b \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续且有连续偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 其次, 设 $\alpha(y), \beta(y)$ 是区间 $[c,d]$ 上的连续可微函数, 且对任何 $y \in [c,d]$, 它们的值属于区间 $[a,b]$, 那么积分*

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \tag{7}$$

对任何 $y \in [c,d]$ 有定义, 属于 $C^{(1)}([c,d],\mathbb{R})$, 并且公式

$$F'(y) = f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \tag{8}$$

成立.

◀ 根据积分关于积分限微分的法则, 并注意到公式 (5), 可知函数

$$\Phi(\alpha,\beta,y) = \int_\alpha^\beta f(x,y)dx$$

在 $\alpha,\beta \in [a,b]$ 和 $y \in [c,d]$ 的条件下, 有下面的偏导数

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = f(\beta,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -f(\alpha,y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

由命题 1, 我们能推出函数 Φ 的所有偏导数在它的定义域上连续, 这就意味着 Φ 是连续可微函数. 现在, 对函数 $F(y) = \Phi(\alpha(y),\beta(y),y)$ 利用复合函数微分法就得到公式 (8). ▶

例 5 设

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt,$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, 而 f 是积分区间上连续的函数, 我们来验证 $F_n^{(n)}(x) = f(x)$.

当 $n = 1$ 时, $F_1(x) = \int_0^x f(t)dt$ 和 $F_1'(x) = f(x)$.

按公式 (8), 当 $n>1$ 时, 我们得到

$$F_n'(x)=\frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1}f(x)+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-t)^{n-2}f(t)dt=F_{n-1}(x).$$

由此应用归纳法即可推出 $F_n^{(n)}(x)=f(x)$ 对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都正确.

4. 含参变量积分的积分法

命题 3 *如果函数 $f:P\to\mathbb{R}$ 在矩形 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续, 那么积分 (2) 在区间 $[c,d]$ 上可积且有等式*

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \tag{9}$$

◀ 从重积分的观点看, 等式 (9) 是最简形式的富比尼定理.

但是, 我们将给出的关系式 (9) 的证明是不依赖于富比尼定理的.

考虑函数

$$\varphi(u)=\int_c^u\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy,\quad \psi(u)=\int_a^b\left(\int_c^u f(x,y)dy\right)dx.$$

因为 $f\in C(P,\mathbb{R})$, 根据命题 1 和积分关于上限的连续性推出 $\varphi,\psi\in C([c,d],\mathbb{R})$, 再由函数 (2) 的连续性得 $\varphi'(u)=\int_a^b f(x,u)dx$, 而按公式 (5), 当 $u\in[c,d]$ 时, 有 $\psi'(u)=\int_a^b f(x,u)dx$. 这样一来, $\varphi'(u)=\psi'(u)$, 因此,在区间 $[c,d]$ 上, $\varphi(u)=\psi(u)+c$. 但是, 因为 $\varphi(0)=\psi(0)=0$, 所以在区间 $[c,d]$ 上有等式 $\varphi(u)=\psi(u)$, 由此当 $u=d$ 时就得到关系式 (9). ▶

练　习

1. a) 说明, 为什么关系式 (2) 中的函数 $F(y)$ 当依赖于参变量 $y\in Y$ 的函数 $\varphi_y(x)=f(x,y)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上可积, 且关于 Y 中的某个基 $\mathfrak{B}$ (例如, 关于基底 $y\to y_0$) 一致收敛到函数 $\varphi(x)$ 时, 函数 $F(y)$ 有极限 $\int_a^b\varphi(x)dx$.

b) 试证: 如果 E 是 $\mathbb{R}^m$ 中的可测集, 而函数 $f:E\times I^n\to\mathbb{R}$ 在集 E 和 n 维区间 I^n 的直积 $E\times I^n=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{m+n}|x\in E\wedge t\in I^n\}$ 上有定义且连续, 那么当 $E_t=E$ 时, 由等式 (1) 定义的函数 F 在 I^n 上连续.

c) 设 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$, 且 $f\in C(P,\mathbb{R}).\alpha,\beta\in C([c,d],[a,b])$, 试证: 函数 (7) 在区间 $[c,d]$ 上连续.

2. a) 试证: 如果 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 那么函数 $F(x)=\dfrac{1}{2a}\int_{-a}^a f(x+t)dt$ 在 $\mathbb{R}$ 上不仅连续而且可微.

b) 求函数 $F(x)$ 的导数, 并证明 $F\in C^{(1)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. 利用含参变积分的微分法证明. 当 $|r|<1$ 时.

$$F(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx=0.$$

4. 验证下面的函数满足例 2 中所说的贝塞尔方程:

a) $u=x^n\int_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi d\varphi$;

b) $J_n(x)=\dfrac{x^n}{(2n-1)!!\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos xtdt$;

c) 试证: 与不同的 $n\in\mathbb{N}$ 相对应的函数 J_n 满足关系 $J_{n+1}=J_{n-1}-2J_n'$.

5. 发展例 3 并令 $\tilde{k}:=\sqrt{1-k^2}$, $\widetilde{E}(k):=E(\tilde{k})$, $\widetilde{K}(k):=K(\tilde{k})$. 试仿照勒让德, 证明:

a) $\dfrac{d}{dk}(E\widetilde{K}+\widetilde{E}K-K\widetilde{K})=0$;

b) $E\widetilde{K}+\widetilde{E}K-K\widetilde{K}=\dfrac{\pi}{2}$.

6. 代替积分 (2), 考虑积分

$$\mathfrak{F}(y)=\int_a^b f(x,y)g(x)dx$$

其中 g 是区间 $[a,b]$ 上可积函数 ($g\in\mathfrak{R}[a,b]$).

重复上面命题 1—3 的证明, 可依次验证:

a) 如果函数 f 满足命题 1 的条件, 那么函数 $\mathfrak{F}$ 在区间 $[c,d]$ 上连续 ($\mathfrak{F}\in C([c,d])$).

b) 如果函数 f 满足命题 2 的条件, 那么函数 $\mathfrak{F}$ 在区间 $[c,d]$ 上连续可微 ($\mathfrak{F}\in C^{(1)}[c,d]$), 且

$$\mathfrak{F}'(y)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)g(x)dx.$$

c) 如果函数 f 满足命题 3 的条件, 那么函数 $\mathfrak{F}$ 在区间 $[c,d]$ 上可积 ($\mathfrak{F}\in\mathfrak{R}[c,d]$), 且

$$\int_c^d\mathfrak{F}(y)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)g(x)dy\right)dx.$$

7. **泰勒公式和阿达马引理**

a) 试证, 如果 f 是光滑函数且 $f(0)=0$, 则 $f(x)=x\varphi(x)$, 其中 φ 是连续函数且 $\varphi(0)=f'(0)$.

b) 试证, 如果 $f\in C^{(n)}$ 且 $f^{(k)}=0(k=0,1,\cdots,n-1)$, 则 $f(x)=x^n\varphi(x)$, 其 φ 是连续函数且 $\varphi(0)=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$.

c) 设 f 是定义在零的邻域中的 $C^{(n)}$ 类函数. 试验证以下具阿达马余项的泰勒公式:

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)x^{n-1}+x^n\varphi(x),$$

其中 φ 是零的邻域中的连续函数, 且 $\varphi(0)=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$.

d) 把习题 a), b), c) 的结果推广到 f 是多变量函数的情形. 试导出用多指标记号表示的基本泰勒公式

$$f(x)=\sum_{|\alpha|=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(0)\cdot x^{\alpha}+\sum_{|\alpha|=n}x^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x)$$

并补充习题 a), b), c) 的结果, 证明, 当 $f\in C^{(n+p)}$ 时, 有 $\varphi_{\alpha}\in C^{(p)}$.

§2 含参变量的反常积分

1. 反常积分关于参数的一致收敛性

a. 基本定义与例子

设对每个 $y \in Y$, 反常积分

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx \tag{1}$$

在区间 $[a, \omega[\subset \mathbb{R}$ 上收敛. 为确定起见, 将认为积分 (1) 以积分上限为唯一奇点 (即或者 $\omega = +\infty$, 或者 f 作为 x 的函数在点 ω 的邻域内无界).

定义 如果对任何一个 $\varepsilon > 0$, 存在点 ω 在集合 $[a, \omega[$ 中的邻域 $U_{[a,\omega[}(\omega)$, 对任何 $b \in U_{[a,\omega[}(\omega)$ 和任何 $y \in E \subset Y$, 积分 (1) 的余项有如下估计

$$\left| \int_b^\omega f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

则称含参变量 $y \in Y$ 的反常积分 (1) 在集合 $E \subset Y$ 上一致收敛.

如果引进记号表示反常积分 (1) 的常义积分近似

$$F_b(y) := \int_a^b f(x, y) dx, \tag{3}$$

那么, 本节引进的基本定义也能改述成与其等价的另一形式 (今后将会看到, 这个新形式的叙述是很有用的):

积分 (1) 在集 $E \subset Y$ 上一致收敛, 即是

$$\text{当 } b \in [a, \omega[, b \to \omega \text{ 时, 在 } E \text{ 上有 } F_b(y) \rightrightarrows F(y). \tag{4}$$

事实上, 因为

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx := \lim_{\substack{b \to \omega \\ b \in [a,\omega[}} \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\substack{b \to \omega \\ b \in [a,\omega[}} F_b(y),$$

所以关系式 (2) 能改写为

$$|F(y) - F_b(y)| < \varepsilon \tag{5}$$

的形式.

最后这个不等式对任何 $b \in U_{[a,b[}(\omega)$ 和任何 $y \in E$ 都正确, 这正是 (4) 式所指的.

这样一来, 关系式 (2),(4),(5) 表明, 如果积分 (1) 在某个参数值的集合 E 上一致收敛, 那么不计事先给定的任意小的误差, 对所有 $y \in E$, 反常积分 (1) 能够用依赖同一参数 y 的常义积分 (3) 代替.

例 1 积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}$$

在参变量 $y\in\mathbb{R}$ 的值构成的整个集合 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 因为对任何 $y\in\mathbb{R}$, 只要 $b>\frac{1}{\varepsilon}$, 就有

$$\int_b^{+\infty}\frac{dx}{x^2+y^2}\leqslant\int_b^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{b}<\varepsilon.$$

例 2 积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$$

显然仅当 $y>0$ 时收敛. 同时, 它在任何集合 $\{y\in\mathbb{R}|y\geqslant y_0>0\}$ 上一致收敛.

事实上, 如果 $y\geqslant y_0>0$, 那么

$$0\leqslant\int_b^{+\infty}e^{-xy}dx=\frac{1}{y}e^{-by}\leqslant\frac{1}{y_0}e^{-by_0}\to 0,\quad \text{当 } b\to+\infty \text{ 时}.$$

另外, 它在整个集合 $\mathbb{R}_+=\{y\in\mathbb{R}|y>0\}$ 上不一致收敛, 事实上, 积分 (1) 在集合 E 上一致收敛这一断语的否定是

$$\exists\varepsilon_0>0\quad\forall B\in[a,\omega[\ \ \exists b\in[B,\omega[\ \ \exists y\in E\left(\left|\int_b^{\omega}f(x,y)dx\right|>\varepsilon_0\right).$$

在此例中, 可取任何正实数作为 $\varepsilon_0>0$, 因为对任意固定的 $b\in[0,+\infty[$, 总有

$$\int_b^{+\infty}e^{-xy}dx=\frac{1}{y}e^{-by}\to+\infty,\quad \text{当 } y\to+0 \text{ 时}.$$

再考虑一个我们今后要用到的不太显然的例子

例 3 我们来证明, 积分

$$\Phi(x)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dy$$
$$F(y)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dx$$

都在非负参数值的集合上一致收敛, 这里 α 和 β 是给定的正数.

对积分 $\Phi(x)$ 的余项, 我们立刻得到

$$0\leqslant\int_b^{+\infty}x^{\alpha}y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dy=\int_b^{+\infty}(xy)^{\alpha}e^{-(xy)}y^{\beta+1}e^{-y}dy$$
$$<M_{\alpha}\int_b^{+\infty}y^{\beta+1}e^{-y}dy,$$

其中 $M_\alpha = \max\limits_{0\leqslant u<+\infty} u^\alpha e^{-u}$. 因为最后这个积分收敛, 所以对足够大的 $b\in\mathbb{R}$, 它能小于任何一个事先给定的 $\varepsilon>0$. 而这正表明积分 $\Phi(x)$ 一致收敛.

现在考虑第二个积分 $F(y)$ 的余项:

$$0\leqslant\int_b^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}dx = y^\beta e^{-y}\int_b^{+\infty}(xy)^\alpha e^{-xy}ydx = y^\beta e^{-y}\int_{by}^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du.$$

因为当 $y\geqslant 0$ 时, 有

$$\int_{by}^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du\leqslant\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du<+\infty.$$

而当 $y\to 0$ 时, 有 $y^\beta e^{-y}\to 0$, 所以, 对 $\varepsilon>0$, 显然能找到 $y_0>0$. 使对一切 $y\in[0,y_0]$, 我们感兴趣的积分的余项将小于 ε, 甚至与 $b\in[0,+\infty[$ 的值也无关.

如果 $y\geqslant y_0>0$, 那么考虑到 $M_\beta = \max\limits_{0\leqslant y<+\infty} y^\beta e^{-y}<+\infty$. 且当 $b\to+\infty$ 时, 有 $0\leqslant\int_{by}^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du\leqslant\int_{by_0}^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du\to 0$, 我们便可推出, 对于所有足够大的 $b\in[0,+\infty[$ 及一切 $y\geqslant y_0>0$, 积分 $F(y)$ 的余项能小于 ε.

把区间 $[0,y_0]$ 和 $[y_0,+\infty[$ 连结起来, 我们得到, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 实际上, 可把数 B 选得, 使对任何 $b>B$ 和任何 $y\geqslant 0$, 积分 $F(y)$ 的相应余项都小于 ε.

b. 积分一致收敛性的柯西准则

命题 1 (柯西准则) *为了使得依赖于参变量 $y\in Y$ 的反常积分 (1) 在集合 $E\subset Y$ 上一致收敛, 必要且充分条件是, 对任何 $\varepsilon>0$, 存在点 ω 的邻域 $U_{[a,\omega[}(\omega)$, 使对任何 $b_1,b_2\in U_{[a,\omega[}(\omega)$ 和任何 $y\in E$ 都成立不等式*

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x,y)dx\right|<\varepsilon. \tag{6}$$

◂ 不等式 (6) 与关系式 $|F_{b_1}(y)-F_{b_2}(y)|<\varepsilon$ 是等价的, 因此命题 1 是积分 (1) 用 (4) 表示的一致收敛定义和依赖于参变量 $b\in[a,\omega[$ 的函数族 $F_b(y)$ 在 E 上一致收敛的柯西准则的直接推论. ▸

作为该柯西准则的应用举例, 我们考虑它的以下推论, 今后有时要用到它.

推论 1 *如果积分 (1) 中的函数 f 在集合 $[a,\omega[\times[c,d]$ 上连续, 而积分 (1) 本身关于任何 $y\in]c,d[$ 收敛, 但在 $y=c$ 或 $y=d$ 发散, 那么, 它在区间 $]c,d[$ 上, 以及其闭包含有发散点的任何一个集合 $E\subset]c,d[$ 上, 都不一致收敛.*

◂ 设 $y=c$ 时积分 (1) 发散, 那么根据反常积分收敛的柯西准则, 存在 $\varepsilon_0>0$, 在任何一个邻域 $U_{[a,\omega[}(\omega)$ 中, 都存在 b_1,b_2, 使得

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x,c)dx\right|>\varepsilon_0 \tag{7}$$

在我们的情况下，常义积分

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上是参变量 y 的连续函数 (参看 §1 中的命题 1)，因此对于充分接近 c 的一切 y，与不等式 (7) 同时，也成立不等式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| > \varepsilon_0$$

现在，根据含参变量的反常积分一致收敛的柯西准则就能推出，所考虑的积分不能在其闭包含点 c 的任何一个子集 $E \subset]c,d[$ 上一致收敛.

可类似地研究在 $y=d$ 积分发散的情形. ▶

例 4 积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx$$

当 $t>0$ 时收敛，当 $t=0$ 时发散，因此它显然在任何一个具有极限点 0 的正数集合上不一致收敛，特别地，它在全体正数集 $\{t\in\mathbb{R}|t>0\}$ 上不一致收敛.

其实，上面所叙容易直接验证：

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}du \to +\infty, \quad \text{当 } t\to +0 \text{ 时}.$$

我们要强调指出，尽管如此，我们的积分在与零分离的任何一个集合 $\{t\in\mathbb{R}|t\geqslant t_0>0\}$ 上是一致收敛，这是因为

$$0<\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}du \leqslant \frac{1}{\sqrt{t_0}}\int_{b\sqrt{t_0}}^{+\infty} e^{-u^2}du \to 0, \quad \text{当 } b\to +\infty \text{ 时}.$$

c. 含参变量的反常积分一致收敛的充分条件

命题 2 (魏尔斯特拉斯检验法) 设函数 $f(x,y), g(x,y)$ 对每个 $y\in Y$ 关于 x 在任何一个区间 $[a,b]\subset[a,\omega[$ 上可积.

如果对每个 $y\in Y$ 和任意的 $x\in[a,\omega[$，有不等式

$$|f(x,y)|<g(x,y)$$

且积分 $\int_a^\omega g(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛，那么积分 $\int_a^\omega f(x,y)dx$ 对每个 $y\in Y$ 都绝对收敛，而且它在 Y 上一致收敛.

◀ 这从估计式

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \leqslant \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|dx \leqslant \int_{b_1}^{b_2} g(x,y)dx$$

及积分一致收敛的柯西准则 (命题 1) 即可得证. ►

最常遇到命题 2 的这样一种情况, 函数 g 根本不依赖于参变量 y. 在这种情况下的命题 2 通常叫做**积分一致收敛性的魏尔斯特拉斯强函数检验法**.

例 5 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$$

在参数 α 的值的整个集合 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 因为 $\left|\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, 而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛.

例 6 因为 $|\sin x \cdot e^{-tx^2}| \leqslant e^{-tx^2}$, 由命题 2 和例 3 的结果得知积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-tx^2} dx$$

在任何一个形如 $\{t \in \mathbb{R} | t \geqslant t_0 > 0\}$ 的集合上一致收敛. 因为当 $t=0$ 时积分发散, 由柯西准则的推论得知, 它在任何一个具有极限点 0 的集合上不可能一致收敛.

命题 3 (积分一致收敛性的阿贝尔 – 狄利克雷检验法) *设函数 $f(x,y), g(x,y)$ 对每个 $y \in Y$ 在任何区间 $[a,b] \subset [a,\omega[$ 上关于 x 可积.*

为使积分

$$\int_a^{\omega} (f \cdot g)(x,y) dx$$

在集合 Y 上一致收敛, 只要满足下面两对条件中任何一对即可:

α_1) 存在常数 $M \in \mathbb{R}$, 使对任何 $b \in [a,\omega[$ 和任何 $y \in Y$ 成立不等式

$$\left|\int_a^b f(x,y) dx\right| < M;$$

β_1) 对每个 $y \in Y$, 函数 $g(x,y)$ 关于 x 在区间 $[a,\omega[$ 上单调, 且当 $x \to \omega, x \in [a,\omega[$ 时, $g(x,y) \rightrightarrows 0$ 在 Y 上.

α_2) 积分

$$\int_a^{\omega} f(x,y) dx$$

在集合 Y 上一致收敛;

β_2) 对每个 $y \in Y$, 函数 $g(x,y)$ 关于 x 在区间 $[a,\omega[$ 上单调, 且存在常数 $M \in \mathbb{R}$, 使对任何 $x \in [a,\omega[$ 和任何 $y \in Y$, 成立不等式

$$|g(x,y)| < M.$$

◀ 应用积分第二中值定理, 可得

$$\int_{b_1}^{b_2}(f\cdot g)(x,y)dx=g(b_1,y)\int_{b_1}^{\xi}f(x,y)dx+g(b_2,y)\int_{\xi}^{b_2}f(x,y)dx,$$

其中 $\xi\in[b_1,b_2]$. 如果 b_1,b_2 取在点 ω 的足够小的邻域 $U_{[a,\omega[}(\omega)$ 中, 那么能使上式右端按绝对值来说对所有 $y\in Y$ 都小于任何一个予先给定的 $\varepsilon>0$. 这在第一对条件 $\alpha_1),\beta_1)$ 下, 是显然的. 在第二对条件 $\alpha_2),\beta_2)$ 下, 如果利用积分一致收敛的柯西准则 (命题 1), 这也是显然的.

这样一来, 再次引用柯西准则, 可推出, 乘积 $f\cdot g$ 在区间 $[a,\omega[$ 上的积分确实在参变量值的集合 Y 上一致收敛. ▶

例 7 从反常积分收敛性的柯西准则和阿贝尔 – 狄利克雷检验法推出, 积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$$

仅当 $\alpha>0$ 时收敛. 设 $f(x,\alpha)=\sin x, g(x,\alpha)=x^{-\alpha}$, 我们看到, 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时, 我们的积分满足命题 3 的条件对 $\alpha_1),\beta_1)$. 因此, 在任何一个形如 $\{\alpha\in\mathbb{R}|\alpha\geqslant\alpha_0>0\}$ 的集合上, 给定的积分一致收敛. 在所有正参数值的集合 $\{\alpha\in\mathbb{R}|\alpha>0\}$ 上, 积分不一致收敛, 因为它在 $\alpha=0$ 发散.

例 8 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx$$

在集合 $\{y\in\mathbb{R}|y\geqslant 0\}$ 上收敛且一致收敛.

◀ 首先, 根据反常积分收敛的柯西准则容易推出, 当 $y<0$ 时, 给定的积分完全是发散的. 现在假定 $y\geqslant 0$ 并令 $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x}, g(x,y)=e^{-xy}$, 我们看到, 命题 3 的第二对条件 $\alpha_2),\beta_2)$ 满足, 由此得出所考虑的积分在集合 $\{y\in\mathbb{R}|y\geqslant 0\}$ 上一致收敛. ▶

总之, 我们引入了依赖于参变量的反常积分一致收剑性的概念, 并且指出了某些判别这种收敛性的最重要的检验法, 它们与相对应的函数项级数一致收敛性检验法十分类似. 在转入下一步之前, 我们先做两个注.

注 1 为了不把读者的注意力从这里引进的积分一致收敛性的基本概念引开, 我们处处指明了所谈的是实值函数的积分. 现在容易清楚, 所得到的结果也能推广到向量值函数的积分, 特别地能推广到复值函数的的积分. 这里只需指出, 在柯西准则中, 与往常一样, 要补充假设, 被积函数值所在的向量空间是完备的 (对于 $\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 这是成立的), 而在阿贝尔 – 狄利克雷检验法中, 像函数项级数一致收敛性检验法一样, 应当认为乘积中被假设为单调函数的那个因子是实值的.

所说的这些对本节以下段落中的基本结果同样是适用的.

注 2 我们研究过的反常积分 (1), 它的唯一奇点是积分上限 ω. 可类似地定义和研究以积分下限为唯一奇点的积分的一致收敛性. 如果积分在积分区间的两个端点都有奇异性, 那么就把它表成

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)dx = \int_{\omega_1}^{c} f(x,y)dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x,y)dx$$

的形式, 这里 $c \in]\omega_1, \omega_2[$. 如果位于等式右边的两个积分在 $E \subset Y$ 上都一致收敛. 则认为上面的积分在 E 上一致收敛. 容易验证这样的定义是合理的, 即它与点 $c \in]\omega_1, \omega_2[$ 的选择无关.

2. 反常积分号下取极限和含参变量的反常积分的连续性

命题 4 *设 $f(x,y)$ 是依赖于参变量 $y \in Y$ 的族函数, 并且至少在反常的意义下在区间 $a \leqslant x < \omega$ 上可积, 且 $\mathfrak{B}_Y$ 是 Y 中的基. 如果*

a) *对任何 $b \in]a, \omega[$, 在 $[a,b]$ 上关于基 $\mathfrak{B}_Y$ 有*

$$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x),$$

b) *积分 $\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 Y 上一致收敛, 那么, 极限函数 φ 在 $[a,\omega[$ 上在反常意义下可积, 且成立等式*

$$\lim_{\mathfrak{B}_Y} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \varphi(x)dx. \tag{8}$$

◀ 证明归结为验证下图

$$\begin{array}{ccc}
F_b(y) := \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx & \xrightarrow[b\in[a,\omega[]{b\to\omega} & \displaystyle\int_a^\omega f(x,y)dx =: F(y) \\
\mathfrak{B}_Y \downarrow & & \downarrow \mathfrak{B}_Y \\
\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx & \xrightarrow[b\in[a,\omega[]{b\to\omega} & \displaystyle\int_a^\omega \varphi(x)dx
\end{array}$$

左边的垂直极限过程从条件 a) 和在常义积分号下取极限的定理 (参看第 16 章 §3 定理 3) 推出. 上边的水平极限过程是条件 b) 的表示.

根据两个极限过程的交换定理, 由此推出, 位于对角线下的极限存在且相等.

右边的垂直极限是已经证明了的等式 (8) 的左端, 而下边的水平极限按定义给出位于等式 (8) 的右端的反常积分. ▶

下面的例子说明, 在反常积分情形, 为保证等式 (8) 成立, 仅有一个条件 a), 一般来说是不够的.

例 9　设 $Y=\{y\in\mathbb{R}|y>0\}$, 而

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, 0\leqslant x\leqslant y,\\ 0,\ y<x.\end{cases}$$

显然, 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 上, 当 $y\to+\infty$ 时, $f(x,y)\rightrightarrows 0$. 同时, 对任何 $y\in Y$,

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^y f(x,y)dx=\int_0^y \frac{dx}{y}=1.$$

因此等式 (8) 在这种情况下不成立.

利用迪尼定理 (第 16 章 §3 命题 2), 从刚刚证明的命题 4 可以得到以下有时很有用的

推论 2　设对每个实参变量的值 $y\in Y\subset\mathbb{R}$, 实值函数 $f(x,y)$ 是非负的, 且在区间 $a\leqslant x<\omega$ 上连续. 如果

a) $f(x,y)$ 随 y 的增加而单调增加, 在 $[a,\omega[$ 上趋于函数 $\varphi(x)$,

b) $\varphi\in C([a,\omega[,\mathbb{R})$,

c) 积分 $\int_a^\omega \varphi(x)dx$ 收敛

那么等式 (8) 成立.

◀ 由迪尼定理得到, 在每个区间 $[a,b]\subset[a,\omega[$, 有 $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$.

从不等式 $0\leqslant f(x,y)\leqslant\varphi(x)$ 和一致收敛性的强函数检验法推出, $f(x,y)$ 在区间 $a\leqslant x<\omega$ 上的积分关于参变量 y 是一致收敛的.

这样一来, 命题 4 的两个条件均被满足, 因此, 等式 (8) 成立. ▶

例 10　在第 16 章 §3 的例 3 中, 我们验证过, 函数序列 $f_n(x)=n(1-x^{1/n})$ 在区间 $0<x\leqslant 1$ 上单调增加, 并且当 $n\to+\infty$ 时, $f_n(x)\nearrow\ln\frac{1}{x}$.

于是, 由推论 2 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-x^{1/n})dx=\int_0^1\ln\frac{1}{x}dx.$$

命题 5　如果

a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续,

b) 积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 那么函数 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续.

◀ 从条件 a) 推出, 对任何 $b\in[a,\omega[$, 常义积分

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在 $[c,d]$ 上连续 (参看 §1 命题 1).

从条件 b) 知, 在 $[c,d]$ 上, 当 $b\in[a,\omega[, b\to\omega$ 时, $F_b(y)\rightrightarrows F(y)$, 由此就推出, 函数 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. ►

例 11 在例 8 中, 已经证明, 积分

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx \tag{9}$$

在区间 $0\leqslant y<+\infty$ 上一致收敛, 因此, 根据命题 5 能推出 $F(y)$ 在每个区间 $[0,d]\subset[0,+\infty[$ 上连续, 也就是在整个区间 $0\leqslant y<+\infty$ 上连续. 特别地, 由此推出

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx. \tag{10}$$

3. 含参变量的反常积分的微分法

命题 6 *如果*

a) *函数 $f(x,y), f'_y(x,y)$ 在集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续,*

b) *积分 $\Phi(y)=\int_a^\omega f'_y(x,y)dx$ 在集合 $Y=[c,d]$ 上一致收敛,*

c) *积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 至少在一点 $y_0\in Y$ 收敛, 那么积分 $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ 在整个集合 Y 上一致收敛, 同时, 函数 $F(y)$ 在 Y 上可微且有*

$$F'(y)=\int_a^\omega f'_y(x,y)dx.$$

◄ 由条件 a), 对任何 $b\in[a,\omega[$, 函数

$$F_b(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $c\leqslant y\leqslant d$ 有定义且可微, 按莱布尼茨法则, 有

$$(F_b)'_y(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

由条件 b), 依赖于参变量 $b\in[a,\omega[$ 的函数族 $(F_b)'_y(y)$, 当 $b\in[a,\omega[, b\to\omega$ 时, 在 $[c,d]$ 上一致收敛到函数 $\Phi(y)$.

由条件 c), 当 $b\in[a,\omega[, b\to\omega$ 时, $F_b(y_0)$ 有极限.

由此推出 (参看第 16 章 §3 定理 4), 当 $b\in[a,\omega[, b\to\omega$ 时, 函数族 $F_b(y)$ 本身在 $[c,d]$ 上一致收敛到极限函数 $F(y)$. 同时函数 F 在区间 $c\leqslant y\leqslant d$ 上可微且成立等式 $F'(y)=\Phi(y)$. 而这正是要证明的. ►

例 12 对于固定的 $\alpha>0$, 积分

$$\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-xy}dx$$

在任何形如 $\{y \in \mathbb{R} | y \geqslant y_0 > 0\}$ 的区间上关于参变量 y 一致收敛, 这是从对所有充分大的 $x \in \mathbb{R}$ 成立的估计式 $0 \leqslant x^{\alpha} e^{-xy} \leqslant x^{\alpha} e^{-xy_0} < e^{-x\frac{y_0}{2}}$ 推出的.

因此, 由命题 6, 函数

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$$

当 $y > 0$ 时是无限次可微的, 且

$$F^{(n)}(y) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-xy} dx.$$

但是 $F(y) = \frac{1}{y}$, 因此 $F^{(n)}(y) = \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}$, 从而推出

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy} dx = \frac{n!}{y^{n+1}}.$$

特别地, 当 $y = 1$ 时, 得到

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

例 13 计算狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

为此, 回到积分 (9) 并注意当 $y > 0$ 时, 有

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy} dx, \tag{11}$$

因为积分 (11) 在任何一个形如 $\{y \in \mathbb{R} | y \geqslant y_0 > 0\}$ 的集合上一致收敛.

积分 (11) 容易通过被积函数的原函数计算而得到

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad \text{当 } y > 0 \text{ 时}.$$

由此推出

$$F(y) = -\arctan y + c, \quad \text{当 } y > 0 \text{ 时}, \tag{12}$$

当 $y \to +\infty$ 时, 从关系式 (9) 可以看出,$F(y) \to 0$, 因此从 (12) 式推出 $c = \frac{\pi}{2}$, 现在从 (10),(12) 式得到 $F(0) = \frac{\pi}{2}$, 于是,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

注意, 在推导等式 (13) 时用到的关系式 "当 $y \to +\infty$ 时, $F(y) \to 0$" 不是命题 4 的直接结果, 因为当 $y \to +\infty$ 时, $\frac{\sin x}{x} e^{-xy} \rightrightarrows 0$ 只在形如 $\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant x_0 > 0\}$ 的

区间上成立, 而在形如 $0 < x < x_0$ 的区间上一致收敛性不成立, 这是因为当 $x \to 0$ 时, $\frac{\sin x}{x}e^{-xy} \to 1$. 但当 $x_0 > 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx = \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx,$$

从而, 如果给定 $\varepsilon > 0$, 那么首先选择 x_0 足够接近零, 使当 $x \in [0, x_0]$ 时有 $\sin x \geqslant 0$, 且对任何 $y > 0$,

$$0 < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

然后固定 x_0, 根据命题 4, 只要让 y 趋于 $+\infty$, 便可使在区间 $[x_0, +\infty[$ 上的积分按绝对值小于 $\varepsilon/2$.

4. 含参变量的反常积分的积分法

命题 7 *如果*

a) *函数 $f(x,y)$ 在集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续,*

b) *积分 $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ 在区间 $[c,d]$ 上一致收敛,*

那么函数 F 在 $[c,d]$ 上可积且有等式

$$\int_c^d dy \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{14}$$

◀ 对于 $b \in [a, \omega[$, 根据条件 a) 和 §1 关于常义积分的命题 3, 可得

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{15}$$

利用条件 b) 和第 16 章 §3 关于积分号下取极限的定理 3, 在等式 (15) 左端令 $b \to \omega, b \in [a, \omega[$ 取极限便得到等式 (14) 的左端. 而等式 (14) 的右端按反常积分的定义就是等式 (15) 右端当 $b \to \omega, b \in [a, \omega[$ 时的极限. 于是, 由条件 b), 当 $b \to \omega, b \in [a, \omega[$ 时, 从 (15) 式得出等式 (14). ▶

下面的例子表明, 与两个常义积分交换次序的情况不同, 仅有一个条件 a), 一般来说不足以保证等式 (14) 成立.

例 14 考虑集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x < +\infty \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上的函数 $f(x,y) = (2-xy)xye^{-xy}$, 利用函数 $(2-u)ue^{-u}$ 的原函数 u^2e^{-u}, 容易直接算出

$$0 = \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} (2-xy)xye^{-xy}dx \neq \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 (2-xy)xye^{-xy}dy = 1.$$

推论 3 *如果*

a) *函数 $f(x,y)$ 在集合 $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续,*

b) *$f(x,y)$ 在 P 上非负,*

c) 积分 $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ 作为 y 的函数在区间 $[c,d]$ 上连续,
那么等式 (14) 成立.

◀ 从条件 a) 推出, 对任何 $b \in [a,\omega[$, 积分

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

在区间 $[c,d]$ 上关于 y 是连续函数.

从条件 b) 推出当 $b_1 \leqslant b_2$ 时 $F_{b_1}(y) \leqslant F_{b_2}(y)$.

根据迪尼定理和条件 c) 可推出, 在 $[c,d]$ 上, 当 $b \to \omega, b \in [a,\omega[$ 时, $F_b \rightrightarrows F$.

于是, 命题 7 的条件是满足的, 因而在所考虑的情况下, 等式 (14) 确实成立. ▶

推论 3 表明, 例 14 与其中的函数 $f(x,y)$ 不保号有关.

最后, 我们证明两个反常积分可交换次序的一个充分条件.

命题 8 如果

a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y < \widetilde{\omega}\}$ 上连续,

b) 两个积分

$$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx, \quad \Phi(x) = \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)dy$$

中的第一个关于 y 在任何区间 $[c,d] \subset [c,\widetilde{\omega}[$ 上一致收敛, 而第二个关于 x 在任何区间 $[a,b] \subset [a,\omega[$ 上一致收敛,

c) 两个累次积分

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega |f|(x,y)dx, \quad \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x,y)dy$$

中至少有一个存在,

那么, 等式

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)dy \tag{16}$$

成立.

◀ 为确定起见, 设 c) 中两个累次积分中的第二个积分存在.

由于条件 a) 和条件 b) 中的第一个, 根据命题 7 可得, 对任何 $d \in [c,\widetilde{\omega}[$, 函数 f 满足等式 (14).

如果我们证明了当 $d \to \widetilde{\omega}, d \in [c,\widetilde{\omega}[$ 时, 等式 (14) 的右端趋于关系式 (16) 的右端, 那么等式 (16) 也就获证, 因为这时按反常积分定义, 它的左端也将存在, 而且就是等式 (14) 左端的极限.

令

$$\Phi_d(x) := \int_c^d f(x,y)dy.$$

对任意固定的 $d \in [c, \widetilde{\omega}[$, 函数 Φ_d 有定义, 且由 f 的连续性知, 它在区间 $a \leqslant x < \omega$ 上是连续的.

由条件 b) 的第二条知, 在任何区间 $[a,b] \subset [a,\omega[$ 上, 当 $d \to \widetilde{\omega}, d \in [c,\widetilde{\omega}[$ 时, $\Phi_d(x) \rightrightarrows \Phi(x)$.

因为 $|\Phi_d(x)| \leqslant \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x,y)dy =: G(x)$, 而积分 $\int_a^{\omega} G(x)dx$, 亦即条件 c) 中第二个积分, 按假定是收敛的, 根据一致收敛性的强函数检验法推出, 积分 $\int_a^{\omega} \Phi_d(x)dx$ 关于参变量 d 一致收敛.

于是, 命题 4 的条件是满足的, 且能推出

$$\lim_{\substack{d \to \widetilde{\omega} \\ d \in [c,\widetilde{\omega}[}} \int_a^{\omega} \Phi_d(x)dx = \int_a^{\omega} \Phi(x)dx.$$

而这正是我们要证明的. ►

下面的例子表明: 与命题 7 比较, 在命题 8 中出现的附加条件 c) 不是偶然的.

例 15 当 $A > 0$ 时, 积分计算

$$\int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}\bigg|_A^{+\infty} = \frac{A}{A^2 + y^2} < \frac{1}{A}$$

也顺便证明了, 对任何固定的 $A > 0$, 它关于参变量在整个实数集 $\mathbb{R}$ 上一致收敛. 对于把 dx 换成 dy 的积分可作同样的分析. 两个积分值正好差一个符号, 直接计算说明了这一点:

$$-\frac{\pi}{4} = \int_A^{+\infty} dx \int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dy \neq \int_A^{+\infty} dy \int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

例 16* 当 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时, 非负连续函数的累次积分

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx = \int_0^{+\infty} y^{\beta} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} (xy)^{\alpha} e^{-(xy)} y dx,$$

如该恒等式所示, 它等于 $\int_0^{+\infty} y^{\beta} e^{-y} dy \cdot \int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u} du$. 这样一来, 命题 8 的条件 a) 与 c) 是满足的. 对于所考察的累次积分, b) 中的两个条件在例 3 中已经验证. 因此, 由命题 8, 存在等式

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dy.$$

与从命题 7 推出推论3类似, 从命题 8 能推出

* 译者注, 本例题可以看作利用命题 8 计算累次积分

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y} dy$$

的一个例题, 并引出下边的推论4.

推论 4 如果

a) 函数 $f(x,y)$ 在集合 $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y<\widetilde{\omega}\}$ 上连续,

b) $f(x,y)$ 在 P 上非负,

c) 两个积分

$$F(y)=\int_a^{\omega}f(x,y)dx,\quad \Phi(x)=\int_c^{\widetilde{\omega}}f(x,y)dy$$

分别是区间 $[a,\omega[, [a,\widetilde{\omega}[$ 上的连续函数,

d) 两个累次积分

$$\int_c^{\widetilde{\omega}}dy\int_a^{\omega}f(x,y)dx,\quad \int_a^{\omega}dx\int_c^{\widetilde{\omega}}f(x,y)dy$$

之中至少有一个存在, 那么另一个累次积分也存在, 并且它们相等.

◀ 与推论 3 的证明一样, 由条件 a), b), c) 及迪尼定理推出, 命题 8 的条件 b) 是满足的. 因为 $f\geqslant 0$, 我们的条件 d) 与命题 8 的条件 c) 相符合, 于是, 命题 8 的全部条件都满足, 因此, 等式 (15) 成立. ▶

注 3 正如注 2 所指出, 在积分区间的两个端点都具有奇异性的积分可归结为两个积分的和, 它们中的每一个仅在一端点具有奇异性. 这就使这里证明的命题和推论能适用于在区间 $]\omega_1,\omega_2[\subset\mathbb{R}$ 上的积分的情况. 显然, 在这种情况下, 以前在区间 $[a,b]\subset[a,\omega[$ 成立的那些条件, 现在应当在区间 $[a,b]\subset]\omega_1,\omega_2[$ 成立.

例 17 利用交换两个反常积分的次序证明

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{17}$$

这是有名的欧拉 – 泊松积分.

◀ 首先注意, 当 $y>0$ 时

$$J:=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=y\int_0^{+\infty}e^{-(xy)^2}dx.$$

以及等式 (17) 的积分值不随把积分理解为半开区间 $[0,+\infty[$ 上的积分或开区间 $]0,+\infty[$ 上的积分而改变. 于是,

$$\int_0^{+\infty}ye^{-y^2}dy\int_0^{+\infty}e^{-(xy)^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=J^2,$$

这时关于 y 的积分是在开区间 $]0,+\infty[$ 上取的.

正如我们将要验证的, 在这个累次积分中, 交换关于变量 x 和 y 的积分次序是允许的, 因此

$$J^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2} dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

由此立刻得到 (17).

现在证明交换积分次序的合理性.

函数

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2} dy = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

当 $x \geqslant 0$ 时连续, 而函数

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2} dx = e^{-y^2} \cdot J$$

当 $y > 0$ 时连续. 考虑到上边所作的一般的注 3, 根据推论 4, 即可推出交换积分次序确实是合理的. ▶

练 习

1. 设 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \cdots < \omega$, 用级数和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y)$ 的形式表示积分 (1), 其中 $\varphi_n(y) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)dx$. 证明: 当且仅当对上述形式的任意序列 $\{a_n\}$ 相应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在集合 $E \subset Y$ 上都一致收敛时, 积分 (1) 在集合 E 上一致收敛.

2. a) 根据注 1, 对被积函数是复值函数的情形建立第 1 段的全部理论.

b) 验证注 2 所说的论断.

3. 验证: 函数 $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos\ xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 满足贝塞尔方程 $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$

4. a) 根据等式 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x}$, 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2+y^2)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}.$$

b) 验证:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}$$

c) 证明: 当 $n \to +\infty$ 时, 在 $\mathbb{R}$ 上, $\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-n} \searrow e^{-y^2}$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^n} = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

d) 试推证下面的瓦里斯公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

5. 利用等式 (17), 证明:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2xydx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$.

b) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2xydx=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$.

6. 试证:

利用下式中的这两个积分作为参变量 t 的函数都满足方程 $y''+y=\frac{1}{t}$ 且当 $t\to+\infty$ 时趋于零的事实证明, 当 $t>0$ 时成立恒等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}dx=\int_t^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x}dx$$

7. 试证:

$$\int_0^1 K(k)dk=\int_0^{\pi/2}\frac{\varphi}{\sin\varphi}d\varphi\left(=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}dx\right),$$

其中 $K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ 是第一类全椭圆积分.

8. a) 设 $a>0,b>0$, 并利用等式

$$\int_0^{+\infty}dx\int_a^b e^{-xy}dy=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,$$

计算它右端的积分.

b) 设 $a>0,b>0$, 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos xdx$$

c) 利用狄利克雷积分 (13) 和等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_a^b\sin xydy=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx,$$

计算该等式右端的积分.

9. a) 试证: 当 $k>0$ 时

$$\int_0^{+\infty}e^{-kt}\sin tdt\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du=\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-(k+u^2)t}\sin tdt$$

b) 试证上述等式当值 $k=0$ 时仍然有效.

c) 利用欧拉 – 泊松积分 (17) 验证

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du.$$

d) 利用最后的等式和关系式

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

得出菲涅耳积分

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$$

的值 $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

10. a) 利用等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \sin x dx \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy$$

并根据累次积分中交换积分次序的可能性, 重新求出例 13 中狄利克雷积分 (13) 的值.

b) 试证: 当 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cos \beta x dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \beta < \alpha, \\ \frac{\pi}{4}, \beta = \alpha, \\ 0, \ \ \beta > \alpha. \end{cases}$$

这个积分通常称为狄利克雷间断因子.

c) 设 $\alpha > 0, \beta > 0$, 验证等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\beta, \ \beta \leqslant \alpha, \\ \frac{\pi}{2}\alpha, \ \alpha \geqslant \beta. \end{cases}$$

d) 试证: 如果 $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是正数, 且 $\alpha > \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, 那么

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

11. 考虑积分

$$F(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) g(x) dx,$$

这里 g 是在 $[a, \omega[$ 上局部可积的函数 (即对任何 $b \in [a, \omega[, g|_{[a,b]} \in R[a, b]$). 对比命题 5—8, 假设函数 f 每每满足它们的条件 a), 如果在这些命题的其他条件中, 把积分号下的 $f(x, y)$ 换成 $f(x, y)g(x)$. 试证, 在现在这些条件下, 能够利用 §1 问题 6, 逐字逐句重复命题 5—8 的证明, 推出相应的结论:

a) $F \in C[c, d]$

b) $F \in C^{(1)}[c, d]$, 且

$$F'(y) = \int_a^{\omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) g(x) dx$$

c) $F \in R[c,d]$, 且

$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^{\omega} \left(\int_c^d f(x,y)g(x)dy \right) dx$$

d) F 在 $[c,\widetilde{\omega}[$ 上在反常积分意义下可积, 且

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} F(y)dy = \int_a^{\omega} \left(\int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)g(x)dy \right) dx.$$

§3 欧拉积分

在这一节与下一节中, 将展示以上所讲的理论在一些对分析数学很重要的具体的含参变量积分研究中的应用.

仿效勒让德, 称特殊函数

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \tag{1}$$

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \tag{2}$$

分别为*第一类和第二类欧拉积分*. 它们中的第一个称为欧拉 β *函数* (贝塔函数), 而特别经常用到的第二个, 称为欧拉 Γ *函数* (伽玛函数).

1. β 函数

a. 定义域

积分 (1) 在积分下限有收敛性的必要与充分的条件是 $\alpha > 0$. 类似地, 积分 (1) 在积分上限有收敛性的必要且充分条件是 $\beta > 0$.

这样, 函数 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ 当同时满足两个条件 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时有定义.

注 在这里我们处处假定 α,β 是实数, 但是应该注意, β 函数和 Γ 函数的性质的最全面的描述和这些函数的最深刻的应用, 是和参变量为复值的情形联系着的.

b. 对称性

我们来验证

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha) \tag{3}$$

◀ 为此, 只要在积分 (1) 中做变量替换 $x = 1-t$ 即可. ▶

c. 递推公式

如果 $\alpha > 1$, 则成立等式

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha-1,\beta). \tag{4}$$

◀ 当 $\alpha > 1, \beta > 0$ 时, 利用分部积分法和恒等变换, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(\alpha,\beta) &= -\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}((1-x)^{\beta-1} - (1-x)^{\beta-1}x)dx \\ &= \frac{\alpha-1}{\beta}\mathrm{B}(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

由此立刻推出递推公式 (4). ▶

考虑到公式 (3), 现在能够写出 β 函数的递推公式

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha,\beta-1) \tag{4'}$$

当然假设 $\beta > 1$.

从 β 函数的定义直接看出 $\mathrm{B}(\alpha,1) = \frac{1}{\alpha}$. 因此, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(\alpha,n) &= \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n-(n-1)}{\alpha+n-(n-1)}\mathrm{B}(\alpha,1) \\ &= \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ \cdots\ \cdot(\alpha+n-1)}.\end{aligned} \tag{5}$$

特别地, 当 $m, n \in \mathbb{N}$ 时, 有

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{6}$$

d. β 函数的另一种积分表示

β 函数的如下表示有时是很有用的

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy. \tag{7}$$

◀ 通过变量替换 $x = \frac{y}{1+y}$, 从 (1) 即能得到 (7). ▶

2. Γ 函数

a. 定义域

从公式 (2) 看出, 给定的 Γ 函数仅当 $\alpha > 0$ 时在下限零处收敛, 而在上限无穷远处, 由于快速递减因子 e^{-x}, 对任何 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都收敛.

于是 Γ 函数当 $\alpha > 0$ 时是有定义的.

b. 光滑性和导数公式

Γ 函数是无限次可微的, 且

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x} dx. \tag{8}$$

◀ 首先验证, 对任何固定的 $n \in \mathbb{N}$, 积分 (7) 关于参变量 α 在每个区间 $[a,b] \subset]0,+\infty[$ 上一致收敛.

如果 $0 < a \leqslant \alpha$, 那么 (因为 $x^{a/2} \ln^n x \to 0$, 当 $x \to +0$ 时) 能找到 $c_n > 0$, 使得当 $0 < x \leqslant c_n$ 时,

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x}| < x^{\frac{a}{2}-1}.$$

因此, 根据一致收敛性的强函数检验法能够推出积分

$$\int_0^{c_n} x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x} dx$$

关于 α 在区间 $[a,+\infty[$ 上一致收敛.

如果 $\alpha \leqslant b < +\infty$, 那么当 $x \geqslant 1$ 时,

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x}| \leqslant x^{b-1} |\ln^n x| e^{-x},$$

从而可类似地推出积分

$$\int_{c_n}^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x \cdot e^{-x} dx$$

关于 α 在区间 $]0,b]$ 上一致收敛.

综合这些结果, 我们得到积分 (7) 在任何一个区间 $[a,b] \subset]0,+\infty[$ 上一致收敛.

但在这些条件下, 对积分 (1) 施行积分号下的微分法是合理的. 这就表明, 在任何一个这样的区间 $[a,b]$ 上, 因而在整个 $\alpha > 0$ 的区间上, Γ 函数是无限可微的, 且等式 (8) 是正确的. ►

c. 递推公式

成立下面 Γ 函数的递推公式 .

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{9}$$

◀ 利用分部积分法, 当 $\alpha > 0$ 时, 求得

$$\Gamma(\alpha+1) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$
$$= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx =: \alpha\Gamma(\alpha). \ ►$$

因为 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$. 我们推出, 当 $n\in\mathbb{N}$ 时,

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{10}$$

这样一来, Γ 函数原来是和数论的算术函数 $n!$ 紧密联系的.

d. 欧拉–高斯公式

通常称下面的等式

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n-1)} \tag{11}$$

为欧拉–高斯公式.

◀ 为了证明它, 我们在积分 (2) 中作变量替换 $x=\ln\frac{1}{u}$, 得到 Γ 函数的新积分表示

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^1\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du. \tag{12}$$

在第 16 章 §3 的例 3 中曾经证明, 函数序列 $f_n(u)=n(1-u^{1/n})$, 当 $n\to\infty$ 时, 在区间 $0<u<1$ 上单调递增收敛到函数 $\ln\frac{1}{u}$. 利用 §2 的推论 2(也可参看 §2 例 10) 推出, 当 $\alpha\geqslant 1$ 时

$$\int_0^1\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\int_0^1(1-u^{1/n})^{\alpha-1}du. \tag{13}$$

在最后的积分中作变量替换 $u=v^n$, 从 (12),(13),(1),(3) 和 (5) 得到

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)&=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{\alpha-1}dv=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\mathrm{B}(n,\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n)\\&=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n-1)}.\end{aligned}$$

将递推公式 (4) 和 (9) 应用到对 $\alpha\geqslant 1$ 已证明了的关系式 $\Gamma(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\mathrm{B}(\alpha,n)$ 中, 便可确认公式 (11) 对所有 $\alpha>0$ 是正确的. ▶

e. 余元公式

当 $0<\alpha<1$ 时, 称 Γ 函数的自变量 α 与 $1-\alpha$ 是互余的, 因此等式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\quad(0<\alpha<1) \tag{14}$$

叫做 Γ 函数的余元公式.

◀ 利用欧拉 - 高斯公式 (11), 经过简单的恒等变形之后, 求得

$$\begin{aligned}
&\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n-1)}\cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)}\cdot\right.\\
&\qquad\left.\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)(n-\alpha)}\right)\\
&=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.
\end{aligned}$$

于是, 当 $0<\alpha<1$ 时

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}. \tag{15}$$

但是成立古典的展开式

$$\sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right). \tag{16}$$

(现在我们不讲它的证明. 因为, 后边研究傅里叶级数的时候, 它将作为一般定理的应用的一个简单例子而得到, 参看第 18 章 §2, 例 6)

对照关系式 (15) 和 (16) 就得到公式 (14). ▶

从公式 (14), 特别地, 能得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

注意到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du, \tag{17}$$

这样一来, 我们再次得到欧拉 - 泊松积分值

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

3. β 函数和 Γ 函数的联系

对照公式 (6) 和 (10), 能够猜出 β 函数与 Γ 函数之间成立下面的关系式:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{18}$$

我们来证明这个公式.

◀ 注意到, 当 $y>0$ 时

$$\Gamma(\alpha)=y^{\alpha}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-xy}dx,$$

因此也成立等式

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=y^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}dx$$

利用它并考虑到公式 (7), 我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{B}(\alpha,\beta)&=\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy\\&=\int_0^{+\infty}\left(y^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}dx\right)dy\\&\overset{!}{=}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}dy\right)dx\\&=\int_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}x(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}dy\right)dx\\&=\int_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}du\right)dx=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta).\end{aligned}$$

我们还需解释带惊叹号的等式. 但它是在 §2, 例 16 中已经研究过的. ▶

4. 一些例子

最后我们考虑互相联系的几个例子, 在这些例子中将会遇到上面所讲的特殊函数 ——β 函数和 Γ 函数.

例 1

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right). \tag{19}$$

◀ 为证明该式, 只需在积分中作变量替换 $\sin^2\varphi=x$ 即可. ▶

利用公式 (18), 能用 Γ 函数表示积分 (19) . 特别地, 注意到 (17), 得到

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}\varphi d\varphi=\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha-1}\varphi d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}. \tag{20}$$

例 2 半径为 r 的一维球 —— 这就是一个区间, 而它的 (一维) 体积 $V_1(r)$, 也就是这个区间的长 $2r$. 于是, $V_1(r) = 2r$.

如果假定半径为 r 的 $(n-1)$ 维球的 ($(n-1)$ 维) 体积用公式 $V_{n-1}(r) = c_{n-1}r^{n-1}$ 表示, 那么, 作沿截面的积分 (参看第 11 章 §4 例 3) 得到

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} c_{n-1}(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \left(c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi\right) \cdot r^n,$$

亦即 $V_n(r) = c_n r^n$, 这里

$$c_n = 2c_{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi.$$

由关系式 (20), 最后这个等式能写成如下形式

$$c_n = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)}c_{n-1},$$

于是

$$c_n = (\sqrt{\pi})^{n-1}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} \cdot \cdots \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{4}{2}\right)} \cdot c_1$$

或

$$c_n = \pi^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)}c_1.$$

但 $c_1 = 2$, 而 $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, 因此

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)}.$$

因此,

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n+2}{2}\right)}r^n$$

或同样地,

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\dfrac{n}{2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}r^n. \tag{21}$$

例 3 从几何意义看 $dV_n(r) = S_{n-1}(r)dr$ 是明显的, 这里 $S_{n-1}(r)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 r 的 n 维球的 $(n-1)$ 维球面的面积.

这样一来, $S_{n-1}(r) = \dfrac{dV_n}{dr}(r)$, 从而, 从公式 (21) 得到

$$S_{n-1}(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}.$$

练 习

1. 证明:

a) $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$.

b) $\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$

c) $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x dx$.

d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{(a+bx^q)^r} = \frac{a^{-r}}{q}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p+1}{q}} \mathrm{B}\left(\frac{p+1}{q}, r - \frac{p+1}{q}\right)$.

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$.

f) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

g) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$.

h) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln^n x}{1+x} dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\right) \quad (0 < \alpha < 1)$.

i) 由极坐标方程 $r^n = a^n \cos n\varphi$ 给出的曲线的长度可用公式 $a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$ 表示 $(n \in \mathbb{N}, a > 0)$.

2. 证明:

a) $\Gamma(1) = \Gamma(2)$;

b) Γ 函数的导数 Γ' 在某点 $x_0 \in]1, 2[$ 为零;

c) 函数 Γ' 在区间 $]0, +\infty[$ 上是单调上升的;

d) Γ 函数在区间 $]0, x_0[$ 上单调下降, 而在区间 $[x_0, +\infty[$ 上单调上升;

e) 积分 $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{u}\right)^{x-1} \ln \frac{1}{u} du$ 当 $x = x_0$ 时等于零;

f) $\Gamma(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$, 当 $\alpha \to +0$ 时;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1$.

3. 欧拉公式

$$E := \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

a) 证明:

$$E^2=\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right).$$

b) 验证:

$$E^2=\frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\;\cdots\;\cdot\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}$$

c) 根据恒等式 $\frac{z^n-1}{z-1}=\prod\limits_{k=1}^{n-1}(2-e^{i\frac{2k\pi}{n}})$, 当 $z\to 1$ 时, 得到下面关系式

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}),$$

从它又得到关系式

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

d) 试利用最后的等式推出欧拉公式.

4. 勒让德公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha).$$

a) 证明:

$$\mathrm{B}(\alpha,\alpha)=2\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{\alpha-1}dx.$$

b) 在上述积分中作变量替换, 证明: $\mathrm{B}(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2^{2\alpha-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\alpha\right)$.

c) 推出勒让德公式.

5. 仍然使用 §1 中问题 5 的记号, 试给出一个方法, 使能借助欧拉积分能完成这个问题的第二部分, 也是更加奥妙的部分.

a) 注意, 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 将有 $\tilde{k}=k$, 且

$$\widetilde{E}=E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad \widetilde{K}=K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

b) 经过相应的变量替换, 由这些积分所归结成的形式推出, 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时,有

$$K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\quad 2E-K=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right).$$

c) 现在得到, 当 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有

$$E\widetilde{K}+\widetilde{E}K-K\widetilde{K}=\frac{\pi}{2}.$$

6. 拉比[①]积分 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$.

证明:

a) $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)dx$.

b) $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx$.

c) $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx = \int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$.

d) $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

e) $\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx = \ln\sqrt{2\pi}$.

7. 利用等式

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-xy}dy$$

并根据交换相应的积分次序的可能性, 验证:

a) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^\alpha}dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \quad (0<\alpha<1)$.

b) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\beta}dx = \frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}} \quad (0<\beta<2)$.

c) 现在再次计算狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的值以及菲涅耳积分 $\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx$, $\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$ 的值.

8. 证明: 当 $\alpha > 1$ 时

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(\alpha)\cdot\zeta(\alpha).$$

这里 $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 是黎曼 ζ 函数.

9. 高斯公式 在第 16 章 §3 例 6 中, 给出了由高斯用超几何级数的和引进的函数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

证明: 成立下面的高斯公式

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

a) 把函数 $(1-tx)^{-\beta}$ 展开成级数, 证明: 当 $\alpha>0, \gamma-\alpha>0$, 且 $0<x<1$ 时, 积分

$$P(x) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}dt$$

能表示成

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n x^n.$$

---

①拉比 (L. Raabe) (1801—1859) —— 瑞士数学家和物理学家.

的形式, 其中

$$P_n = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta+n-1)}{n!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}.$$

b) 证明

$$P_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

c) 现在证明: 当 $\alpha > 0, \gamma-\alpha > 0$ 且 $0 < x < 1$ 时,

$$P(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

d) 在补充条件 $\gamma-\alpha-\beta > 0$ 下, 说明能在最后的等式两边令 $x \to 1-0$ 取极限的理由, 并证明

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha,\beta,\gamma,1),$$

从而, 得出高斯公式

10. 斯特林[①]公式

证明:

a) $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2x\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^{2m}}{2m+1}$, 当 $|x| < 1$ 时.

b) $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)^4}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{(2n+1)^6}+\cdots.$

c) $1 < \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1+\dfrac{1}{12n(n+1)}$, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时.

d) $1 < \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e} < \dfrac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$

e) $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 是单调递减数列.

f) $b_n = a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ 是单调递增数列.

g) $n! = cn^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$, 其中 $0 < \theta_n < 1, c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

h) 从关系式 $\sin\pi x = \pi x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ 当 $x = \dfrac{1}{2}$ 时能推出瓦里斯公式

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

i) 成立斯特林公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

j) $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x$, 当 $x \to +\infty$ 时.

[①]斯特林 (D. Stirling) (1692—1770) —— 苏格兰数学家.

11. 证明,

$$\Gamma(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\cdot\frac{1}{n!}+\int_1^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt.$$

可用这个等式对除点 $0,-1,-2,\cdots$ 以外的复 $z\in\mathbb{C}$ 定义 $\Gamma(z)$.

§4 函数的卷积和广义函数的初步知识

1. 物理问题中的卷积 (启发性想法)

各种各样的仪器以及自然界中的有生命的和无生命的系统, 都是在实现自己特有的功能, 对外界的每个作用 f, 以相应的信号 $\tilde{f}$ 回应. 换句话说, 每一个这样的仪器或系统都是一个算子 A, 它把输入信号 f 变换为信号 $\tilde{f}=Af$ 输出, 当然, 每一个这样的算子有自己所能接受的信号的区域 (定义域) 以及对这些信号回应的形式 (值域). 对于较广泛一类的实际过程和仪器来说, 保持位移的线性算子 A 是一个合适的数学模型.

定义 1 设 A 是一个线性算子, 它作用在由定义在 $\mathbb{R}$ 上的实 (或复) 值函数组成的线性空间上, 且在同一空间中取值. 用 T_{t_0} 表示*位移算子*, 它作用在同一空间上, 按规律

$$(T_{t_0}f)(t):=f(t-t_0)$$

确定. 如果对于算子 A 的定义域中的任何一个函数 f 都成立等式

$$A(T_{t_0}f)=T_{t_0}(Af),$$

则称*算子 A 是位移不变算子* (*或保位移算子*).

如果 t 是时间, 那么关系式 $A\circ T_{t_0}=T_{t_0}\circ A$ 可以解释成那样的一个假设: 仪器 A 的性质不随时间变化: 仪器对信号 $f(t)$ 与 $f(t-t_0)$ 的响应仅仅区别于时间位移 t_0, 在其他地方没有什么不同.

对于任何一个仪器 A 都有下面两个基本问题: 第一, 预测仪器对任意输入信号 f 的响应 $\tilde{f}$, 第二, 已知仪器的输出信号 $\tilde{f}$, 确定 (如果可能的话) 进入仪器的输入信号 f.

现在我们在启发式水平上, 针对位移不变线性算子 A, 来解决上述两个问题中的第一个, 一个简单而重要的事实是, 为了描述这样的仪器 A 对任何输入信号 f 的响应 $\tilde{f}$, 只要知道仪器 A 对于脉冲作用 δ 的响应 E 就可以了.

定义 2 仪器 A 作用在单位脉冲 δ 上的响应 $E(t)$ 叫做*仪器装置函数* (在光学里), 或者叫做仪器的*脉冲响应* (*函数*)(在电工学里).

通常, 我们将采用比较简短的术语:"脉冲响应 (函数)"*

暂且不深入到细节里, 譬如, 用图 100 中画出的函数 $\delta_\alpha(t)$ 来模拟脉冲, 并认为这个模拟在保持脉冲的总 "能量" $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ 的情况下, 随着 "脉冲" 长度 α 的不断减小变得越来越精确. 为了模拟脉冲, 代替阶梯函数也可以利用满足自然条件

$$f_\alpha \geqslant 0, \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(t)dt = 1, \text{ 且当 } \alpha \to 0 \text{ 时有 } \int_{U(0)} f_\alpha(t)dt \to 1$$

的光滑函数 (图 101), 其中 $U(0)$ 是 $t = 0$ 的任意一个邻域.

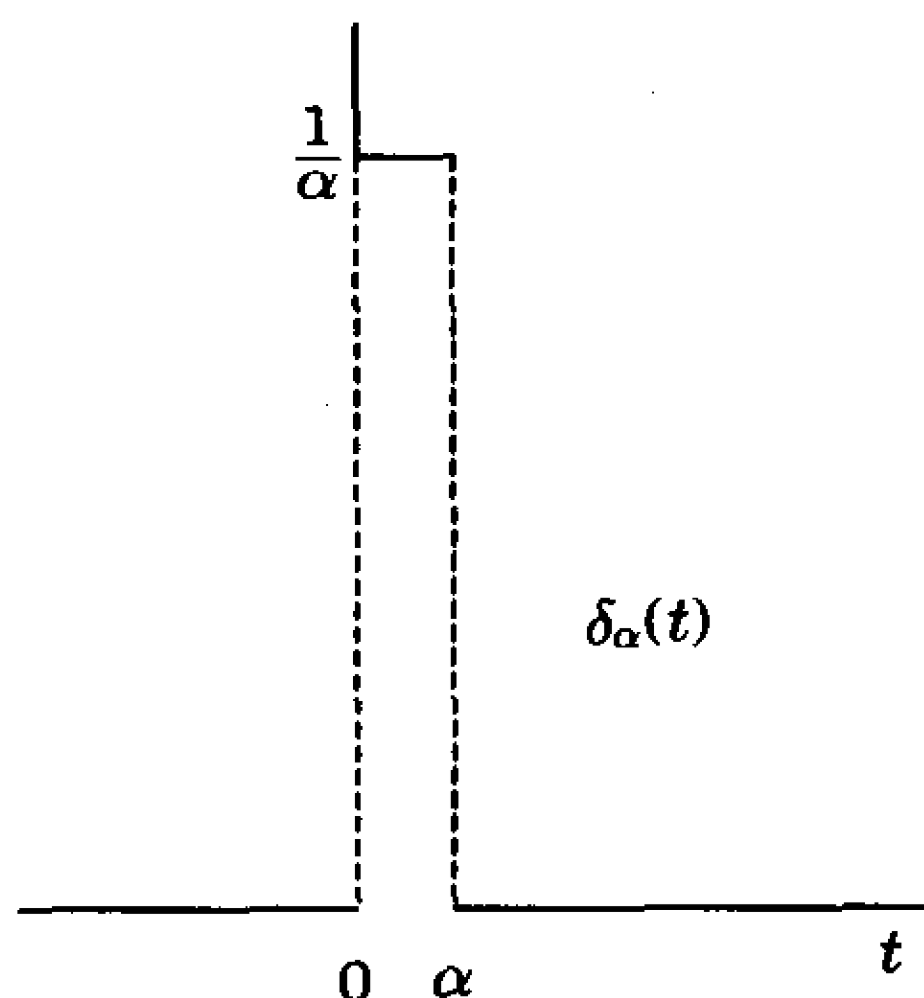


图 100

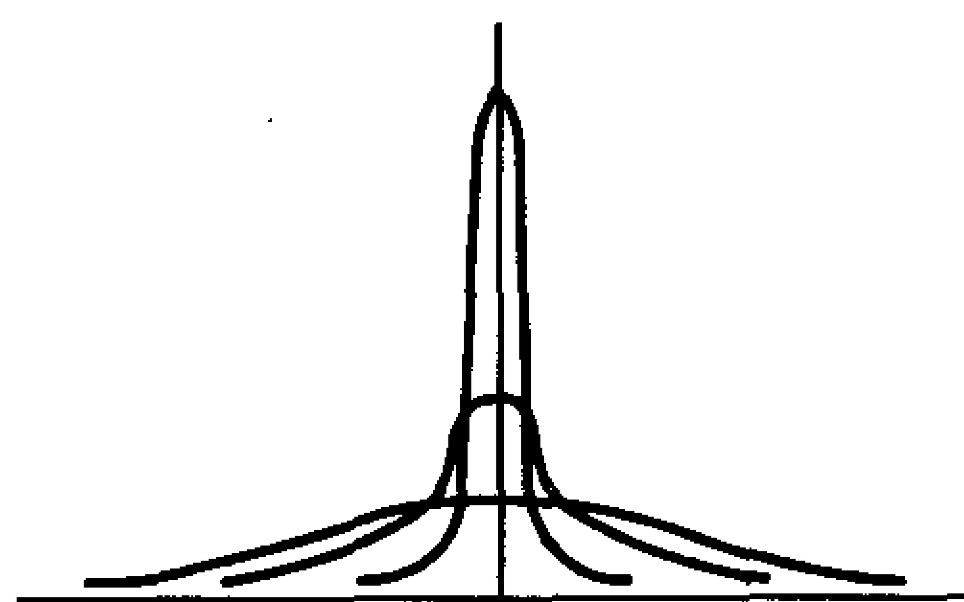


图 101

应该认为函数 $E(t)$ 是仪器 A 对理想的单位脉冲 (遵照狄拉克, 用 δ 表示) 的响应, 而仪器 A 对脉冲 δ 的模拟输入信号的响应将随着模拟输入信号的改善趋于函数 $E(t)$.

当然, 这指的是算子 A 有某种 (暂时还没有精确表述的) 连续性, 即当输入信号 f 连续变化时, 仪器的响应 $\tilde{f}$ 也连续变化.

例如, 如果取阶梯函数序列 $\{\Delta_n(t)\}$, 其中 $\Delta_n(t) := \delta_{\frac{1}{n}}(t)$(图 100), 那么, 令 $E_n := A\Delta_n$, 得到 $A\delta := E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} A\Delta_n$.

现在考虑输入信号 f, 图 102 以及画在图上的分段常值函数 $l_h(t) = \sum\limits_i f(\tau_i)\delta_h(t - \tau_i)h$. 因为当 $h \to 0$ 时, 有 $l_h \to f$, 那么应当认为也有

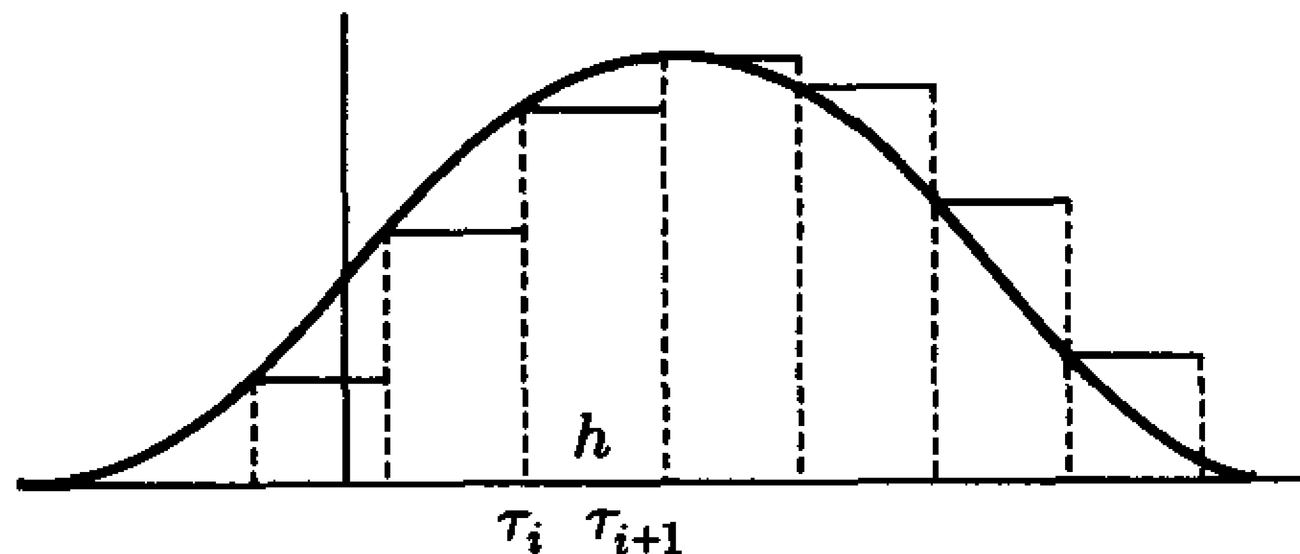


图 102

$$\tilde{l}_h = Al_h \to Af = \tilde{f}, \quad \text{当 } h \to 0 \text{ 时}.$$

* 译者注, 这里原文是采用术语 "装置函数", 考虑我国的习惯, 我们改用控制论中通用术语 " 脉冲响应 (函数)".

但是, 如果算子 A 是线性和保持位移的, 那么

$$\tilde{l}_h(t) = \sum_i f(\tau_i) E_h(t-\tau_i)h,$$

其中 $E_h = A\delta_h$. 于是, 当 $h \to 0$ 最终得到

$$\tilde{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)E(t-\tau)d\tau. \tag{1}$$

公式 (1) 解决了上述两问题中的第一个, 它用一个特殊的依赖于参变量 t 的积分表示出了仪器 A 的响应 $\tilde{f}(t)$. 这个积分完全由输入信号 $f(t)$ 与仪器 A 的脉冲响应函数 $E(t)$ 所确定. 从数学的观点看, 仪器 A 和积分 (1) 简直就是同一个东西.

顺便指出, 现在可以把由输出信号 $\tilde{f}$ 确定输入信号 f 的问题归结为求解关于 f 的积分方程 (1) 的问题.

定义 3 由关系式

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)dy \tag{2}$$

(假定对一切 $x \in \mathbb{R}$, 该式中的反常积分存在) 确定的函数 $u*v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 叫做*函数* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *与* $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *的卷积*.

于是, 公式 (1) 断定, 保位移的线性仪器 A 对由函数 f 给定的输入的响应是函数 f 与仪器 A 的脉冲响应函数 E 的卷积 $f * E$.

2. 卷积的一些一般性质

现在从数学的观点考察卷积的基本性质.

a. 存在性的充分条件

首先回忆某些定义和记号.

设 $f : G \to \mathbb{C}$ 是定义在开集 $G \subset \mathbb{R}$ 上的实或复函数.

如果每一点 $x \in G$ 都有邻域 $U(x) \subset G$, 使函数 $f|_{U(x)}$ 在 $U(x)$ 中可积, 则称函数 f 是 G 上的*局部可积函数*. 特别地, 如果 $G = \mathbb{R}$, 函数 f 局部可积的条件显然等价于, 对任何区间 $[a,b]$, $f|_{[a,b]} \in \mathfrak{R}[a,b]$.

集合 $\{x \in G | f(x) \neq 0\}$ 在 G 中的闭包叫做*函数 f 的支集* (记作 $\operatorname{supp} f$).

称函数 f 是 *G 中具有紧支集的函数*, 如果它的支集是 G 中的紧集.

通常把在 G 中具有直至 $m(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ 阶连续导数的函数 $f : G \to \mathbb{C}$ 的集合记作 $C^{(m)}(G)$, 而由具有紧支集的函数构成的它的子集用记号 $C_0^{(m)}(G)$ 表示, 在 $G = \mathbb{R}$ 的情况下, 代替 $C^{(m)}(\mathbb{R})$ 与 $C_0^{(m)}(\mathbb{R})$ 通常相应地简记作 $C^{(m)}$ 与 $C_0^{(m)}$.

现在指出函数卷积的最常见的情形, 其中卷积的存在性的证明没有什么困难.

命题 1 以下列举的三个条件中的每一个, 都是局部可积函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 与 $v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的卷积 $u*v$ 存在的充分条件:

1) 函数 $|u|^2$ 与 $|v|^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积

2) 函数 $|u|,|v|$ 之一在 $\mathbb{R}$ 上可积, 而另一个在 $\mathbb{R}$ 上有界

3) 函数 u,v 之一具有紧支集.

◀ 1) 据柯西 – 布尼雅可夫斯基不等式

$$\int_{\mathbb{R}}|u(y)v(x-y)|dy\leqslant\int_{\mathbb{R}}|u|^2(y)dy\cdot\int_{\mathbb{R}}|v|^2(x-y)dy,$$

由此推出积分 (2) 的存在性, 因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2(x-y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2(y)dy.$$

2) 譬如, $|u|$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 而在 $\mathbb{R}$ 上有 $|v|\leqslant M$, 那么

$$\int_{\mathbb{R}}|u(y)v(x-y)|dy\leqslant M\int_{\mathbb{R}}|u|(y)dy<+\infty.$$

3) 设 $\mathrm{supp}u\subset[a,b]\subset\mathbb{R}$, 这时显然有

$$\int_{\mathbb{R}}u(y)v(x-y)dy=\int_a^b u(y)v(x-y)dy.$$

因为 u 与 v 是局部可积的, 所以最后的积分对任何 $x\in\mathbb{R}$ 都存在.

当函数 v 具有紧支集时, 利用变量替换 $x-y=z$ 即可归结为已分析过的情况. ▶

b. 对称性

命题 2 如果卷积 $u*v$ 存在, 那么卷积 $v*u$ 也存在, 且有等式

$$u*v=v*u \tag{3}$$

◀ 在积分 (2) 中实行变量替换 $x-y=z$, 得到

$$u*v(x):=\int_{-\infty}^{\infty}u(y)v(x-y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}v(z)u(x-z)dz=:v*u(x).$$ ▶

c. 保位移性

像上面那样, 设 T_{x_0} 是位移算子, 即 $(T_{x_0})f(x)=f(x-x_0)$.

命题 3 如果函数 u 和 v 的卷积 $u*v$ 存在, 那么有下面等式

$$T_{x_0}(u*v)=T_{x_0}u*v=u*T_{x_0}v. \tag{4}$$

◀ 如果还记得公式 (1) 的物理意义, 那么这里的第一个等式是显然的, 而第二等式可由卷积的对称性得到. 但是我们还是要给第一个等式一个正式的证明.

$$(T_{x_0}(u*v))(x) := (u*v)(x-x_0) := \int_{-\infty}^{\infty} u(y)v(x-x_0-y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(y-x_0)v(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} (T_{x_0}u)(y)v(x-y)dy$$
$$=: ((T_{x_0}u)*v)(x).$$ ▶

d. 卷积的微分法

函数的卷积是一个含参变量积分, 从而它的微分法可按这种积分的微分法的一般规律进行, 当然, 需要相应的条件.

例如, 如果 u 是连续的, 而 v 是光滑函数, 且函数 u 和 v 之一具紧支集, 那么函数 u 与 v 的卷积显然满足连续可微的条件.

◀ 事实上, 如果限定参变量在任何有限区间上变化, 那么在所指出的条件下, 整个积分 (2) 归结为在某个不依赖于 x 的有限区间上的积分, 而这样的积分是可以按照古典的莱布尼茨法则关于参变量微分的. ▶

一般地, 有以下命题成立.

命题 4 *如果 u 是局部可积函数, v 是具紧支集函数类 $C_0^{(m)}(0 \leqslant m \leqslant +\infty)$ 中的函数, 那么, $(u*v) \in C^{(m)}$, 而且*①

$$D^k(u*v) = u*(D^k v). \tag{5}$$

◀ 当 u 是连续函数时, 从上面刚证明的结果可直接推出命题, 在一般情况下, 如果再注意到 §1 练习 6 中做过的考察, 也能证得本命题. ▶

注 1 由于卷积的可交换性 (公式 (3)), 如果把 u 与 v 的位置交换但保持等式 (5) 的左端, 命题 4 按理说有效.

公式 (5) 说明, 卷积和微分算子交换类似于它和位移算子交换 (公式 (4)), 但是, 尽管公式 (4) 对 u 与 v 是对称的, 而公式 (5) 的右端的 u 与 v, 一般来说, 不可以交换位置, 因为函数 u 可能根本没有相应的导数. 如从公式 (5) 所见, 此时卷积 $u*v$ 仍然能够是可微函数. 这件事使我们产生一个想法, 命题 4 中所说的是卷积可微性的充分条件, 但不是必要的.

例 1 设 f 是局部可积函数, 而 δ_α 是图 100 表示的 "阶梯函数", 这时

$$(f*\delta_\alpha)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta_\alpha(x-y)dy = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} f(y)dy. \tag{6}$$

①这里 D 是微分算子, 即 $D^k v = v^{(k)}$

因此, 在函数 f 的任一连续点处, 卷积 $f*\delta_\alpha$ 是可微的 —— 积分的平均作用.

命题 4 所表述的卷积可微性条件, 对于实践中运用公式 (5) 时所有遇到的情况是完全足够的. 鉴于此, 我们将不作更加精细的进一步的研究. 而宁愿转而展示由卷积的磨光效应产生的一些新的诱人的机会.

3. $\delta-$ 型函数族和魏尔斯特拉斯逼近定理

我们注意到关系式 (6) 中的积分给出了函数 f 在区间 $[x-\alpha, x]$ 上的平均值, 如果 f 在点 x 连续, 那么, 显然当 $\alpha\to 0$ 时, 有 $(f*\delta_\alpha)(x)\to f(x)$. 遵照第 1 段关于 $\delta-$ 函数概念的启发性的想法, 我们想把这个关系写成极限等式的形式:

$$\text{若 } f \text{ 在 } x \text{ 连续, 有 } (f*\delta)(x)=f(x). \tag{7}$$

这个等式表明, 关于卷积算子,$\delta-$ 函数能够解释成单位 (中立的) 元素. 如果能证明任何一个收敛于 $\delta-$ 函数的函数族都具有和 (6) 中所考察的特殊的 δ_α 函数族同样的性质, 则等式 (7) 可以认为是意义清晰的.

现在转到精确的陈述并引入今后有用的

定义 4　由依赖于参变量 $\alpha\in A$ 的函数 $\Delta_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 构成的函数族 $\{\Delta_\alpha, \alpha\in A\}$ 叫做 A 中关于基底 $\mathfrak{B}$ 的 $\delta-$ *型的* 或*逼近单位的函数族*, 如果它满足下面三个条件

a) 函数族中所有函数都是非负的 $(\Delta_\alpha(x)\geqslant 0)$;

b) 对于函数族中任一函数 Δ_α, 有 $\int_{\mathbb{R}}\Delta_\alpha(x)dx=1$;

c) 对于点 $0\in\mathbb{R}$ 的任一邻域 U, 有 $\lim\limits_{\mathfrak{B}}\int_U\Delta_\alpha(x)dx=1$.

考虑到第一、第二个条件, 最后的条件显然与 $\lim\limits_{\mathfrak{B}}\int_{\mathbb{R}\setminus U}\Delta_\alpha(x)dx=0$ 等价.

第 1 段以及例 1 中研究的由 "阶梯函数" δ_α 构成的函数族当 $\alpha\to 0$ 时是 $\delta-$ 型的. 我们再举一些 $\delta-$ 型函数族的例子

例 2　设 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的任意非负紧支可积函数且 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=1$. 当 $\alpha>0$ 时构造函数 $\Delta_\alpha(x):=\dfrac{1}{\alpha}\varphi\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, 这些函数构成的函数族当 $\alpha\to+0$ 时显然是逼近单位的 (参看图 101).

例 3　考虑函数序列

$$\Delta_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-x^2)^n}{\displaystyle\int_{|x|<1}(1-x^2)^n dx}, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

为了确定这个序列是 $\delta-$ 型的, 在定义 4 中除条件 a), b) 外, 只需验证在基底 $n\to\infty$ 下条件, c) 是满足的. 因为对任意的 $\varepsilon\in]0,1]$, 有

$$0\leqslant\int_\varepsilon^1(1-x^2)^n dx\leqslant\int_\varepsilon^1(1-\varepsilon^2)^n dx=(1-\varepsilon^2)^n(1-\varepsilon)\to 0,\ \text{当 } n\to\infty \text{ 时},$$

同时

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx > \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

由此推出条件 c) 是满足的.

例 4 设

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \cos^{2n} x \ \Big/ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, & |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

和例 3 一样, 只要验证条件 c) 即可, 首先注意到

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n} > \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2n}.$$

另一方面, 当 $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^{2n} x dx \leqslant \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^{2n} \varepsilon dx < \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^{2n}.$$

比较所得不等式得, 对任何 $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, 有

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} \Delta_n(x) dx \to 0, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时},$$

由此推出定义 4 的条件 c) 是满足的.

定义 5 给定函数 $f: G \to \mathbb{C}$ 和集合 $E \subset G$. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$, 都存在数 $\rho > 0$, 使得对任何 $x \in E$ 和任何 x 在 G 中的 $\rho-$ 邻域 $U_G^\rho(x)$ 中的点 y, 都成立关系式 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 则称 f 是*在集合 E 上一致连续*.

特别地, 如果 $E = G$, 就回到了函数在整个自己的定义域上一致连续的定义.

现在证明以下基本的命题.

命题 5 *设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是有界函数, 而 $\{\Delta_\alpha, \alpha \in A\}$ 当 $\alpha \to \omega$ 时是 $\delta-$ 型函数族, 如果对任何 $\alpha \in A$, 卷积 $f * \Delta_\alpha$ 存在且函数 f 在集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上一致连续, 那么在 E 上,*

$$(f * \Delta_\alpha)(x) \rightrightarrows f(x), \quad \text{当 } \alpha \to \omega \text{ 时}.$$

这就是说, 函数族 $f * \Delta_\alpha$ 在它一致连续的集合 E 上一致收敛到函数 f. 特别地, 如果 E 只由一个点 x 组成, f 在 E 上一致连续条件归结为函数 f 在点 x 的连续条件, 而且得到, 当 $\alpha \to \omega$ 时, $(f * \Delta_\alpha)(x) \to f(x)$. 这正是我们当初那样写关系式 (7) 的理由.

现在来证明命题 5.

◀ 设在 $\mathbb{R}$ 上, $|f(x)| \leqslant M$, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 根据定义 5 挑选 $\rho > 0$ 且用 $U(0)$ 表示点 0 在 $\mathbb{R}$ 中的 $\rho-$ 邻域.

考虑到卷积的对称性, 得到以下对所有 $x \in E$ 同时成立的估计:

$$\begin{aligned}
&|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\Delta_\alpha(y)dy - f(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\Delta_\alpha(y)dy \right| \\
&\leqslant \int_{U(0)} |f(x-y) - f(x)|\Delta_\alpha(y)dy + \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} |f(x-y) - f(x)|\Delta_\alpha(y)dy \\
&< \varepsilon \int_{U(0)} \Delta_\alpha(y)dy + 2M \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} \Delta_\alpha(y)dy \\
&\leqslant \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} \Delta_\alpha(y)dy.
\end{aligned}$$

当 $\alpha \to \omega$ 时, 最后的积分趋于零, 于是, 从某个时刻开始, 对所有的 $x \in E$, 有不等式

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

这就完成了命题 5 的证明. ▶

推论 1 任何一个在 $\mathbb{R}$ 上连续的具紧支集的函数能够用无限次可微的具紧支集的函数来一致逼近.

◀ 我们验证, 函数族 $C_0^{(\infty)}$ 在上述意义下在 C_0 中处处稠密. 例如, 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} k \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

其中系数 k 取得使 $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$.

函数 φ 是无限可微的具紧支集的函数. 如例 2 可知无限可微函数族 $\Delta_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha}\varphi\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, 当 $\alpha \to +0$ 时是 $\delta-$ 型的, 如果 $f \in C_0$, 那么显然有 $f * \Delta_\alpha \in C_0$, 除此之外, 由命题 4, $f * \Delta_\alpha \in C_0^{(\infty)}$. 最后, 由命题 5 推出, 在 $\mathbb{R}$ 上, 当 $\alpha \to +0$ 时, $f * \Delta_\alpha \rightrightarrows f$. ▶

注 2 如果所考虑的函数 $f \in C_0$ 属于函数类 $C_0^{(m)}$, 那么, 对于任何 $n \in \{0, 1, \cdots, m\}$, 在 $\mathbb{R}$ 上, 当 $\alpha \to +0$ 时, 有 $(f * \Delta_\alpha)^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$.

◀ 事实上, 此时 $(f * \Delta_\alpha)^{(n)} = f^{(n)} * \Delta_\alpha$ (参看命题 4 和注 1), 剩下的只要引用已证明的推论 1 就可以了. ▶

推论 2 (魏尔斯特拉斯逼近定理) 每一个在闭区间上连续的函数在这个区间上能够用代数多项式一致逼近.

◀ 因为通过线性变换, 多项式仍变为多项式, 而连续性与函数逼近的一致性也同样保持, 我们只要在任何一个方便的区间 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 上验明推论 2 就行了. 因此, 我们设 $0 < a < b < 1$ 且令 $\rho = \min\{a, 1-b\}$. 将我们给定的函数 $f \in C[a,b]$ 按下面方式延拓成 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 F: 当 $x \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$ 时, 令 $F(x) = 0$, 而在区间 $[0,a]$ 和 $[b,1]$ 上, 则分别将 0 与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 与 0 线性连结起来.

现在如果取例 3 的 $\delta-$ 型函数序列 Δ_n, 那么由命题 5 就能推出, 在 $[a,b]$ 上, 当 $n \to \infty$ 时. $F * \Delta_n \rightrightarrows f = F|_{[a,b]}$. 而当 $x \in [a,b] \subset [0,1]$时有

$$\begin{aligned} F * \Delta_n(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\Delta_n(x-y)dy = \int_0^1 F(y)\Delta_n(x-y)dy \\ &= \int_0^1 F(y)p_n \cdot (1-(x-y)^2)^n dy = \int_0^1 F(y)\left(\sum_{k=0}^{2n} a_k(y)x^k\right)dy \\ &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_0^1 F(y)a_k(y)dy\right)x^k. \end{aligned}$$

最后的表达式是 $2n$ 次多项式 $P_{2n}(x)$, 因此, 我们证明了当 $n \to \infty$ 时, 在 $[a,b]$ 上有 $P_{2n} \rightrightarrows f$. ▶

注 3 对上边的论证稍作修改, 可以证明, 如果把区间 $[a,b]$ 改变为 $\mathbb{R}$ 中任意的紧集, 魏尔斯特拉斯定理仍然有效.

注 4 同样不难验证, 对 $\mathbb{R}$ 中任何开集 G 和任何函数 $f \in C^{(m)}(G)$. 存在这样的多项式序列 $\{P_k\}$, 使对每个 $n \in \{0, 1, \cdots, m\}$, 在任一紧集 $K \subset G$ 上, 当 $k \to \infty$ 时, 有 $P_k^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$.

此外, 如果集合 G 还是有界的且 $f \in C^{(m)}(\overline{G})$, 那么能够得到, 在 $\overline{G}$ 上, 当 $k \to \infty$ 时, $P_k^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$.

注 5 像证明推论 2 时曾利用例 3 的 $\delta-$ 型序列那样, 能利用例 4 的序列证明, 在 $\mathbb{R}$ 上任何以 2π 为周期的函数可以用形如

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

的三角多项式一致逼近.

以上仅仅利用了具紧支集的 $\delta-$ 型函数族. 然而应该注意, 在很多情形里, 扮演重要角色的 $\delta-$ 型函数族不是由具紧支集的函数构成的. 我们仅举两个例子

例 5 函数族 $\Delta_y(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{y}{x^2+y^2}$ 当 $y \to +0$ 时是在 $\mathbb{R}$ 上的 $\delta-$ 型函数, 因为当 $y > 0$ 时, $\Delta_y(x) > 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_y(x)dx = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 1,$$

且对任何 $\rho > 0$, 当 $y \to +0$ 时, 关系式

$$\int_{-\rho}^{\rho} \Delta_y(x)dx = \frac{2}{\pi}\text{arctg}\left(\frac{\rho}{y}\right) \to 1$$

成立.

如果 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续的有界函数, 那么, 表达卷积 $f * \Delta_y$ 的函数

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi \tag{8}$$

对任何 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y > 0$ 有定义.

称积分 (8) 为关于半平面 $y > 0$ 的泊松积分, 容易验证 (利用一致收敛的强函数检验法), 它在半平面 $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ 上是无穷次可微的有界函数. 当 $y > 0$ 时, 由积分号下求微分, 得到

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f * \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta_y = 0,$$

即 u 是调和函数.

根据命题 5 还能得到当 $y \to 0$ 时, $u(x,y)$ 收敛到 $f(x)$, 于是积分 (8) 解决了在半平面 $\mathbb{R}_+^2$ 上构造有界调和函数使其在 $\partial\mathbb{R}_+^2$ 上取给定边界值 f 的问题.

例 6 函数族 $\Delta_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上, 当 $t \to +0$ 时是 $\delta-$ 型的. 事实上, $\Delta_t(x) > 0$; 因 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}$ (欧拉 – 泊松积分), 所以 $\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_t(x)dx = 1$; 最后, 对任何 $\rho > 0$, 满足关系式

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\rho/2\sqrt{t}}^{\rho/2\sqrt{t}} e^{-v^2}dv \to 1, \quad 当\ t \to +0\ 时.$$

如果 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界且连续, 那么表达卷积 $f * \Delta_t$ 的函数

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi, \tag{9}$$

当 $t > 0$ 时显然是无穷次可微的.

当 $t > 0$ 时, 由积分号下求微分, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f * \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Delta_t = 0,$$

亦即, 函数 u 满足具有初始条件 $u(x,0) = f(x)$ 的一维热传导方程. 等式 $u(x,0) = f(x)$ 应该理解为由命题 5 推出的极限关系: 当 $t \to +0$ 时, $u(x,t) \to f(x)$.

*4. 分布的初步概念

a. 广义函数的定义

在本节第 1 段中, 经过启发式讨论, 我们得到了公式 (1), 这个公式提供了用仪器 A 的脉冲响应函数 E 确定线性变换 A 对输入信号 f 的响应的可能性, 关于脉冲响应函数的定义, 主要是利用了单位脉冲作用和描写它的 $\delta-$ 函数的某些直观的概念. 但是, $\delta-$ 函数显然不是古典意义下的函数, 因为从古典观点看, 它具有互相矛盾的一组性质: 在 $\mathbb{R}$ 上, $\delta(x) \geqslant 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\delta(x) = 0$; $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$.

和线性算子、卷积、 $\delta-$ 函数以及仪器的脉冲响应函数有关的概念在所谓广义函数理论或者分布理论中都获得了精确的数学描述.

我们现在打算介绍一下这个理论最初的动机和它的越来越得到广泛应用的一些初步知识.

例 7 考虑质量为 m 的质点, 它能沿轴移动, 而只用一根弹簧联结于坐标原点; k 是弹簧的弹性系数. 开始时质点静止地位于坐标原点, 并且在与时间有关的力 $f(t)$ 的作用下沿轴移动, 根据牛顿定律

$$m\ddot{x} + kx = f \tag{10}$$

其中 $x(t)$ 是质点在时刻 t 的坐标 (到平衡位置的位移).

按所指出的条件, 函数 $x(t)$ 由函数 f 唯一确定, 且微分方程 (10) 的解显然线性地依赖它的右端 f. 于是, 我们遇到线性算子 $f \overset{A}{\longmapsto} x$, 这个算子是用关系式 $Bx = f\left(B = m\dfrac{d^2}{dt^2} + k\right)$ 把 $x(t)$ 与 $f(x)$ 联系起来的微分算子 $x \overset{B}{\longmapsto} f$ 的逆. 因为算子 A 显然是保 (关于时间的) 位移的, 那么为了找到这个力学系统对函数 $f(t)$ 的响应 $x(t)$, 按照公式 (1), 只要知道对单位脉冲作用 δ 的响应就足够了, 即只要知道方程

$$m\ddot{E} + kE = \delta \tag{11}$$

的解 (所谓基本解).

如果 δ 实际上表示函数, 那么关系式 (11) 不会出现问题, 然而等式 (11) 暂时是模糊的, 但它在形式上模糊, 而实际上却是错误的, 等式两端是完全不同的东西. 在我们的情况, 需阐明此时等式 (11) 的意义.

我们已经知道对此作出解释的一个方法: 把 $\delta-$ 函数理解为 $\delta-$ 型的古典函数族 $\Delta_\alpha(t)$, 而 E 是方程

$$m\ddot{E}_\alpha + kE_\alpha = \Delta_\alpha$$

的解 $E_\alpha(t)$(在参变量 α 相应变化下) 的极限.

另外一种具有重大优越性的处理这个问题的方法是把函数作原则上的推广. 它的根据是, 一般来说, 我们所观察到的对象一般是用它们和另一些 (“测试”) 对象的

相互作用刻画的. 这就使得我们不把函数看作是在不同点取的一组值, 而是看作能用 "一定的方式" 把它作用于另一些 ("测试") 函数上的对象. 让我们把这个暂时过于笼统的说法具体化.

例 8 设 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 我们取 C_0 类函数 (在 $\mathbb{R}$ 上连续的具紧支集的函数) 作为测试函数, 函数 f 产生如下作用在 C_0 上的泛函

$$\langle f,\varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx. \tag{12}$$

利用 $\delta-$ 型具紧支集的函数族, 容易推出, 在 C_0上,$\langle f,\varphi\rangle \equiv 0$, 当且仅当在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x) \equiv 0$.

于是, 按照 (12), 每个函数 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 产生一个线性泛函 $A: C_0 \to \mathbb{R}$, 并且应当强调的是, 不同的函数 f_1, f_2 对应于不同的泛函 A_{f_1}, A_{f_2}.

这样, 公式 (12) 实现了从函数集合 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 到 C_0 上的线性泛函集合 $\mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 中的嵌入 (内射变换), 也就是说, 每个函数 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 可以解释为某个泛函 $A_f \in \mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$.

如果用 $\mathbb{R}$ 上局部可积的函数集合代替连续函数集合 $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 那么, 按照公式 (12), 也能得出从这个集合到空间 $\mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 的映射, 同时,(在 C_0 上, $\langle f,\varphi\rangle \equiv 0$) $\Leftrightarrow$ (在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 的所有连续点处 $f(x) = 0$, 即在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有 $f(x) = 0$). 因此, 在这种情形下, 得到了从等价函数类到 $\mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 中的嵌入, 这里把仅在零测度集合上取不同值的局部可积函数归并到一个等价类.

这样, 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积函数 f (准确地说是它们的等价类) 按公式 (12) 能够解释为线性泛函 $A_f \in \mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$. 按公式 (12) 实现的把局部可积函数映入空间 $\mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 的映射 $f \mapsto A_f = \langle f,\cdot\rangle$ 并不是到整个空间 $\mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 上的映射, 因此, 把函数解释为 $\mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 的元素 (泛函) 时, 除了被解释成形如 (12) 的泛函的古典函数以外, 我们还得到了新的函数 (泛函), 它们没有古典函数原像.

例 9 设泛函 $\delta \in \mathfrak{L}(C_0,\mathbb{R})$ 由对任何函数 $\varphi \in C_0$ 都成立的关系式

$$\langle \delta,\varphi\rangle := \delta(\varphi) := \varphi(0) \tag{13}$$

确定.

能够验证 (参看练习 7), 无论哪一个在 $\mathbb{R}$ 上局部可积的函数 f 都不能把泛函 δ 表示成 (12) 的形式.

这样, 我们就把古典的局部可积函数集合嵌入到一个更广的线性泛函集合之中. 这些线性泛函称为广义函数或分布 (下面将要给出精确定义). 广泛使用的术语 "分布" 有其物理来源.

例 10 设单位质量 (或单位电荷) 分布在 $\mathbb{R}$ 上, 如果

这个分布在某种意义下是充分正规的, 比如说, 它在 $\mathbb{R}$ 上有连续的或者可积的密度 $\rho(x)$, 那么, 质量 M 和另一个用函数 $\varphi \in C_0^{(\infty)}$ 描述的对象的相互作用就可能用形如

$$M(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\varphi(x)dx$$

的泛函给出.

如果分布是奇异的, 例如所有质量 M 集中在一点, 那么, 把质量想像成 "逐步涂上" 的并借助 $\delta-$ 型正则分布族解释极限的点状态, 可以得到, 质量 M 和上面所说的另一类对象的相互作用应该用公式

$$M(\varphi) = \varphi(0)$$

表示, 这个公式表明, $\mathbb{R}$ 上的这种质量分布应等同于 $\mathbb{R}$ 上的 $\delta-$ 函数 (13).

从以上所作的初步研究, 可以理解下面更一般的

定义 6　设 P 是由函数构成的一个线性空间, 下面称它为*基本函数空间或测试函数空间*, 在 P 中定义了函数的收敛性.

P 上所有线性连续 (实或复) 泛函构成的线性空间 P' 叫做 P 上的*广义函数空间或 P 上的分布空间*. 同时假定, 每个 $f \in P$ 产生一个泛函 $A_f = \langle f, \cdot \rangle \in P'$ 且映射 $f \mapsto A_f$ 是 P 到 P' 中的连续嵌入. P' 中的元叫广义函数或分布. 广义函数的收敛性如下定义:

$$P' \ni A_n \to A \in P' := \forall \varphi \in P(A_n(\varphi) \to A(\varphi)),$$

即*泛函的弱 (逐点或点态) 收敛性*.

在 P 是由在 G 中无限次可微、且具紧支集的函数构成的线性空间 $C_0^{\infty}(G, \mathbb{C})$ 的具体情况下, 其中 G 是 $\mathbb{R}$ 中任一开子集 (也可以是 $\mathbb{R}$), 可以把这个定义说得更详细些.

定义 7 (空间 $\mathfrak{D}$ 与 $\mathfrak{D}'$)　在 $C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ 中引入如下的*收敛性*: 称由函数 $\varphi_n \in C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ 构成的序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于函数 $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$, 如果存在紧集 $K \subset G$, 使函数序列 $\{\varphi_n\}$ 中所有函数的支集含在 K 中, 并且在 $K \subset G$ 上 (从而也在 G 上), 对任何 $m = 0, 1, 2, \cdots$, 当 $n \to \infty$ 时, 有 $\varphi_n^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$.

通常把这样得到的具有给定收敛性的线性空间叫作 $\mathfrak{D}(G)$, 当 $G = \mathbb{R}$ 时, 简记作 $\mathfrak{D}$.

和这两个基本 (测试) 函数空间相对应的广义函数 (分布) 空间分别记作 $\mathfrak{D}'(G)$ 和 $\mathfrak{D}'$.

在本节及以后各节, 除 $\mathfrak{D}'(G)$ 的元素外, 我们不研究其他广义函数, 因此, 如无特别的声明, 分布或广义函数的术语将指 $\mathfrak{D}'(G)$ 的元素.

定义 8 $F \in \mathfrak{D}'(G)$ 称为正则分布，或正则广义函数，如果它能表成

$$F(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(G),$$

其中 f 是 G 上的局部可积函数.

非正则的分布称为*奇异分布*或*奇异广义函数*.

按照这些定义, $\delta-$ 函数 (例 9) 是奇异广义函数.

广义函数 (分布) 在基本 (测试) 函数 φ 上的作用, 也就是 F 与 φ 的配对, 与往常一样, 将用记号 $F(\varphi)$ 或 $\langle F, \varphi \rangle$ 表示.

我们已经引入了广义函数概念, 在转入与广义函数有关的技术性问题的讨论之前, 我们指出, 广义函数概念本身, 与大多数数学概念一样, 也经历了一定的在母体内的发育阶段, 那时它只以萌芽形式出现在一系列数学家的著作中.

遵照狄拉克, 物理学家早在 20 世纪 20 年代末到 30 年代初就已经积极地使用了 $\delta-$ 函数和进行奇异广义函数运算, 并未因缺乏应有的数学理论而踌躇不安.

С. Л. 索伯列夫[1] 以明确形式提出了广义函数的思想, 他在 30 年代中期奠定了广义函数理论的数学基础. 现代分布理论形态在相当大的程度上和 40 年代末 L. 施瓦兹[2]所完成的工作有关. 这就是为什么常把广义函数空间 $\mathfrak{D}'$ 叫做*索波列夫 - 施瓦兹广义函数空间* 的理由.

现在叙述分布理论的某些基础材料, 主要是与微分方程、数学物理方程及其应用的理论需求有关的方面, 这些理论内容的应用和发展, 一直持续到今天.

为了简化书写, 以后我们将只考虑广义函数类 $\mathfrak{D}'$, 虽然从定义及证明中可以看出, 所有性质对任何一类 $\mathfrak{D}'(G)$ 中的分布 (其中 G 是 $\mathbb{R}$ 的任一开集) 仍然有效.

分布的运算是以对古典函数 (即正则广义函数) 成立的积分关系式为依据定义的.

b. 分布与函数的乘积

如果 f 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积, $g \in C^{(\infty)}$, 那么对任何函数 $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, 一方面有 $g\varphi \in C_0^{(\infty)}$, 另一方面, 显然成立等式

$$\int_{\mathbb{R}} (f \cdot g)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(g \cdot \varphi)(x)dx$$

或用另一种符号表示成

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle.$$

---

[1] 索伯列夫(С. Л. Соблев) (1908—1989) —— 现代最伟大的苏联数学家之一.

[2] 施瓦兹(L. Schwartz) (1915—) —— 现代著名的法国数学家. 他在 1950 年国际数学家大会上提出的报告, 获得了专为青年数学家设置的菲尔兹奖.

这个对正则广义函数成立的关系式, 是分布 $F \in \mathfrak{D}'$ 与函数 $g \in C^{(\infty)}$ 的乘积 $F \cdot g$ 的下述定义的基础:

$$\langle F \cdot g, \varphi \rangle := \langle F, g \cdot \varphi \rangle. \tag{14}$$

等式 (14) 的右端是有定义的, 从而给出泛函 $F \cdot g$ 在任何一个函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 上的值, 亦即给出了泛函 $F \cdot g$ 本身.

例 11 我们来研究, 分布 $\delta \cdot g$ 是怎样作用的, 这里 $g \in C^{(\infty)}$. 根据定义 (14) 和分布 δ 的定义, 得到

$$\langle \delta \cdot g, \varphi \rangle := \langle \delta, g \cdot \varphi \rangle := (g \cdot \varphi)(0) := g(0)\varphi(0).$$

c. 广义函数的微分

如果 $f \in C^{(1)}, \varphi \in C_0^{(\infty)}$, 那么利用分部积分法得到等式

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx. \tag{15}$$

这个等式是下面的*广义函数* $F \in \mathfrak{D}'$ *微分法*的基本定义的出发点:

$$\langle F', \varphi \rangle := -\langle F, \varphi' \rangle \tag{16}$$

例 12 如果 $f \in C^{(1)}$, 那么, f 在古典意义下的导数和 f 在分布理论中的导数 (自然, 是按照常规把古典函数等同于与它对应的正则广义函数) 是一致的. 这可从关系式 (15) 和 (16) 的对照中推出, 因为当分布 F 是由函数 f 产生的时候, 这两式右端相同.

例 13 我们取赫维赛德[①]函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

有时也称它为*单位阶跃函数*, 把它看作广义函数, 我们来求这个在古典意义下间断的函数的导数 H'.

根据与赫维赛德函数相应的正则广义函数 H 的定义, 以及关系式 (16), 并注意 $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, 得到

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle := -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

于是, 对任何 $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, 有 $\langle H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$, 因此, $H' = \delta$.

[①] 赫维赛德 (O. Heaviside) (1850—1925) —— 英国物理学家和工程师, 他曾在象征性符号水平上研究过现在称之为算子演算的重要数学工具.

例 14　计算 $\langle\delta',\varphi\rangle$:

$$\langle\delta',\varphi\rangle := -\langle\delta,\varphi'\rangle := -\varphi'(0).$$

自然地, 在广义函数里, 和在古典情况一样, 高阶导数定义为 $F^{(n+1)} := (F^{(n)})'$. 对照最后两个例子的结果, 可得

$$\langle H'',\varphi\rangle = -\varphi'(0).$$

例 15　证明 $\langle\delta^{(n)},\varphi\rangle = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$.

◀ 当 $n=0$ 时, 这是 $\delta-$ 函数的定义.

我们在例 14 中已证明了当 $n=1$ 时所写出的等式是正确的.

我们用归纳法证明它. 假定对固定的 $n\in\mathbb{N}$ 已经证明了它成立, 根据定义 (16) 得到

$$\begin{aligned}\langle\delta^{(n+1)},\varphi\rangle &:= \langle(\delta^{(n)})',\varphi\rangle := -\langle\delta^{(n)},\varphi'\rangle = -(-1)^n(\varphi')^{(n)}(0)\\ &= (-1)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(0).\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

例 16　设函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 当 $x<0$和 $x>0$ 时是连续可微的, 并在点 0 存在单侧极限 $f(-0), f(+0)$. 用 $\rfloor f(0)$ 表示函数在点 0 的跃度 $f(+0)-f(-0)$, f' 表示函数 f 在分布理论意义下的导数, 而 $\{f'\}$ 表示当 $x<0$ 和 $x>0$ 时等于 f 的通常导数的那个函数所确定的分布. 当 $x=0$ 时, 最后说的这个函数没有定义, 但这对于利用积分确定与它相应的正则分布 $\{f'\}$ 无关紧要.

在例 1 中, 我们已指出, 如果 $f\in C^{(1)}$, 那么 $f'=\{f'\}$, 我们来证明, 在一般情况下, 这是不正确的, 但成立以下重要公式:

$$f' = \{f'\} + \rfloor f(0)\cdot\delta. \tag{17}$$

◀ 事实上,

$$\begin{aligned}\langle f',\varphi\rangle &= -\langle f,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)(f(x)\varphi'(x))dx\\ &= -\left((f\cdot\varphi)(x)|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)dx + (f\cdot\varphi)(x)\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx\right)\\ &= (f(+0)-f(-0))\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx\\ &= \langle\rfloor f(0)\cdot\delta,\varphi\rangle + \langle\{f'\},\varphi\rangle.\ \blacktriangleright\end{aligned}$$

如果函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 在区间 $x<0$ 和 $x>0$ 上存在直至 m 阶的连续导数, 而且, 它们在当 $x=0$ 都存在单侧极限, 那么, 重复在推导 (17) 时所进行的论证将得到

$$f^{(m)} = \{f^{(m)}\} + \rfloor f(0)\cdot\delta^{(m-1)} + \rfloor f'(0)\cdot\delta^{(m-2)} + \cdots + \rfloor f^{(m-1)}(0)\cdot\delta \tag{18}$$

现在证明广义函数微分运算的某些性质

命题 6 a) *任何广义函数 $F \in \mathfrak{D}'$ 是无穷次可微的.*

b) *微分算子 $D : \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}'$ 是线性的.*

c) *如果 $F \in \mathfrak{D}', g \in C^{(\infty)}$, 那么 $(F \cdot g) \in \mathfrak{D}'$ 且有莱布尼茨公式*

$$(F \cdot g)^{(m)} \doteq \sum_{k=0}^{m} C_m^k F^{(k)} \cdot g^{(m-k)}.$$

d) *微分算子 $D : \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}'$ 是连续的.*

e) *如果由局部可积函数 $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 组成的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 的每个紧集上一致收敛, 那么在广义函数意义下它可以逐项微分任意次, 且由此得到的级数在 $\mathfrak{D}'$ 中收敛.*

◀ a) $\langle F^{(m)}, \varphi \rangle := -\langle F^{(m-1)}, \varphi' \rangle := (-1)^m \langle F, \varphi^{(m)} \rangle$.

b) 显然.

c) 我们验证公式对 $m = 1$ 成立.

$$\begin{aligned}\langle (F \cdot g)', \varphi \rangle &:= -\langle Fg, \varphi' \rangle := -\langle F, g \cdot \varphi' \rangle = -\langle F, (g \cdot \varphi)' - g' \cdot \varphi \rangle \\ &= \langle F', g\varphi \rangle + \langle F, g' \cdot \varphi \rangle = \langle F' \cdot g, \varphi \rangle + \langle F \cdot g', \varphi \rangle \\ &= \langle F' \cdot g + F \cdot g', \varphi \rangle.\end{aligned}$$

一般情况可以用归纳法证明.

d) 设在 $\mathfrak{D}'$ 中, 当 $m \to \infty$ 时, $F_m \to F$, 即当 $m \to \infty$ 时, 对任何函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$, 有 $\langle F_m, \varphi \rangle \to \langle F, \varphi \rangle$. 这时

$$\langle F'_m, \varphi \rangle := -\langle F_m, \varphi' \rangle \to -\langle F, \varphi' \rangle =: \langle F', \varphi \rangle.$$

e) 在所指出的条件下, 级数和 $S(x)$, 作为局部可积函数 $S_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$ 在紧集上的一致收敛极限, 其本身也是局部可积的. 只需注意, 对任何函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$(即具紧支的无穷次可微函数), 有关系式

$$\langle S_m, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} S_m(x)\varphi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} S(x)\varphi(x)dx = \langle S, \varphi \rangle.$$

现在由 d) 即可推出, 当 $m \to \infty$ 时, $S'_m \to S'$. ▶

我们看到, 广义函数的微分运算除了保持有古典微分法的重要性质外, 还具有一系列新的美妙性质, 这大大增加了运算的灵活性. 这种灵活性在古典情形下是没有的, 因为那里存在不可微函数, 而且古典微分运算关于极限过程是不稳定的 (缺乏连续性).

d. 基本解和卷积

在本段开始, 我们讲述了单位脉冲和仪器的脉冲响应函数的直观的概念. 在例 7 中给我们考察了一个最简单的力学系统. 这个系统用自然的方式产生了一个保持时间位移的线性算子. 对这个系统的研究, 使我们得到了这个算子的脉冲响应函数 E 应该满足的方程 (11).

在即将结束这一节时, 我们重新回到这些问题, 但这一次的目的是, 要用广义函数语言给出它们的合适的数学描述.

从理解方程 (11) 开始, 在它的右端是广义函数 δ, 因此关系式 (11) 应该解释为广义函数的等式. 因为我们知道广义函数的微分运算和线性运算, 所以, 方程 (11) 的左端即使在广义函数的意义下, 也是清楚的.

我们试图求解方程 (11).

当 $t<0$ 时, 系统处于静止状态, 当 $t=0$ 时, 质点得到一个单位脉冲, 因此在时刻 $t=0$, 它获得那样一个速度 $v=v(0)$, 使 $mv=1$. 当 $t>0$ 时, 系统不受外力作用, 它的运动规律 $x=x(t)$ 服从常微分方程

$$m\ddot{x}+kx=0, \tag{19}$$

这个方程应在初始条件 $x(0)=0, \dot{x}(0)=v=\dfrac{1}{m}$ 下求解.

这样的解是唯一的, 且能立刻写出:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad t\geqslant 0.$$

因为在我们的情况下, 当 $t<0$ 时, 系统静止, 所以可推出

$$E(t)=\frac{H(t)}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{20}$$

其中 H 是赫维赛德函数 (参看例 13).

利用广义函数微分法则及上边研究过的例子的结果, 现在可以验证, 由 (20) 给出的函数 $E(t)$ 适合方程 (11).

为了简化书写, 我们来验证, 函数

$$e(x)=H(x)\frac{\sin\omega x}{\omega} \tag{21}$$

在分布理论的意义下适合方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)e=\delta. \tag{22}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)e &= \frac{d^2}{dx^2}\left(H\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)+\omega^2\left(H\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)\\ &= H''\frac{\sin\omega x}{\omega}+2H'\cos\omega x-\omega H(x)\sin\omega x+\omega H(x)\sin\omega x\\ &= \delta'\frac{\sin\omega x}{\omega}+2\delta\cos\omega x.\end{aligned}$$

其次, 对任何函数 $\varphi\in\mathfrak{D}$,

$$\begin{aligned}\left\langle\delta'\frac{\sin\omega x}{\omega}+2\delta\cos\omega x,\varphi\right\rangle &= \left\langle\delta',\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi\right\rangle+\langle\delta,2\varphi\cos\omega x\rangle\\ &= -\left\langle\delta,\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi\right)\right\rangle+2\varphi(0)\\ &= -\left(\cos\omega x\cdot\varphi(x)+\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi'(x)\right)\bigg|_{x=0}+2\varphi(0)\\ &= \varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

从而证明了函数 (21) 适合方程 (22).

最后, 我们引进如下

定义 9 在算子 $A:\mathfrak{D}'\to\mathfrak{D}'$ 的作用下变为广义函数 $\delta\in\mathfrak{D}'$, 亦即满足 $A(E)=\delta$ 的广义函数 $E\in\mathfrak{D}'$, 叫做*算子 A 的基本解或格林函数* (*脉冲响应函数或影响函数*).

例 17 根据这些定义, 函数 (21) 是算子 $A=\left(\dfrac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)$ 的基本解, 因为它适合方程 (22).

函数 (20) 适合方程 (11), 也就是说是算子 $A=\left(m\dfrac{d^2}{dt^2}+k\right)$ 的格林函数. 在上一节第 1 段中已经讨论过保位移算子的脉冲响应函数的基本作用, 在那里得到了公式 (1), 根据它, 现在能写出方程 (10) 在例 7 中所指出的初始条件下的解

$$x(t)=(f*E)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)H(\tau)\frac{\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t}{\sqrt{km}}d\tau, \tag{23}$$

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\int_0^{+\infty}f(t-\tau)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau d\tau. \tag{24}$$

注意到所展示的卷积和基本解的重要作用, 很明显, 我们也希望能定义广义函数的卷积. 这是分布理论要做的, 但我们不再讨论这些问题, 仅仅指出, 在正则分布情况下, 广义函数的卷积的定义等价于上面讲过的函数卷积的经典定义.

练 习

1. a) 验证卷积的结合律: $u*(v*w)=(u*v)*w$.

b) 照例设 $\Gamma(\alpha)$ 是欧拉 Γ 函数, $H(x)$ 是赫维赛德函数, 令

$$H_\lambda^\alpha(x):=H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x},\quad \alpha>0,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

证明: $H_\lambda^\alpha * H_\lambda^\beta = H_\lambda^{\alpha+\beta}$.

c) 验证: 函数 $F=H(x)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}$ 是函数 $f=H(x)e^{\lambda x}$ 的 n 次幂卷积, 即 $F=\underbrace{f*f*\cdots*f}_{n}$.

***2.** 设随机变量 ξ 具有高斯正态分布密度 $G_\sigma(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,(\sigma>0)$.

a) 试对不同参数 σ 的值绘出函数 $G_\sigma(x)$ 的图像.

b) 试证, ξ 的数学期望 (或平均值) $E\xi:=\int_{-\infty}^{\infty}xG_\sigma(x)dx=0$.

c) 试证: ξ 的均方差 (或标准差) $\sqrt{D\xi}:=\sqrt{E((\xi-E\xi)^2)}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2G_\sigma(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ $=\left(\int_{-\infty}^{\infty}x^2G_\sigma(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sigma$.

d) 在概率论中证明了, 两个独立的随机变量的和的概率分布密度等于它们的概率分布密度的卷积. 试证, $G_\alpha * G_\beta = G_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

e) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 个独立的具同一分布密度函数 $G_\sigma(x)$ 的随机变量 (例如, 同一个对象的 n 次独立的测量值). 试证, 它们的和 $\eta=\xi_1+\cdots+\xi_n$ 的分布密度为 $G_{\sigma\sqrt{n}}(x)$, 特别地, 由此推出, 它们的算术平均值 $\xi=\dfrac{1}{n}\eta$ 的均方差 $D\xi=\sigma/\sqrt{n}$.

3. 称函数 $A(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 为数列 $a_0,a_1,\cdots$ 的生成函数.

给定两个数列 $\{a_k\},\{b_k\}$. 如果认为当 $k<0$ 时, $a_k=b_k=0$, 那么, 自然地把 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 的卷积定义作 $\left\{c_k=\sum\limits_m a_mb_{k-m}\right\}$. 试证, 两个数列卷积的生成函数等于它们的生成函数的乘积.

4. a) 试验证: 如果卷积 $u*v$ 有定义, 而函数 u,v 之中有一个是以 T 为周期的周期函数, 那么, $u*v$ 也是以 T 为周期的周期函数.

b) 试证用三角多项式逼近连续周期函数的魏尔斯特拉斯定理 (参看注 5)

c) 试证注 4 中指出的加强的魏尔斯特拉斯逼近定理.

5. a) 设紧集 $K\subset\mathbb{R}$ 严格包含集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 于自己内部. 试根据命题 5 证明: 在 E 上, 当 $k\to\infty$ 时, $\int_K f(y)\Delta_k(x-y)dy\rightrightarrows f(x)$.

b) 试从展开式 $(1-z)^{-1}=1+z+z^2+\cdots$ 推出

$$g(\rho,\theta):=\frac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})}=\frac{1}{2}+\rho e^{i\theta}+\rho^2e^{i2\theta}+\cdots,\quad 0\leqslant\rho<1.$$

---

* 译者注, 为了读者阅读方便, 本题的叙述作了稍许改动.

c) 试验证: 当 $0 \leqslant \rho < 1$ 时,

$$P_\rho(\theta) := \mathrm{Re}g(\rho, \theta) = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \cdots,$$

且函数 $P_\rho(\theta)$ 有如下形式

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2},$$

叫做圆的泊松核.

d) 试证: 由依赖于参变量 $\rho \in [0,1[$ 的函数 $P_\rho(\theta)$ 构成的函数族具有性质: $P_\rho(\theta) \geqslant 0$; $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_\rho(\theta)d\theta = 1$; 当 $\rho \to 1-0$ 时, $\int_{\varepsilon>0}^{2\pi-\varepsilon} P_\rho(\theta)d\theta \to 0$.

e) 试证: 如果 $f \in C[0, 2\pi]$, 那么函数

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_\rho(\theta - t)f(t)dt$$

在圆 $\rho < 1$ 内是调和函数, 并且当 $\rho \to 1-0$ 时, $u(\rho, \theta) \rightrightarrows f(\theta)$. 这样一来, 用泊松核能在圆内构造在圆的边界上取给定边界值的调和函数.

f) 设 u, v 是具有相同周期 T 的局部可积函数, 可以按以下方式正确地定义卷积运算 (周期卷积)

$$(u \underset{T}{*} v)(x) := \int_a^{a+T} u(y)v(x-y)dy.$$

$\mathbb{R}$ 上的周期函数可以解释为定义在圆周上的函数, 因此自然认为上边引进的运算是给定在圆周上的两个函数的卷积.

试证: 如果 $f(\theta)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的局部可积函数 (或同样地, f 是圆周上的函数), 由依赖于参数 ρ 的函数 $P_\rho(\theta)$ 构成的函数族具有 d) 中所列举的泊松核的性质, 那么, 当 $\rho \to 1-0$ 时, 在函数 f 的任一连续点处, 有 $(f \underset{2\pi}{*} P_\rho)(\theta) \to f(\theta)$.

6. a) 设

$$\varphi(x) := \begin{cases} a\cdot\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

其中常数 a 选得使 $\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx = 1$. 试验证, 当 $\alpha \to +0$ 时, 函数族 $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ 是 $\mathbb{R}$上的 $C_0^{(\infty)}$ 类 $\delta-$ 型函数族.

b) 对任何区间 $I \subset \mathbb{R}$ 和任何 $\varepsilon > 0$, 构造具如下性质的 $C_0^{(\infty)}$ 类函数 $e(x)$: 在 $\mathbb{R}$ 上,$0 \leqslant e(x) \leqslant 1; e(x) = 1 \Leftrightarrow x \in I; \mathrm{supp}\, e \subset I_\varepsilon$, 其中 I_ε 是 $\mathbb{R}$ 上集合 I 的 $\varepsilon-$ 邻域. (试验证. 对应于 $\alpha > 0$, $e(x)$ 可以取为 $\chi_I * \varphi_\alpha$.)

c) 试验证, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_0^{(\infty)}$ 类中可数个函数 e_k 构成的组 $\{e_k\}$($\mathbb{R}$ 上的 $\varepsilon-$ 单位分解), 它具有下面的性质: $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}(0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1)$; 函数族 $\{e_k\}$ 中任一函数的支集 $\mathrm{supp}\, e_k$ 的直径不超过 $\varepsilon > 0$; 对任一点 $x \in \mathbb{R}$ 只属于有限个集合 $\mathrm{supp}\, e_k$; 在 $\mathbb{R}$ 上, $\sum\limits_k e_k(x) \equiv 1$.

d) 试证: 对开集 $G \subset \mathbb{R}$ 上的任何开覆盖 $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ 和任何函数 $\varphi \in C^{(\infty)}(G)$, 存在由 $C_0^{(\infty)}$ 类中的函数 φ_k 组成的具有下面性质的函数序列 $\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\} : \forall k \in \mathbb{N}, \exists \gamma \in \Gamma(\text{supp}\varphi_k \subset U_\gamma)$; 任意 $x \in G$, 只属于有限个集合 $\text{supp}\varphi_k$; 在 G 上, $\sum\limits_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$.

e) 试证: 集合 $C_0^{(\infty)}(G)$, 作为广义函数的集合, 在正则广义函数集合 $C^{(\infty)}(G)$ 中处处稠密.

f) 称广义函数 $F_1, F_2 \in \mathfrak{D}'(G)$ 在开集 $U \subset G$ 上相等, 如果对任何 $\varphi \in \mathfrak{D}(G), \text{supp}\varphi \subset U$, 恒满足等式 $\langle F_1, \varphi\rangle = \langle F_2, \varphi\rangle$. 称两个广义函数 F_1, F_2 在点 $x \in G$ 局部相等, 如果它们在点 x 的某个开邻域 $U(x) \subset G$ 上相等, 试证: $(F_1 = F_2) \Leftrightarrow$ (在任一点 $x \in G$, 局部地有 $F_1 = F_2$)

7. a) 设

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

试验证: 对 $\mathbb{R}$ 上任何局部可积函数 f, 当 $\varepsilon \to +0$ 时, 有 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx \to 0$, 其中 $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$.

b) 根据上面结果及 $\langle \delta, \varphi_\varepsilon\rangle = \varphi(0) \neq 0$, 试证: 广义函数 δ 不是正则的.

c) 验证: 存在正则广义函数序列 (甚至 $C_0^{(\infty)}$ 类函数序列) 在 $\mathfrak{D}'$ 中收敛于广义函数 δ (实际上, 任何一个广义函数都是基本函数空间 $\mathfrak{D} = C_0^{(\infty)}$ 中的函数列在 $\mathfrak{D}'$ 中的收敛极限. 在这个意义下, 正则广义函数集合在 $\mathfrak{D}'$ 中处处稠密, 正像有理数集 $\mathbb{Q}$ 在实数集 $\mathbb{R}$ 中处处稠密一样.)

8. a) 计算广义函数 $F \in \mathfrak{D}'$ 在函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 的值 $\langle F, \varphi\rangle$. 如果, $F = \sin x\delta; F = 2\cos x\delta; F = (1 + x^2)\delta$.

b) 试验证: 乘以函数 $\psi \in C^{(\infty)}$ 的运算 $F \mapsto \psi F$ 是 $\mathfrak{D}'$ 中的连续运算.

c) 试验证: 广义函数的线性运算在 $\mathfrak{D}'$ 中是连续的.

9. a) 试证: 如果 F 是由函数 $f(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$ 产生的正则分布, 那么 $F' = H$, 其中 H 是对应于赫维赛德函数的分布.

b) 计算: 对应于函数 $|x|$ 的分布的导数.

10. a) 试验证, 以下 $\mathfrak{D}'$ 中的极限是正确的:

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \pi\delta; \lim_{\alpha \to +0} \frac{\alpha x}{\alpha^2 + x^2} = \pi x\delta; \lim_{\alpha \to +0} \frac{x}{x^2 + \alpha^2} = \ln|x|.$$

b) 试证: 如果 $f = f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上局部可积函数, 而 $f_\varepsilon = f(x + \varepsilon)$, 那么在 $\mathfrak{D}'$ 内, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 有 $f_\varepsilon \to f$.

c) 试证: 如果 $\{\Delta_\alpha\}$ 当 $\alpha \to 0$ 时是 $\delta-$ 型光滑函数族, 那么当 $\alpha \to 0$ 时, $F_\alpha = \int_{-\infty}^{x} \Delta_\alpha(t)dt \to H$, 其中 H 是对应于赫维赛德函数的广义函数.

11. a) 通常用 $\delta(x - a)$ 表示 "位移至 a 点的 $\delta-$ 函数", 即按法则 $\langle \delta(x - a), \varphi\rangle = \varphi(a)$ 作用在函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 上的广义函数. 试证: 级数 $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - k)$ 在 $\mathfrak{D}'$ 中收敛.

b) 求函数 $[x]$ 的导数, 其中 $[x]$ 是 x 的整数部分.

c) 在 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的函数在区间 $]0,2\pi]$ 上用公式 $f|_{]0,2\pi]}(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{2\pi}$ 给出, 试验证: $f'=-\frac{1}{2\pi}+\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(x-2\pi k)$.

d) 试验证: 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\delta(x-\varepsilon)\to\delta(x)$.

e) 像上面一样, 记移至点 ε 的 $\delta-$ 函数为 $\delta(x-\varepsilon)$, 试用直接计算验证: $\frac{1}{\varepsilon}(\delta(x-\varepsilon)-\delta(x))\to -\delta'(x)=-\delta'$ (当 $\varepsilon\to 0$).

f) 根据上面的极限过程, 把 $-\delta'$ 解释为放在点 $x=0$ 的具电偶极矩 $+1$ 的电荷分布, 试验证: $\langle-\delta',1\rangle=0$ (偶极子的总电荷为零) 且 $\langle-\delta',x\rangle=1$ (它的矩实际上为 1).

g) $\delta-$ 函数的齐次性, 即 $\delta(\lambda x)=\lambda^{-1}\delta(x)$, 是它的一个重要性质. 试证之.

12. a) 对于用式子 $\langle F,\varphi\rangle=\int_0^\infty\sqrt{x}\varphi(x)dx$ 确定的广义函数 F, 验证下面等式:

$$\langle F',\varphi\rangle=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}dx;$$

$$\langle F'',\varphi\rangle=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}dx;$$

$$\langle F''',\varphi\rangle=\frac{3}{8}\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{5/2}}dx;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\langle F^{(n)},\varphi\rangle=\frac{(-1)^{(n-1)}(2n-3)!!}{2^n}\cdot$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n+1}{2}}}dx.$$

b) 试证: 如果 $n-1<p<n$, 而广义函数 x_+^{-p} 由

$$\langle x_+^{-p},\varphi\rangle:=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^p}dx$$

确定, 那么它的导函数 $-px_+^{-(p+1)}$ 是用

$$\langle -px_+^{-(p+1)},\varphi\rangle=-p\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}dx$$

确定的广义函数.

13. 把由等式

$$\langle F,\varphi\rangle:=\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\left(:=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx\right)$$

确定的广义函数记作 $\mathfrak{P}\frac{1}{x}$, 试证:

a) $\left\langle\mathfrak{P}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}dx$.

b) $(\ln|x|)' = \mathfrak{P}\dfrac{1}{x}$.

c) $\left\langle \left(\mathfrak{P}\dfrac{1}{x}\right)', \varphi \right\rangle = \int_0^{+\infty} \dfrac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}dx$.

d) $\dfrac{1}{x+i0} := \lim\limits_{y\to+0}\frac{1}{x+iy} = -i\pi\delta + \mathfrak{P}\dfrac{1}{x}$.

14. 定义广义函数的乘积将出现复杂情况: 例如, 函数 $|x|^{-2/3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积 (在反常积分意义下), 它产生广义函数 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2/3}\varphi(x)dx$. 但是它的平方 $|x|^{-4/3}$ 甚至在反常积分意义下也不是可积函数. 以下问题的答案表明, 在 $\mathfrak{D}'$ 中原则上不能定义任意两个广义函数的自然的满足结合律与交换律的乘法运算.

a) 试证: 对任意函数 $f \in C^{(\infty)}$, 成立等式 $f(x)\delta = f(0)\delta$.

b) 验证: 在 $\mathfrak{D}'$ 中, $x\mathfrak{P}\dfrac{1}{x} = 1$.

c) 假如乘积运算能推广到任意两个广义函数, 那么它至少没有交换律和结合律, 否则将有

$$0 = 0\mathfrak{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathfrak{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathfrak{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathfrak{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x)1 = 1\delta(x) = \delta.$$

15. a) 试证: 线性算子 $A: \mathfrak{D}' \to \mathfrak{D}'$ 的基本解 E, 一般来说, 不是单值的. 它们彼此相差齐次方程 $Af = 0$ 的一个解.

b) 考虑微分算子

$$P\left(x, \frac{d}{dx}\right) := \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x).$$

试证: 如果 $u_0 = u_0(x)$ 是方程 $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)u_0 = 0$ 满足初始条件 $u_0(0) = \cdots = u_0^{(n-2)}(0) = 0, u_0^{(n-1)}(0) = 1$ 的解, 那么函数 $E(x) = H(x)u_0(x)$(其中 $H(x)$ 是赫维赛德函数) 是算子 $P\left(x, \dfrac{d}{dx}\right)$ 的基本解.

c) 用上边所说的方法求下面算子的基本解:

$$\left(\frac{d}{dx}+a\right), \left(\frac{d^2}{dx^2}+a^2\right), \frac{d^m}{dx^m}, \left(\frac{d}{dx}+a\right)^m, m \in \mathbb{N}.$$

d) 利用得到的结果和卷积, 求以下方程的解:

$$\frac{d^m u}{dx^m} = f; \left(\frac{d}{dx}+a\right)^m u = f, \text{ 其中 } f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

§5　含参变量的重积分

在这一节的前两段里将指出常义和非常义的含参变量的重积分的性质, 总的说来, 含参变量重积分的基本性质, 本质上和以前详细研究过的含参变量的一维积分没有什么差别在第 3 段中我们将研究对应用有重要意义的具奇异性的含参数反常积分. 最后, 在第 4 段研究的是多变量函数的卷积以及某些与含参变量积分和分析中的经典积分公式有密切联系的特殊的多维广义函数问题.

1. 含参变量的常义重积分

设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集, 例如, 具光滑或分段光滑边界的有界区域, Y 是 $\mathbb{R}^m$ 的某个子集.

考虑含参变量 $y \in Y$ 的积分

$$F(y) = \int_X f(x,y)dx, \tag{1}$$

这里假定函数 f 定义在 $X \times Y$ 上且对每个固定的 $y \in Y$ 在 X 上可积.

对于积分 (1), 下面的命题是正确的.

命题 1 如果 $X \times Y$ 是 R^{n+m} 中的紧集且 $f \in C(X \times Y)$, 那么 $F \in C(Y)$.

命题 2 如果 Y 是 $\mathbb{R}^m$ 中的区域, $f \in C(X \times Y)$ 且 $\dfrac{\partial f}{\partial y^i} \in C(X \times Y)$, 那么函数 F 在 Y 中关于变量 y^i 是可微的 (其中 $y = (y^1, \cdots, y^i, \cdots, y^m)$) 且

$$\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y^i}(x,y)dx. \tag{2}$$

命题 3 如果 X 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的可测紧集, 且 $f \in C(X \times Y)$, 那么 $F \in C(Y) \subset \mathfrak{R}(Y)$ 且

$$\int_Y F(y)dy := \int_Y dy \int_X f(x,y)dx = \int_X dx \int_Y f(x,y)dy. \tag{3}$$

我们指出, 函数 f 可以是在任何一个赋范向量空间 Z 中取值的. 重要的特殊情形是 Z 为 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$, 在这些情形, 命题 1—3 的证明显然可归结为当 $Z = \mathbb{R}$ 时的证明. 而 $Z = \mathbb{R}$ 时命题 1 和 2 的证明只要逐字逐句重复对一维积分的相应命题的证明就可以了 (参看第 17 章 §1), 而命题 3 是命题 1 和富比尼定理 (第 11 章,§4) 的简单推论.

2. 含参变量的反常重积分

如果在积分 (1) 中集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ 或函数 f 是无界的, 那么它应理解为反常重积分 (参看第 11 章 §6), 即作为沿 X 的相应竭尽递增列上所取的常义积分的极限. 在研究含参变量的反常重积分时, 照样是对类似于我们在一维情形研究过的特殊的竭尽递增列感兴趣. 这时, 完全按照一维情形, 从积分域 X 中挖去奇异点集的 $\varepsilon-$ 邻域①, 求出沿集合 X 的剩余部分 X_ε 上的积分, 然后令 $\varepsilon \to +0$ 取极限.

如果这个极限关于参变量 $y \in Y$ 是一致的, 那么就说反常积分 (1) 在 Y 上一致收敛.

---

①所谓奇异点, 就是在它的任一邻域内, 函数 f 均无界. 而如果集合 X 无界, 那么还从 X 挖去无穷远点的邻域.

例 1　积分

$$F(\lambda)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}dxdy$$

可利用极限过程

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}dxdy := \lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}dxdy.$$

得到. 再利用极坐标容易验证, 当 $\lambda>0$ 时, 它收敛. 另外, 它在集合 $E_{\lambda_0}=\{\lambda\in\mathbb{R}|\lambda\geqslant\lambda_0>0\}$ 上一致收敛, 因为对于 $\lambda\in E_{\lambda_0}$ 有

$$0<\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}dxdy\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}dxdy,$$

而最后的积分当 $\varepsilon\to0$ 时趋于零 (原先考虑的积分 $F(\lambda)$ 当 $\lambda=\lambda_0>0$ 时收敛).

例 2　照例设 $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n||x-a|<r\}$ 是以 $a\in\mathbb{R}^n$ 为中心以 r 为半径的球, 又设 $y\in\mathbb{R}^n$, 考察积分

$$F(y)=\int\limits_{B(0,1)}\frac{|x-y|}{(1-|x|)^\alpha}dx := \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{B(0,1-\varepsilon)}\frac{|x-y|}{(1-|x|)^\alpha}dx.$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中引进极坐标, 确信给定的积分仅当 $\alpha<1$ 时收敛. 如果固定 $\alpha<1$, 那么积分关于参变量 y 在任何紧集 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 上一致收敛, 因为在这种情况下 $|x-y|\leqslant M(Y)\in\mathbb{R}$.

注意到在研究过的例子里, 积分奇异点的集合不依赖于参变量. 于是, 如果采用上述具有固定奇异点集的反常积分一致收敛性概念, 那么, 显然这种含参变量反常重积分的一切基本性质能从常义重积分的相应性质和关于依赖于参变量的函数族的极限理论得到.

我们不去转述这些在原则上已熟悉的事实, 而宁愿利用发展了的工具去研究极重要的和经常遇到的 (一维或多维) 反常积分的奇异性本身依赖于参变量的情形.

3. 具变奇异性的反常积分

例 3　我们知道, 在点 $x\in\mathbb{R}^3$ 处的单位电荷的势用公式 $U(x,y)=\dfrac{1}{|x-y|}$ 表示. 这里 y 是 $\mathbb{R}^3$ 中的变点. 现在, 如果电荷以有界密度 $\mu(x)$ 分布在有界区域 $X\subset\mathbb{R}^3$ 上. (在 X 外等于零), 那么, 这些分布电荷的势 $U(y)$ 显然 (根据势的可加性) 可表示成以下形式:

$$U(y)=\int_{\mathbb{R}^3}U(x,y)\mu(x)dx=\int_X\frac{\mu(x)}{|x-y|}dx. \tag{4}$$

在最后的积分中, 变点 $y \in \mathbb{R}^3$ 起参变量的作用. 如果点 y 在集合 X 外, 那么积分 (4) 是常义的. 而如果 $y \in \overline{X}$, 那么当 $X \ni x \to y$ 时, 有 $|x-y| \to 0$ 且点 y 对积分是奇异的, 这样一来随着 y 的变化, 这个奇异点也不断移动.

因为 $U(y) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} U_\varepsilon(y)$, 这里

$$U_\varepsilon(y) = \int\limits_{X \setminus B(y,\varepsilon)} \frac{\mu(x)}{|x-y|} dx.$$

那么自然地, 与往常一样, 我们称具可变奇异性的积分 (4) 在集合 Y 上是一致收敛的, 如果在 Y 上当 $\varepsilon \to +0$ 时, 有 $U_\varepsilon(y) \rightrightarrows U(y)$.

设在 $\mathbb{R}$ 上有 $|\mu(x)| \leqslant M \in \mathbb{R}$, 则

$$\left| \int\limits_{X \bigcap B(y,\varepsilon)} \frac{\mu(x)}{|x-y|} dx \right| \leqslant M \int\limits_{B(y,\varepsilon)} \frac{dx}{|x-y|} = 2\pi M \varepsilon^2.$$

这个估计表明, 对任何 $y \in \mathbb{R}^3, |U(y) - U_\varepsilon(y)| \leqslant 2\pi M \varepsilon^2$, 即在上边所指意义下, 积分 (4) 在集合 $Y = \mathbb{R}^3$ 上一致收敛.

特别地, 如果能验证函数 $U_\varepsilon(y)$ 对 y 连续, 那么, 依据一般理论就能推出势 $U(y)$ 的连续性. 但是函数 $U_\varepsilon(y)$ 的连续性不能从含参变量的常义积分的命题 1 得到, 因为在我们的情况下, 积分域 $X \setminus B(y,\varepsilon)$ 也随变量 y 而改变. 因此, 我们下边将研究所关心的关于函数 $U_\varepsilon(y)$ 的连续性问题.

注意到当 $|y - y_0| \leqslant \varepsilon$ 时,

$$U_\varepsilon(y) = \int\limits_{X \setminus B(y_0,2\varepsilon)} \frac{\mu(x)}{|x-y|} dx + \int\limits_{(X \setminus B(y,\varepsilon)) \bigcap B(y_0,2\varepsilon)} \frac{\mu(x)}{|x-y|} dx.$$

这两个积分的第一个在条件 $|y - y_0| < \varepsilon$ 下对 y 连续 (作为有固定积分区域的常义积分). 而第二个积分的绝对值不超过

$$\int\limits_{B(y_0,2\varepsilon)} \frac{M}{|x-y|} dx = 8\pi M \varepsilon^2$$

因此, 对于足够接近 y_0 的所有 y, 将成立不等式 $|U_\varepsilon(y) - U_\varepsilon(y_0)| < \varepsilon + 16\pi M \varepsilon^2$. 由此断定 $U_\varepsilon(y)$ 在 $y_0 \in \mathbb{R}^3$ 连续.

这样一来就证明了, 势 $U(y)$ 在整个空间 $\mathbb{R}^3$ 上是连续函数.

以上详细分析过的例子, 使我们有理由引进以下一般定义.

定义 1 设 (1) 是对每个 $y \in Y$ 都是收敛的反常积分. 设 X_ε 是从集合 X 中挖去积分奇异点集的 $\varepsilon-$ 邻域后得到的集合①, 而 $F_\varepsilon(y) = \int_{X_\varepsilon} f(x,y) dx$, 如果在 Y 上当 $\varepsilon \to +0$ 时, 有 $F_\varepsilon(y) \rightrightarrows F(y)$, 我们就说**积分 (1) 在集合 Y 上一致收敛**.

①参看前面的底注.

根据这个定义以及类似于例 3 中的那些想法立刻推出以下有用的

命题 4 如果积分 (1) 中的函数 f 满足估计式 $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{M}{|x-y|^{\alpha}}$, 其中 $M \in \mathbb{R}, x \in X \subset \mathbb{R}^n, y \in Y \subset \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha < n$, 那么积分 (1) 在 Y 上一致收敛.

例 4 特别地, 根据命题 4 推出, 势函数关于变量 $y^i (i=1,2,3)$ 形式地求导所得的积分

$$V_i(y) = \int_X \frac{\mu(x)(x^i - y^i)}{|x-y|^3} dx \quad (i = 1,2,3)$$

在集合 $Y = \mathbb{R}^3$ 上一致收敛, 因为 $\left|\dfrac{\mu(x)(x^i - y^i)}{|x-y|^3}\right| \leqslant \dfrac{M}{|x-y|^2}$.

像例 3 那样, 由此可得, 函数 $V_i(y)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

现在证明, 函数 $U(y)$, 即势 (4), 实际上有偏导数 $\dfrac{\partial U}{\partial y^i}$ 且 $\dfrac{\partial U}{\partial y^i}(y) = V_i(y)$.

为此, 显然只要验证

$$\int_a^b V_i(y^1, y^2, y^3) dy^i = U(y^1, y^2, y^3)\Big|_{y^i=a}^{b}$$

就可以了. 事实上,

$$\begin{aligned}\int_a^b V_i(y) dy^i &= \int_a^b dy^i \int_X \frac{\mu(x)(x^i - y^i)}{|x-y|^3} dx \\ &= \int_X \mu(x) dx \int_a^b \frac{x^i - y^i}{|x-y|^3} dy^i = \int_X \mu(x) dx \int_a^b \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dy^i \\ &= \left(\int_X \frac{\mu(x) dx}{|x-y|}\right)\Bigg|_{y^i=a}^{b} = U(y)\Big|_{y^i=a}^{b}.\end{aligned}$$

上述计算中唯一不显然的地方是交换积分次序. 在一般情况下, 为能交换反常积分的次序, 只要重积分关于所有变量绝对收敛就可以了. 在我们的情形下, 这个条件是满足的, 因此, 交换积分次序是合法的. 当然, 由于这里研究的函数比较简单, 也可直接证明它.

于是证明了, 分布在空间 $\mathbb{R}^3$ 中具有有界密度的电荷所产生的势 $U(y)$, 是全空间上的连续可微函数.

例 3 与例 4 所采用的方法和论证能完全类似地用来研究下面更一般的情况.

设

$$F(y) = \int_X K(y - \varphi(x)) \psi(x,y) dx, \tag{5}$$

其中 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界可测区域; 变量 y 跑遍区域 $Y \subset \mathbb{R}^m$, 且 $n \leqslant m; \varphi : X \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射, 它满足条件 $\mathrm{rang}\varphi'(x) = n, \| \varphi'(x) \| \geqslant c > 0$, 即 φ 给出 n 维参数曲面. 更准确地说, 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 n- 道路; $K \in C(\mathbb{R}^m \setminus 0; \mathbb{R})$, 即函数 $K(z)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中, 除点

$z=0$ 外, 处处连续, 在 $z=0$ 附近它可能无界; $\psi: X\times Y\to\mathbb{R}$ 是有界连续函数. 我们将认为对每个 $y\in Y$, 积分 (5) (一般来说是反常积分) 存在.

特别地, 在上面我们所考虑的积分 (4) 中, 有

$$n=m,\ \varphi(x)=x,\ \psi(x,y)=\mu(x),\ K(z)=|z|^{-1}.$$

不难证明, 在对函数 φ 所作的上述限制下, 按积分 (5) 的一致收敛性的定义 1, 即对任何 $\alpha>0$, 存在 $\varepsilon>0$, 使对任何 $y\in Y$, 有

$$\left|\int\limits_{|y-\varphi(x)|<\varepsilon} K(y-\varphi(x))\psi(x,y)dx\right|<\alpha, \tag{6}$$

这里的积分区域是 $\{x\in X|(y-\varphi(x)|<\varepsilon)\}$①.

命题 5 如果在关于函数 φ,ψ,K 的上述条件下, 积分 (5) 在 Y 上一致收敛, 那么 $F\in C(Y,\mathbb{R})$.

命题 6 如果对积分 (5) 补充假设, 函数 ψ 不依赖于参变量 y (即 $\psi(x,y)=\psi(x)$), 且 $K\in C^{(1)}(\mathbb{R}^m\setminus 0,\mathbb{R})$, 那么当积分

$$\int_X \frac{\partial K}{\partial y^i}(y-\varphi(x))\psi(x)dx$$

在集合 $y\in Y$ 上一致收敛时, 能断定函数 F 具有连续偏导数, 并有

$$\frac{\partial F}{\partial y^i}(y)=\int_X \frac{\partial K}{\partial y^i}(y-\varphi(x))\psi(x)dx. \tag{7}$$

这些命题的证明, 如已指出, 完全类似于例 3 和例 4. 因此我们不再详述.

我们只需注意, 反常积分的收敛性 (对任何竭尽递增集列) 蕴含它的绝对收敛性. 在例 3 和例 4 中绝对收敛性的条件只在进行估计和交换积分次序时用过. 作为命题 5,6 的应用的具体说明, 我们再考察势论中的一个例子.

例 5 设电荷分布在光滑紧曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 上其面密度为 $\nu(x)$. 这种电荷分布的势叫做单层位势, 它显然是用曲面积分

$$U(y)=\int_S \frac{\nu(x)}{|x-y|}d\sigma(x) \tag{8}$$

表示.

①这里我们认为集合 X 在 $\mathbb{R}^n$ 中是有界的. 在相反的情形, 对不等式 (6) 还应补充一个类似的不等式, 其中的积分域应取作 $\{x\in X||x|>1/\varepsilon\}$.

设 ν 是有界函数, 则当 $y \notin S$ 时, 这个积分是常义的, 而且函数 $U(y)$ 在 S 外无穷次可微.

而如果 $y \in S$, 那么在点 y 积分有奇异性. 这个奇异性是可积的, 因为曲面 S 是光滑的且在点 $y \in S$ 的邻域里与 $\mathbb{R}^2$ 平面块差别很小, 而我们知道, $\dfrac{1}{r^\alpha}(\alpha < 2)$ 型的奇异性是可积的. 利用命题 5 能把这种一般的设想转化为形式化的证明, 只要在点 $y \in S$ 的邻域 V_y 里, 局部地把 S 表成 $x = \varphi(t)$ 的形式, 其中 $t \in V_t \subset \mathbb{R}^2$ 且 $\operatorname{rang}\varphi' = 2$. 这时

$$\int_{V_y} \frac{\nu(x)}{|x-y|} d\sigma(x) = \int_{V_t} \frac{\nu(\varphi(t))}{|y-\varphi(t)|} \sqrt{\det\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t^j} \right\rangle} dt, \quad .$$

而且, 应用命题 2 还能证明, 积分 (8) 表示的函数 $U(y)$ 在整个空间 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

已经指出, 在电荷的支集外, 体位势 (4) 和单层位势 (8) 都是无穷次可微的. 在积分号下求导, 同样地能够确认, 在电荷的支集外, 像 $\mathbb{R}^3$ 中的函数 $\dfrac{1}{|x-y|}$ 一样, 势函数 $U(y)$ 也满足拉普拉斯方程 $\Delta U = 0$, 即在这个区域上是调和函数.

*4. 高维情形的卷积, 基本解和广义函数

a. $\mathbb{R}^n$ 中的卷积

定义 2 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值或复值函数 u 与 v 的卷积 $u * v$ 用关系式

$$(u*v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dx \tag{9}$$

给出.

例 6 比较公式 (4) 和 (9) 可得, 例如, 分布在空间 $\mathbb{R}^3$ 中且具有密度 $\mu(x)$ 的电荷的势 U, 是函数 μ 与空间 $\mathbb{R}^3$ 坐标原点的单位电荷的势 E 的卷积 $\mu * E$.

关系式 (9) 是 §4 所研究的卷积的定义的直接推广, 根据这个原因, 如果处处把 $\mathbb{R}$换成 $\mathbb{R}^n$, 所有在 §4 中对 $n = 1$ 详细讨论过的卷积性质以及有关结论, 如果把那里的 $\mathbb{R}$ 都换成 $\mathbb{R}^n$, 仍然有效.

$\mathbb{R}^n$ 中的 $\delta-$ 型函数族可像 $\mathbb{R}$ 的情形一样地定义, 只要把 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{R}^n$, 把 $U(0)$ 理解成点 $0 \in \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域即可.

函数 $f : G \to \mathbb{C}$ 在集合 $E \subset G$ 上一致连续性概念以及 §4 中关于卷积 $f * \Delta_\alpha$ 收敛到 f 的命题 5, 所有细节和推论, 都可推广到高维情形.

需要注意的只是, 在 §4 的例 3 和推论 1 的证明中, 在定义函数 $\Delta_n(x)$ 和 $\varphi(x)$ 时, 其中的 x, 相应地应换成 $|x|$. 为了证明用三角多项式逼近周期函数的魏尔斯特拉斯定理需要对 §4 的例 4 中引进的 $\delta-$ 型函数族的形式作一点不大的变动. 这时我们讨论的是分别对变量 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 具有周期 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的连续函数 $f(x^1, \cdots, x^n)$ 的逼近问题.

命题的内容是: 对任何 $\varepsilon > 0$, 能够找到依赖于 n 个变量且对各个变量分别具有周期 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 的三角多项式, 它在 $\mathbb{R}^n$ 上以精度 ε 一致逼近 f.

我们仅限于作这样一个说明, 独立地对任意 $n \in \mathbb{N}$ 的情形检验在 §4 中对于 $n = 1$ 已经证明了的卷积 (9) 的那些性质, 对读者来说是简单然而对理解 §4 的内容有益的练习.

b. 多变量广义函数

现在我们叙述高维的曾在 §4 中引进的与广义函数的有关概念.

和以前一样, 设 $C^{(\infty)}(G)$ 与 $C_0^{(\infty)}(G)$ 分别表示在区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上无穷次可微函数族和具紧支集的无穷次可微函数族. 如果 $G = \mathbb{R}^n$, 那么将分别用省略记号 $C^{(\infty)}$ 和 $C_0^{(\infty)}$ 表示. 记 $m := (m_1, \cdots, m_n)$ 称为多指标, 且记

$$\varphi^{(m)} := \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{m_1} \cdot \cdots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{m_n} \varphi.$$

在 $C_0^{(\infty)}(G)$ 中引入*函数的收敛性*: 像 §4 的定义 7 那样, 如果函数序列 $\{\varphi_k\}$ 中所有函数的支集都位于 G 中的同一个紧集中, 且对任何多指标 m, 在 G 上当 $k \to \infty$ 时, 有 $\varphi_k^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$, 就是说, 函数及其所有导函数都一致收敛, 则称函数列 $\{\varphi_k\}$ 收敛于 φ, 并记作: 当 $k \to \infty$ 时, 在 $C_0^{(\infty)}(G)$ 中, $\varphi_k \to \varphi$.

定义 3 具有所引入收敛性的线性空间 $C_0^{(\infty)}(G)$ 用 $\mathfrak{D}(G)$ 表示 (当 $G = \mathbb{R}^n$ 时用 $\mathfrak{D}$ 表示), 并称为*基本函数空间*或*测试函数空间* .

$\mathfrak{D}(G)$ 上的线性连续泛函叫做*广义函数*或*分布* . 它们构成线性的*广义函数空间*, 记作 $\mathfrak{D}'(G)$ (当 $G = \mathbb{R}^n$ 时, 记作 $\mathfrak{D}'$). $\mathfrak{D}'(G)$ 中的收敛性, 像一维情形一样, 定义为泛函的弱 (逐点) 收敛性 (参看 §4, 定义 6)

正则广义函数的定义可以逐字逐句地搬到高维情形.

$\delta-$ 函数和移至点 $x_0 \in G$ 的 $\delta-$ 函数, 仍像以前那样定义, 移至点 x_0 的 $\delta-$ 函数记作 $\delta(x_0)$, 或者, 常常但不总是恰当地记作 $\delta(x - x_0)$.

现在考虑某些例子.

例 7 设

$$\Delta_t(x) := \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},$$

其中 $a > 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$. 试证: 这些函数作为 $\mathbb{R}^n$ 中的正则分布, 当 $t \to +0$ 时, 在 $\mathfrak{D}'$ 中收敛到 $\mathbb{R}^n$ 的 $\delta-$ 函数.

为完成证明只需验证, 函数族 Δ_t 当 $t \to +0$ 时在 $\mathbb{R}^n$ 中是 $\delta-$ 型的.

利用变量替换, 化重积分为累次积分和欧拉 – 泊松积分的值, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_t(x) dx = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right|^2} d\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^n = 1.$$

另外, 对任何固定的 $r>0$, 当 $t\to+0$ 时,

$$\int\limits_{B(0,r)}\Delta_t(x)dx=\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int\limits_{B\left(0,\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)}e^{-|\xi|^2}d\xi\to 1.$$

最后, 考虑到函数 $\Delta_t(x)$ 的非负性推出, 它们实际上组成 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\delta-$ 型函数族.

例 8 下面的广义函数 δ_S (与分片光滑曲面 S 上具有单位分布面密度的电荷分布相对应) 是 $\delta-$ 函数 (例如, 与放置在空间 $\mathbb{R}^n$ 的坐标原点的单位电荷的电荷分布相对应) 的推广. δ_S 对函数 $\varphi\in\mathfrak{D}$ 的作用由关系式

$$\langle\delta_S,\varphi\rangle:=\int_S\varphi(x)d\sigma.$$

定义.

分布 δ_S 与分布 δ 一样也不是正则广义函数.

在 $\mathbb{R}^n$ 中分布与 $\mathfrak{D}$ 中函数的乘积, 可以和一维情形一样地定义.

例 9 如果 $\mu\in\mathfrak{D}$, 那么 $\mu\delta_S$ 是按规律

$$\langle\mu\delta_S,\varphi\rangle=\int_S\varphi(x)\mu(x)d\sigma \tag{10}$$

确定的广义函数.

如果函数 $\mu(x)$ 仅在曲面 S 上有定义, 那么等式 (10) 可以看作广义函数 $\mu\delta_S$ 的定义, 这样引入的广义函数按自然的类比叫做曲面 S 上具有密度 μ 的单层分布.

多变量广义函数的微分原则上与一维情况一样, 但有某些特殊的地方.

如果 $F\in\mathfrak{D}'(G)$ 且 $G\subset\mathbb{R}^n$, 那么广义函数 $\dfrac{\partial F}{\partial x^i}$ 由关系式

$$\left\langle\frac{\partial F}{\partial x^i},\varphi\right\rangle:=-\left\langle F,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right\rangle$$

定义.

由此推出,

$$\langle F^{(m)},\varphi\rangle=(-1)^{|m|}\langle F,\varphi^{(m)}\rangle, \tag{11}$$

其中 $m=(m_1,\cdots,m_n)$ 是多指标, 且 $|m|=\sum\limits_{i=1}^n m_i$.

自然想验证 $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^i\partial x^j}=\dfrac{\partial^2F}{\partial x^j\partial x^i}$, 而这可从两个关系式

$$\left\langle\frac{\partial^2F}{\partial x^i\partial x^j},\varphi\right\rangle=\left\langle F,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j\partial x^i}\right\rangle,$$

$$\left\langle\frac{\partial^2F}{\partial x^j\partial x^i},\varphi\right\rangle=\left\langle F,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}\right\rangle$$

的右端相等得到. 右端项之所以相等, 是因为对任何函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 都成立古典等式 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^i}$.

例 10 现在考虑微分算子 $D = \sum\limits_m a_m D^m$, 其中 $m = (m_1, \cdots, m_n)$ 是多指标, $D^m = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^{m_1} \cdot \cdots \cdot \left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)^{m_n}$, a_m 是数系数, 而和是关于某个有限的多指标集求的.

算子 D 的**转置**或者**共轭**, 通常记作 ${}^tD$ 或 D^*, 是用对任何 $\varphi \in \mathfrak{D}$ 和 $F \in \mathfrak{D}'$ 都成立的关系式

$$\langle DF, \varphi\rangle =: \langle F, {}^t D\varphi\rangle$$

定义的算子.

从等式 (11) 出发, 现在可以写出微分算子 D 的共轭微分算子的显式:

$${}^tD = \sum_m (-1)^{|m|} a_m D^m$$

特别地, 如果所有的 $|m|$ 都是偶数且 ${}^tD = D$, 则称算子 D 是自共轭微分算子.

显然, $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中的微分算子保持了 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 中的微分法的所具有的一切性质. 而现在让我们来研究以下高维情形的重要特例.

例 11 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中光滑的 $(n-1)$ 维子流形, 即 S 是光滑超曲面. 假设定义在 $\mathbb{R}^n \setminus S$ 上的函数 f 是无穷次可微的, 而且它的所有偏导数对每个点 $x \in S$ 当从曲面 S 的任何一侧 (局部) 趋近于 x 时的极限都存在, 两侧极限之差是所考察的偏导数在点 x 的跃度 $\left\lfloor \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right.$, 它对应着在 x 点穿过 S 的方向*. 当这个方向改变时, 跃度改变符号, 这样一来, 如果约定, 譬如, 用曲面的法线方向给出穿过曲面的方向, 则可把跃度看成定向曲面上的函数.

函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ 在曲面 S 外有定义, 连续, 且局部有界. 由所做的假定知, 当趋近曲面本身时, f 是局部最终有界的. 因为 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子流形, 无论我们在 S 上如何补充定义 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, 我们得到的函数或许在 S 上间断, 因而在 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积. 但是仅在测度为零的集合上有不同值的可积函数有相等积分值, 因此不必关心 $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ 在 S 上的值, 可以认为它按规律

$$\left\langle \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \varphi\right)(x)dx$$

产生一个正则广义函数 $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$.

* 译者注. 这里所说的 "穿过 S 的方向" 并非以 x 为起点的向量指示的具体方向, 而是指从曲面的哪一侧到另一侧.

现在证明, 如果把 f 看作广义函数, 那么在广义函数微分法意义下, 有以下重要公式:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\} + \left(\lceil f \right)_S \cos \alpha_i \delta_S \tag{12}$$

其中最后一项按等式 (10) 的意义理解; $(\lceil f)_S$ 是函数 f 在点 $x \in S$ 处沿任何一个 (两个可能方向中的一个) 单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的跃度; $\cos \alpha_i$ 是 $\boldsymbol{n}$ 在轴 x^i 上的射影 (即 $\boldsymbol{n} = (\cos \alpha_1, \cdots, \cos \alpha_n)$).

◀ 公式 (12) 是 §4 中等式 (17) 的推广, 在公式 (12) 的推导中用到了等式 (17).

为确定起见, 我们考虑 $i = 1$ 的情形, 这时

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial f}{\partial x^1}, \varphi \right\rangle &:= -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)(x) dx \\
&= -\underset{x^2 \cdots x^n}{\int \cdots \int} dx^2 \cdots dx^n \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 \\
&= \underset{x^2 \cdots x^n}{\int \cdots \int} dx^2 \cdots dx^n \left[\left(\lceil f \right) \varphi + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x^1} \varphi dx^1 \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x^1} \varphi dx + \underset{x^2 \cdots x^n}{\int \cdots \int} \left(\lceil f \right) \varphi dx^2 \cdots dx^n.
\end{aligned}$$

这里, $\lceil f$ 是函数 f 在点 $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n) \in S$ 处沿第 i 个坐标轴方向穿过 S 的跃度. 在计算乘积 $(\lceil f)\varphi$ 时, 函数 φ 也是在同一个点取值的. 因此, 上式中最后的积分能够写成第一类曲面积分的形式

$$\int_S \left(\lceil f \right) \varphi \cos \alpha_1 d\sigma,$$

其中 α_1 是 x^1 轴与在点 $x \in S$ 法向量的夹角. 法向量的取向是那样的, 沿它穿过点 $x \in S$ 时, 函数 f 正好有我们所得到的跃度 $\lceil f$. 这只意味着, $\cos \alpha_1 \geqslant 0$. 只需注意, 如果选取另一个法线方向, 那么函数的跃度与 x^1 轴的方向和法线方向夹角的余弦同时改变符号, 这就是说, 乘积 $(\lceil f) \cos \alpha_1$ 不改变符号. ▶

注 1 如从证明中所看到的, 如果在任一点 $x \in S$ 函数 f 的跃度 $(\lceil f)_S$ 有定义, 在 S 外存在偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, 而且 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积 (至少局部广义可积), $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x^i} \right\}$ 是它产生的正则广义函数, 则公式 (12) 仍然成立.

注 2 在点 $x \in S$ 处如果 x^1 轴不穿过 S, 亦即切于 S, 那么关于这个方向定义跃度 $\lceil f$ 可能产生困难, 但从公式 (12) 的证明中看到, 它最后一项由积分

$$\underset{x^2 \cdots x^n}{\int \cdots \int} \left(\lceil f \right) \varphi dx^2 \cdots dx^n$$

得到.

这种点的集合 E 在平面 $x^2, \cdots, x^n$ 上的射影的 $(n-1)$ 维测度为零, 所以它不影响积分的值. 因此, 公式 (12)可以认为是有意义的并且总是正确的, 只要当 $\cos\alpha_i = 0$时就令 $(\int f)_S \cos\alpha_i$ 等于零.

注 3　根据类似的理由, 也可以忽略面积为零的集合, 因此公式 (12) 对于分片光滑曲面应该认为是对的.

作为下面的例子我们将证明, 怎样从微分关系式 (12) 直接得到古典的高 - 奥积分公式, 并且摆脱了多余的分析要求 (关于这些我们当时告诉了读者), 具有最自由的形式.

例 12　设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中由分片光滑曲面 S 包围的有限区域; $\boldsymbol{A} = (A^1, \cdots, A^n)$ 是 $\overline{G}$ 中的连续向量场, 且函数 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial A^i}{\partial x^i}$ 在 G 中有定义并在 G 上可积 (至少在反常积分意义下).

如果认为场 $\boldsymbol{A}$ 在 $\overline{G}$ 外等于零, 那么场在区域 G 的边界 S 的任一点 x 处从区域 G 内移出时的跃度为 $-\boldsymbol{A}(x)$. 设 $\boldsymbol{n}$ 是 S 上的单位外法线向量. 把公式 (12) 应用到场 $\boldsymbol{A}$ 的每个分量 A^i, 并把这些等式相加, 得到关系式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \{\operatorname{div}\boldsymbol{A}\} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\delta_S, \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ 是向量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 在点 $x \in S$ 的数量积.

关系式 (13) 是广义函数的等式. 将它应用到在 G 上等于 1 的函数 $\psi \in C_0^{(\infty)}$ (这样的函数的存在性与构造方法已经不止一次地讨论过). 因为对任何函数 $\varphi \in \mathfrak{D}$,

$$\langle \operatorname{div}\boldsymbol{A}, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi)dx \tag{14}$$

(它由广义函数微分法直接推出), 那么对我们的场 $\boldsymbol{A}$ 和函数 ψ, 显然有 $\langle \operatorname{div}\boldsymbol{A}, \psi \rangle = 0$. 但是考虑到等式 (13), 这将给出关系式

$$0 = \langle \{\operatorname{div}\boldsymbol{A}\}, \psi \rangle - \langle (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\delta_S, \psi \rangle,$$

它的古典写法

$$0 = \int_G \operatorname{div}\boldsymbol{A}dx - \int_S (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})d\sigma \tag{15}$$

正是高 - 奥公式.

再分析几个与广义函数微分法有关的例子.

例 13　考虑定义在 $\mathbb{R}^3\backslash 0$ 上的向量场 $\boldsymbol{A} = \dfrac{x}{|x|^3}$, 并证明, 在广义函数空间 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^3)$ 中成立等式

$$\operatorname{div}\frac{x}{|x|^3} = 4\pi\delta. \tag{16}$$

首先注意, 在古典意义下, 当 $x \neq 0$ 时, $\operatorname{div}\dfrac{x}{|x|^3}=0$.

现在依次利用关系式 (14) 定义的 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, 反常积分的定义, 当 $x \neq 0$ 时的等式 $\operatorname{div}\dfrac{x}{|x|^3}=0$, 高 - 奥公式 (15) 及函数 φ 的紧支性, 得到

$$\begin{aligned}\left\langle \operatorname{div}\frac{x}{|x|^3},\varphi\right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{x}{|x|^3}\cdot\nabla\varphi(x)\right)dx\\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<1/\varepsilon}\left(\frac{x}{|x|^3}\cdot\nabla\varphi(x)\right)dx\\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<|x|<1/\varepsilon}\operatorname{div}\left(\frac{x\varphi(x)}{|x|^3}\right)dx\\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\frac{(x\cdot\boldsymbol{n})}{|x|^3}d\sigma\\ &= 4\pi\varphi(0)=\langle 4\pi\delta,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

如前, 我们称满足 $A(E)=\delta$ 的广义函数 $E\in\mathfrak{D}'(G)$ 为算子 $A:\mathfrak{D}'(G)\to\mathfrak{D}'(G)$ 的**基本解**.

例 14　我们来验证, 在 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^3)$ 中, 正则广义函数 $E(x)=-\dfrac{1}{4\pi|x|}$ 是拉普拉斯算子 $\Delta=\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial}{\partial x^3}\right)^2$ 的基本解.

事实上, $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$, 当 $x\neq 0$ 时, $\operatorname{grad}E(x)=\dfrac{x}{4\pi|x|^3}$, 因此等式 $\operatorname{div}\operatorname{grad}E=\delta$ 可从已证明的关系式 (16) 推出,

像例 13 一样, 能证明对任何 $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$, 在 $\mathbb{R}^n$中

$$\operatorname{div}\frac{x}{|x|^n}=\sigma_n\delta, \tag{16'}$$

其中 $\sigma_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积.

由此并考虑到关系式 $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$ 能推出

$$\Delta\ln|x|=2\pi\delta\quad 在\ \mathbb{R}^2\ 中$$

及

$$\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}=-(n-2)\sigma_n\delta,\quad 在\ \mathbb{R}^n\ 中, n>2.$$

例 15　证明函数

$$E(x,t)=\frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, H$ 是赫维赛德函数 (当 $t < 0$ 时, 我们令 $E(x,t) = 0$), 满足方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right) E = \delta,$$

其中 Δ 是 $\mathbb{R}^n$ 中对 x 的拉普拉斯算子, $\delta = \delta(x,t)$ 是 $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t = \mathbb{R}^{n+1}$ 中的 $\delta-$ 函数.

当 $t > 0$ 时, $E \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n+1})$, 直接利用微分法即可确信

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right) E = 0, \quad 当\ t > 0\ 时.$$

考虑到这个情况和例 7 的结果, 对任意的函数 $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ 得到

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right) E, \varphi \right\rangle \\
&= -\left\langle E, \left(\frac{\partial}{\partial t} + a^2\Delta\right)\varphi \right\rangle \\
&= -\int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2\Delta\varphi\right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx + \int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial E}{\partial t} - a^2\Delta E\right)\varphi dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)dx + \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)(\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(x,0))dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)dx \\
&= \varphi(0,0) = \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

因此, $(2\pi, \sqrt{\pi t})^{-n} H(t) e^{-|x|^2/4a^2t}$ 是热传导方程的基本解.

例 16 证明函数

$$E(x,t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|)$$

(其中 $a > 0, x \in \mathbb{R}_x, t \in \mathbb{R}_t, H$ 是赫维赛德函数) 满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E = \delta,$$

其中 $\delta = \delta(x,t)$ 是空间 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t) = \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ 中的 $\delta-$ 函数. 因此, $\dfrac{1}{2a}H(at - |x|)$ 是弦振动方程的基本解.

设 $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$, 简记 $\Box_a := \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
\langle \Box_a E, \varphi\rangle &= \langle E, \Box_a\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}_x} dx \int_{\mathbb{R}_t} E(x,t)\Box_a\varphi(x,t)dt \\
&= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\frac{|x|}{a}}^{+\infty} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt - \frac{a}{2}\int_0^{+\infty} dt \int_{-at}^{at} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx \\
&= -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x, \frac{|x|}{a}\right)dx - \frac{a}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t)\right]dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(at,t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(-at,t)dt \\
&= \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\varphi(0,0) = \varphi(0,0) = \langle\delta,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

在 §4 中我们充分详细地阐述了算子的基本解 (脉冲响应函数) 的作用以及卷积在根据保位移线性算子 $Au = \tilde{u}$ 的输出确定输入的问题中的作用, 那里关于这个方面所讲的一切都可移到高维情形而无需作什么改变. 也就是说, 如果我们知道算子 A 的基本解 E, 亦即如果 $AE = \delta$, 那么也可以把方程 $Au = f$ 的解 u 表示成卷积 $u = f * E$ 的形式.

例 17 这样一来, 利用例 16 的函数 $E(x,t)$, 可以把方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

的解表示成函数 f 与 E 的卷积 $f * E$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

譬如, 在 f 连续的假定下, 这个卷积显然存在. 直接利用含参变量积分微分法容易验证, $u(x,t)$ 确实是方程 $\Box_a u = f$ 的解.

例 18 类似地, 根据例 15 的结果, 得到方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

的解

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi,\eta)}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi,$$

譬如, 假定函数 f 连续且有界, 从而保证上式右端的卷积 $f * E$ 存在. 我们指出, 这些假定对此例来说并非是必须的. 比如说, 从广义函数的观点看, 可以提出, 当取广义函数 $\varphi(x)\delta(x)$ 作为 $f(x,t)$ 时方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ 的求解问题, 其中 $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n), \delta \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.

把这样的函数 f 形式地代入到积分号下, 得到关系式

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(\xi)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi.$$

利用含参变量积分的微分法, 可以确信, 这个函数是方程 $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=0$ 当 $t>0$ 时的解. 注意, 当 $t\to+0$ 时, 有 $u(x,t)\to\varphi(x)$, 这可从例 7 的结果推出, 在那里已经建立了这里遇到的函数族的 $\delta-$ 型性.

例 19 最后, 回忆在例 14 中得到的拉普拉斯算子的基本解, 我们来求三维泊松方程 $\Delta u=-4\pi f$ 的解

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(\xi)}{|x-\xi|}d\xi.$$

它与早些时候研究过的空间分布密度为 f 的分布电荷的势 (4) 是一样的, 只是记号不同而已.

如果把函数 f 取作 $\nu(x)\delta_S$, 其中 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的分片光滑曲面, 那么形式地代入到积分中, 就得到函数

$$u(x)=\int_S\frac{\nu(\xi)}{|x-\xi|}d\sigma(\xi),$$

像我们已经知道的那样, 它是单层位势, 准确地说, 它是以面密度 $\nu(x)$ 分布在曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ 上的电荷的势.

练 习

1. a) 像例 3 中建立形如 (4) 的体势的连续性那样讨论单层位势 (8), 并证明它的连续性.

   b) 完成命题 4 与 5 的整个证明.

2. a) 证明: 对任何集合 $M\subset\mathbb{R}^n$ 和任何 $\varepsilon>0$, 可以构造函数 $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. 同时满足以下面三个条件: $\forall x\in\mathbb{R}^n(0\leqslant f(x)\leqslant 1);\forall x\in M(f(x)=1);\mathrm{supp}f\subset M_\varepsilon$. (其中 M_ε 是集合 M 的 $\varepsilon-$ 邻域).

   b) 证明: 对 $\mathbb{R}^n$ 中任一闭集 M, 存在非负函数 $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, 使得 $(f(x)=0)\Leftrightarrow(x\in M)$.

3. a) 把 §4 的习题 6,7 的解推广到任意维空间 $\mathbb{R}^n$ 的情形.

   b) 验证: 广义函数 δ_S (单层) 不是正则的.

4. 利用卷积证明下面的魏尔斯特拉斯逼近定理的变体.

   a) 任何一个在 n 维紧区间 $I\subset\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 能够在 I 上用 n 个变量的代数多项式一致逼近.

   b) 如果把 I 换成任一紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$ 并假定 $f\in C(K,\mathbb{C})$, 上述断言仍然正确.

c) 对 $\mathbb{R}^n$ 中任一开集 G 和任何函数 $f \in C^{(m)}(G,\mathbb{R})$, 存在由 n 个变量的代数多项式 P_k 构成的序列 $\{P_k\}$, 使得对任一多维指标 $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), |\alpha| \leqslant m$, 在每个紧集 $K \subset G$ 上当 $k \to \infty$ 时,$P_k^{(\alpha)} \rightrightarrows f^{(\alpha)}$.

d) 如果 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, $f \in C^{(\infty)}(\overline{G},\mathbb{R})$, 那么存在由 n 个变量的代数多项式 P_k 组成的序列 $\{P_k\}$, 对任何 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 在 $\overline{G}$ 上, 当 $k \to \infty$ 时, $P_k^{(\alpha)} \rightrightarrows f^{(\alpha)}$.

e) 任何一个关于变量 $x^1, \cdots, x^n$ 分别具有周期 $T_1, \cdots, T_n$ 的函数 $f \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中能够用关于相应的变量分别具有同样的周期 $T_1, \cdots, T_n$ 的三角多项式一致逼近.

5. 这个问题包含卷积的平均作用的进一步的知识.

a) 当时, 根据闵可夫斯基的数的不等式, 当 $p \geqslant 1$ 时, 我们得到了闵可夫斯基的积分不等式

$$\left(\int_X |a(x)+b(x)|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |a|^p(x)dx\right)^{1/p} + \left(\int_X |b|^p(x)dx\right)^{1/p}.$$

它同样又使我们预见到以下广义闵可夫斯基不等式

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{1/p} \leqslant \int_Y \left(\int_X |f|^p(x,y)dx\right)^{1/p} dy.$$

试证这个不等式, 其中 $p \geqslant 1, X, Y$ 是可测集 (例如, 分别是 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的区间), 并且不等式右端是有限的.

b) 把广义闵可夫斯基积分不等式应用于卷积 $f * g$, 证明: 当 $p \geqslant 1$ 时,

$$\| f * g \|_p \leqslant \| f \|_1 \cdot \| g \|_p,$$

这里照例记 $\| u \|_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p(x)dx)^{1/p}$.

c) 设 $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 且在 $\mathbb{R}^n$ 上有 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$. 记 $\varphi_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon$ 当 $\varepsilon > 0$ 时. 试证: 如果 $f \in \mathfrak{R}_p(\mathbb{R}^n)$ (即如果积分 $\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)dx$ 存在), 那么 $f_\varepsilon \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 且 $\| f_\varepsilon \|_p \leqslant \| f \|_p$.

注意, 常称函数 f_ε 为函数 f 以 φ_ε 为核的平均.

d) 仍采用上面的记号, 验证: 在任何区间 $I \subset \mathbb{R}^n$ 上, 成立不等式

$$\| f_\varepsilon - f \|_{p,I} \leqslant \sup_{|h|<\varepsilon} \| \tau_h f - f \|_{p,I},$$

其中 $\| u \|_{p,I} = (\int_I |u|^p(x)dx)^{1/p}$, 而 $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

e) 试证: 如果 $f \in \mathfrak{R}_p(\mathbb{R}^n)$, 那么当 $h \to 0$ 时, $\| \tau_h f - f \|_{p,I} \to 0$.

f) 试证: 对任何函数 $f \in \mathfrak{R}_p(\mathbb{R}^n), p \geqslant 1$, 成立关系式 $\| f_\varepsilon \|_p \leqslant \| f \|_p$; 而且, 当 $\varepsilon \to +0$ 时, $\| f_\varepsilon - f \|_p \to 0$.

g) 设 $\mathfrak{R}_p(G)$ 是在开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上绝对可积且具有范数 $\|\|_{p,G}$ 的函数构成的向量空间, 试证: 函数类 $C^{(\infty)}(G) \bigcap \mathfrak{R}_p(G)$ 在 $\mathfrak{R}_p(G)$ 中处处稠密, 这对于 $C_0^{(\infty)}(G) \bigcap \mathfrak{R}_p(G)$ 同样也是正确的.

h) 对上一问题 $p = \infty$ 的情况, 相应地成立命题: 任何一个在 G 上连续的函数能用 $C^{(\infty)}(G)$ 类函数在 G 上一致逼近.

i) 如果 f 是 $\mathbb{R}$ 上以 T 为周期的局部绝对可积函数, 记 $\| f \|_{p,T}= (\int_a^{a+T} |f|^p(x)dx)^{1/p}$, 用 $\mathfrak{R}_p^T$ 表示具范数 $\|\|_{p,T}$ 的线性空间, 试证: 当 $\varepsilon \to +0$ 时, $\| f_\varepsilon - f \|_{p,T} \to 0$.

j) 我们知道, 若两个函数之中有一个是周期函数, 那么它们的卷积也是周期函数. 试利用这个事实证明: 光滑周期函数类 $C^{(\infty)}$ 在 $\mathfrak{R}_p^T$ 中处处稠密.

6. a) 采用例 11 中的记号并利用公式 (12), 验证: 如果 $f \in C^{(1)}(\overline{\mathbb{R}^n \setminus S})$, 那么

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\left(\rfloor f\right)_S \cos\alpha_i \delta_S\right) + \left(\rfloor \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}\right)_S \cos\alpha_j \delta_S.$$

b) 试证: 和式 $\sum\limits_{i=1}^n \left(\rfloor \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right)_S \cos\alpha_i$ 等于函数 f 在相应的点 $x \in S$ 的法向导数的跃度 $\left(\rfloor \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_S$, 并且这个跃度不依赖法线方向的选取, 等于函数 f 在点 x 曲面 S 两侧法向导数的和 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_1} + \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_2}\right)(x)$.

c) 试验证关系式

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left(\rfloor \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\left(\rfloor f\right)_S \delta_S\right),$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是法向导数 $\left(即 \left\langle \dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}, \varphi \right\rangle := -\left\langle F, \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \right\rangle\right)$, 而 $(\rfloor f)_S$ 是函数 f 在点 $x \in S$ 沿法线方向 n 的跃度.

d) 试利用得到的 Δf 的表达式, 证明古典的格林公式

$$\int_G (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)dx = \int_S \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right) d\sigma,$$

其中 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有限区域, 它的边界 S 是分片光滑曲面; $f, \varphi \in C^{(1)}(G) \bigcap C^{(2)}(G)$, 且左边的积分至少在反常积分意义下是存在的.

e) 试证: 如果 $\delta-$ 函数对应于放置在空间 $\mathbb{R}^n$ 的坐标原点 O 处的单位电荷, 而函数 $-\dfrac{\partial\delta}{\partial x^1}$ 对应于位于原点 O 沿 x^1 轴正向电偶极矩为 $+1$ 电偶极子 (参看 §4 练习 11), 而函数 $\nu(x)\delta_S$ 是曲面 S 上面密度为 $\nu(x)$ 的分布电荷的单层分布, 那么, 所谓双层分布的函数 $-\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu(x)\delta_S)$ 则对应着曲面 S 上密度为 $\nu(x)$ 沿法向 $\boldsymbol{n}$ 的电偶极子的分布.

f) 假定格林公式中的 $\varphi = \dfrac{1}{|x-y|}$, 试利用例 14 的结果证明: 任何一个区域 G 上的 $C^{(1)}(\overline{G})$ 类调和函数 f 能表成区域 G 的边界 S 上的单层和双层分布的势和.

7. a) 函数 $\dfrac{1}{|x|}$ 是位于空间 $\mathbb{R}^3$ 的坐标原点的单位电荷产生的电场强度 $\boldsymbol{A} = -\dfrac{x}{|x|^3}$ 的势. 我们知道,

$$\operatorname{div}\left(-\frac{x}{|x|^3}\right) = 4\pi\delta, \operatorname{div}\left(-\frac{qx}{|x|^3}\right) = 4\pi q\delta, \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{q}{|x|}\right) = 4\pi\delta.$$

试据此阐明: 我们为什么认为函数 $U(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\mu(\xi)}{|x-\xi|} d\xi$ 应该是满足 $\Delta U = -4\pi\mu$ 的. 验证: 它的确满足所写的泊松方程.

b) 高斯 – 奥斯特拉格德斯基公式的物理推论, 即电磁场理论中已知的高斯定理，说的是: 分布在空间 $\mathbb{R}^3$中的电荷产生的电场强度穿过封闭曲面 S 的电通量等于 $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ (见第 14 章 §2 第 2 段), 其中 Q 是以 S 为边界的区域中的全部电量, 试证这个高斯定理.

8. 试验证以下广义函数理论意义下的等式

a) $\Delta E = \delta$, 如果

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & x \in \mathbb{R}^2, \\ -\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}(n-2)}|x|^{-(n-2)}, & x \in \mathbb{R}^n, n > 2. \end{cases}$$

b) $(\Delta + k^2)E = \delta$, 如果

$$E(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \text{ 或 } E(x) = -\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|},\ x \in \mathbb{R}^3.$$

c) $\Box_a E = \delta$, 其中 $\Box_a = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)^2\right]$. 而

$$E(x) = \frac{H(at - |x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}},\quad x \in \mathbb{R}^2,\quad t \in \mathbb{R}$$

或

$$E(x) = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}} \equiv \frac{H(t)}{2\pi a}\delta(a^2t^2 - |x|^2),\quad x \in \mathbb{R}^3,\quad t \in \mathbb{R}$$

其中 $H(t)$ 是赫维赛德函数, $S_{at} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = at\}$ 是球面, $a > 0$.

d) 利用上面的结果, 把具微分算子 A 的方程 $Au = f$ 的解 u 表成卷积 $f * E$ 的形式. 例如, 假定函数 f 连续, 试验证所得到的含参变量积分确实满足方程 $Au = f$.

9. 关于液体体积积分的微分法

空间中充满了运动的物质 (液体). 设 $v = v(t, x)$ 和 $\rho = \rho(t, x)$ 分别是物质在瞬时 t 和点 x 处的位移速度和密度. 我们将关注在初始瞬间充满区域 Ω_0 的物质的位移.

a) 把充满区域 Ω_t 的物质的质量表示成积分的形式, 并写出质量守恒定律. 这里 Ω_t 是初始瞬间占据 Ω_0 的物质至时刻 t 时占据的区域.

b) 微分具变化积分区域 (液体体积) Ω_t 的积分 $F(t) = \int_{\Omega_t} f(t, x)d\omega$, 试证:

$$F'(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t}d\omega + \int_{\partial\Omega_t} f\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n}\rangle d\sigma,$$

其中 $\Omega_t, \partial\Omega_t, d\omega, d\sigma, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}, \langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别是时刻 t 的区域, 区域的边界, 在相应点处的体元, 面元, 单位外法线向量, 流速以及内积.

c) 试证, b) 中的 $F'(t)$ 可以表示成

$$F'(t) = \int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\boldsymbol{v})\right)d\omega$$

的形式.

d) 对比习题 a), b), c) 的结果, 导出连续性方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$ (这方面也可参看第 14 章, §4, 第 2 段).

e) 设 $|\Omega_t|$ 是区域 Ω_t 的体积. 试证 $\frac{d|\Omega_t|}{dt} = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \boldsymbol{v} d\omega$.

f) 试证, 不可压缩流体的速度场 $\boldsymbol{v}$ 是无散度的 ($\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$); 无散度条件是演化介质的任意部分都不可压缩 (保体积) 的数学表示.

g) 哈密顿经典力学系统的相速度场 $(\dot{p}, \dot{q})$ 满足哈密顿方程组 $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, 其中 $H = H(p, q)$ 是系统的哈密顿函数. 试遵循李特尔伍德证明, 在哈密顿流动中相体积守恒. 同时验证, 哈密顿函数 H (能量) 沿流线 (轨道) 为常数.

第十八章　傅里叶级数与傅里叶变换

§1　一些主要的与傅里叶[①]级数有关的一般概念

1. 正交函数系

a. 线性空间中向量的分解

在整个分析教程中, 我们不止一次地注意到各种各样的函数类关于通常的算术运算都构成线性空间. 譬如, 分析中最基础的定义在区域 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上的光滑函数类、连续函数类或可积函数类，这里所说的函数可以是实值的、复值的或更加一般的向量值函数.

从代数观点看, 等式

$$f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$$

(这里 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是给定的函数类中的函数，而 α_i 是域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 中的系数）指的是: 向量 f 是所考察的向量空间中的向量 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合.

通常, 在分析中需要研究 "无限线性组合", 即形如

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \tag{1}$$

的函数项级数.

[①] 傅里叶 (J. Fourier) (1768—1830) 是法国数学家. 他的主要著作是《热的解析理论》(1822), 其中有傅里叶推导出来的热传导方程和这个方程的分离变量解法 (傅里叶方法) (见本节例 15). 傅里叶方法的关键是把函数展成三角级数 (傅里叶级数). 嗣后, 许多大数学家都从事过这种展开的可能性的研究. 特别地, 这些研究导致实变函数论、集合论的建立, 也促进了函数概念本身的发展.

为定义“级数和”, 要求在所考察的线性空间中给出了某个拓扑 (特别地, 给出某一距离), 使能够做出关于差 $f-S_n$ 趋于零的判断. 这里 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k$.

古典分析中在线性空间里引进距离的基本方法是在这个空间中定义向量的范数或任两向量的内积, 第 10 章 §1 讨论了这些概念.

现在, 我们只考察装备了内积的空间 (如同以前, 内积用符号 $\langle,\rangle$ 表示), 在这种空间中, 如同在解析几何已熟知的三维欧氏空间的情形一样, 可以论及正交向量、正交向量系和正交基.

定义 1 在装备了内积 $\langle,\rangle$ 的线性空间中, 向量 x,y 叫做 (关于这个内积)**正交的**, 如果 $\langle x,y\rangle=0$.

定义 2 向量组 $\{x_k;k\in K\}$ 叫做**正交的**, 如果它的(对应于不同足标的)向量是两两正交的.

定义 3 称向量组 (系) $\{e_k;k\in K\}$ 为**规范化正交组 (系)** (或规格化正交组(系)), 如果对于任何指标 $i,j\in K$, 成立关系式 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$. 这里 δ_{ij} 是克罗内克记号, 亦即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{如果 } i=j,\\0, \text{如果 } i\neq j.\end{cases}$$

定义 4 称有限向量组 $x_1,\cdots,x_n$ 为**线性无关向量组**, 如果仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 时成立等式 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0$ (在第一种情形, 0 是系数域中的零, 在第二种情形, 0 是空间中的零向量).

称线性空间中的一个向量组为线性无关向量组，如果它的每一个有限子组都是线性无关的.

现在我们感兴趣的基本问题是向量空间的向量按给定的线性无关组展开的问题.

注意到今后讨论的是函数空间 (它可能是无限维的), 我们应特别地考虑到, 这种展开可能导致形如 (1) 的级数. 这正是上边提出来的基本问题所具有的分析因素, 而这个问题本身是一个代数问题.

从解析几何教程中知道, 按正交组和规范化正交组展开, 与按任意线性无关组展开相比, 具有许多技术上的优越性 (容易计算展开系数; 根据向量在规范正交基下的坐标容易计算这些向量的内积, 等等).

正是这个原因, 我们的主要兴趣在于按正交组的展开, 在函数空间中, 这就是按正交函数组的展开或傅里叶级数展开, 这一章就研究这些问题.

b. 正交函数组的一些例子

把第 10 章 §1 的例 12 发展到线性空间 $\mathfrak{R}_2(X;\mathbb{C})$ 上. 这个空间是集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ 上的局部可积, 且其模的平方也在 X 上 (在常义或反常积分意义上) 可积的函数的

空间. 我们引进内积.

$$\langle f,g\rangle := \int_X (f\cdot \bar{g})(x)dx. \tag{2}$$

由于 $|f\cdot\bar{g}| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2+|g|^2)$, 等式 (2) 中的积分收敛, 也就是说, 合理地定义了量 $\langle f,g\rangle$.

如果讨论的是实函数, 则在相应的实空间 $\mathfrak{R}_2(X,\mathbb{R})$ 中, 关系 (2) 化作等式

$$\langle f,g\rangle := \int_X (f\cdot g)(x)dx. \tag{3}$$

基于积分的性质, 容易验证, 所有在第 10 章 §1 中指出的内积公理在这种情况下都成立, 如果把只在 n 维零测度集上有区别的函数彼此等同的话. 本节以下部分, 将在等式 (2) 和 (3) 的意义下理解函数的内积.

例 1　我们记得, 对于整数 m 和 n

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\cdot e^{-inx}dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } m\neq n,\\ 2\pi, & \text{如果 } m=n; \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } m\neq n,\\ \pi, & \text{如果 } m=n\neq 0,\\ 2\pi, & \text{如果 } m=n=0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\sin nx dx = 0; \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } m\neq n,\\ \pi, & \text{如果 } m=n\neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

这些关系表明, 指数函数组 $\{e^{inx}; n\in\mathbb{Z}\}$ 是空间 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中关于内积 (2) 的正交向量组, 而三角函数组$\{1,\cos nx,\sin nx; n\in\mathbb{N}\}$ 是 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 中的正交向量组. 如果把三角函数组看作 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中的一组向量, 亦即允许做它们的复系数线性组合, 那么, 根据欧拉公式 $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx, \cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$, 上述两个函数组能彼此线性表示, 也就是说, 它们在代数上是等价的. 根据这个原因, 指数函数组 $\{e^{inx}; n\in\mathbb{N}\}$ 也叫三角函数组, 或更准确地说, 叫*三角函数组的复形式*.

关系 (4)—(7) 说明, 所考察的组是正交的, 但不是规范化的, 而组 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}; n\in\mathbb{Z}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx; n\in\mathbb{N}\right\}$ 是正交规范化的.

如果代替区间 $[-\pi,\pi]$ 取任意区间 $[-l,l]\subset\mathbb{R}$, 则利用变量替换可以得到类似的组 $\{e^{i\frac{\pi}{l}nx}; n\in\mathbb{Z}\}$ 和 $\left\{1,\cos\frac{\pi}{l}nx,\sin\frac{\pi}{l}nx; n\in\mathbb{N}\right\}$, 它们在 $\mathfrak{R}_2([-l,l];\mathbb{C})$ 和 $\mathfrak{R}_2([-l,l];\mathbb{R})$ 中是正交的, 也可以得到相应的规范化正交组

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{i\frac{\pi}{l}nx}; n\in\mathbb{Z}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}nx, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}nx; n\in\mathbb{N}\right\}.$$

例 2 设 I_x 是 $\mathbb{R}^m$ 中的区间, 而 I_y 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区间, 又设 $\{f_i(x)\}$ 是 $\mathfrak{R}_2(I_x,\mathbb{R})$ 中的正交函数组, 而 $\{g_j(x)\}$ 是 $\mathfrak{R}_2(I_y,\mathbb{R})$ 中的正交函数组. 于是, 从富比尼定理得到, 函数组 $\{u_{ij}(x,y) := f_i(x)g_j(x)\}$ 是 $\mathfrak{R}_2(I_x \times I_y,\mathbb{R})$ 中的正交组.

例 3 注意, 当 $\alpha \neq \beta$,

$$\int_0^l \sin\alpha x \sin\beta x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right)$$
$$= \cos\alpha l \cos\beta l \cdot \frac{\beta \text{tg}\alpha l - \alpha \text{tg}\beta l}{\alpha^2-\beta^2}.$$

由此可见, 如果量 α 和 β 满足 $\dfrac{\text{tg}\alpha l}{\alpha} = \dfrac{\text{tg}\beta l}{\beta}$, 则原积分等于零. 因此, 如果 $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \cdots$ 是方程 $\text{tg}\xi l = c\xi$ 的根的序列, 这里 c 是任意常数, 则函数组 $\{\sin(\xi_n x); n \in \mathbb{N}\}$ 在区间 $[0,l]$ 上正交. 特别地, 当 $c=0$ 时, 我们得到熟悉的函数组 $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{l}nx\right); n \in \mathbb{N}\right\}$.

例 4 我们来研究方程

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)u(x) = \lambda u(x),$$

这里 $q \in C^{(\infty)}([a,b],\mathbb{R})$, 而 λ 是数值系数. 假设 $C^{(2)}([a,b],\mathbb{R})$ 类函数 $u_1, u_2, \cdots$ 在区间 $[a,b]$ 的端点等于零, 而它们的每一个都满足系数 λ 取相应的值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 时的上边给定的方程. 我们证明, 如果 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则函数 u_i, u_j 在 $[a,b]$ 上正交.

事实上, 由分部积分得

$$\int_a^b \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)u_i(x)\right]u_j(x)dx = \int_a^b u_i(x)\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)u_j(x)\right]dx.$$

根据方程, 由此推出

$$\lambda_i\langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j\langle u_i, u_j\rangle.$$

由于 $\lambda_i \neq \lambda_j$, 所以我们得到,$\langle u_i, u_j\rangle = 0$.

特别地, 如果在 $[a,b]$ 上 $q(x) \equiv 0$, 而 $[a,b] = [0,\pi]$, 我们重新得到 $[0,\pi]$ 上的正交组 $\{\sin nx; n \in \mathbb{N}\}$.

进一步的例子, 其中包括对数学物理很重要的正交组的例子, 读者可在这一节的练习中找到.

c. 正交化

人们熟知, 在有限维欧氏空间中, 以任一线性无关向量组为基础, 用典型方法

(借助格拉姆[1] —— 施密特[2] 正交化手续), 可以建立与给定的向量组等价的, 正交甚至规范化正交的向量组. 显然, 在任意内积空间中, 用这样一个方法, 也可以把由它的向量 $\psi_1, \psi_2, \cdots$ 构成的任意一个线性无关组规范正交化.

我们记得, 产生规范化正交组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 的正交化手续可以用下面的关系式表出:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \varphi_2 = \frac{\psi_2 - \langle\psi_2, \varphi_1\rangle\varphi_1}{\|\psi_2 - \langle\psi_2, \varphi_1\rangle\varphi_1\|},$$

$$\varphi_n = \frac{\psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\langle\psi_n, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\|\psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\langle\psi_n, \varphi_k\rangle\varphi_k\|}.$$

例 5 $\mathfrak{R}_2([-1,1], \mathbb{R})$ 中的线性无关组 $\{1, x, x^2, \cdots\}$ 的正交化产生所谓勒让德正交多项式. 我们指出, 习惯上我们不把这样得到的规范化正交多项式组本身叫做勒让德多项式, 而是把与它们成某一比例的那些多项式叫做勒让德多项式. 选择比例因子使多项式的最高次项系数等于 1, 或多项式的值当 $x = 1$ 时等于 1. 这时, 函数组的正交性显然没有被破坏, 而规范性, 一般说, 就丧失了.

我们已经遇见过由罗德里格斯公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

定义的勒让德多项式.对于它们有 $P_n(1) = 1$.

按最高次项系数等于 1 规范化的头几个勒让德多项式是:

$$\widetilde{P}_0(x) \equiv 1, \widetilde{P}_1(x) = x, \widetilde{P}_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \widetilde{P}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

正交规范化勒让德多项式的形式是

$$\widehat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$

经过直接计算即可断定它们在区间 $[-1,1]$ 上的正交性. 采取上述公式作为多项式 $P_n(x)$ 的定义, 我们来检验勒让德多项式组 $\{P_n(x)\}$ 在区间 $[-1,1]$ 上的正交性. 为此只要验证多项式 $P_n(x)$ 与多项式 $1, x, \cdots x^{n-1}$ 都正交即可, 因为由后边这些多项式的线性组合能得到 $k < n$ 次的一切多项式 $P_k(x)$.

[1]格拉姆 (Gram)(1850—1916) 是丹麦数学家, 他继承了 П.Λ. 切比雪夫的研究, 揭示了按正交组展开与最佳平方逼近之间的联系 (参看下边的傅里叶级数). 正是在这些研究中, 产生了正交化手续和著名的格拉姆矩阵 (参看第 12 章 §4 和本节 (18) 式).

[2]施密特 (E.Schmidt)(1876—1959) 是德国数学家, 为考察积分方程研究过希尔伯特空间的几何, 并用欧氏几何的语言描述了它.

事实上，当 $k<n$ 时，经分部积分，得

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = \frac{1}{k!2^k}\int_{-1}^{1}\frac{d^{k+1}x^k}{dx^{k+1}}\cdot\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}dx = 0.$$

关于分析中正交函数组的起源的某些知识将在这一节最后一段以及为它编排的练习中给出，而现在，我们返回到与线性内积空间中向量按给定向量组展开方面的基本一般问题.

d. 内积的连续性和毕达格拉斯定理

我们不仅要考察有限多个向量的和，还要考察无限多个向量的和 (级数). 在这个方面，我们将发现，内积的连续性能把内积的熟知代数性质推广到级数情形.

设 X 是具内积 $\langle,\rangle$ 的向量空间，从而具有由内积诱导出的范数 $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ (参看第 10 章 §1). 由向量 $x_i \in X$ 构成的级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 收敛于 $x\in X$，记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = x$，正是按这个范数定义的.

引理 1 (内积的连续性) 设 $\langle,\rangle : X^2 \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$- 线性空间 X 中的内积. 那么，

a) 函数 $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ 是变元 (x,y) 的连续函数;

b) 如果 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$，则 $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\langle x_i,y\rangle$;

c) 如果 $e_1, e_2, \cdots$ 是 X 中的规范正交向量组，$x=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i e_i, y=\sum\limits_{i=1}^{\infty} y^i e_i$，则 $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i\bar{y}^i$.

◀ 命题 a) 由柯西 – 布尼雅可夫斯基不等式 (参看第 10 章 §1)

$$|\langle x-x_0, y-y_0\rangle|^2 \leqslant \|x-x_0\|^2\cdot\|y-y_0\|^2$$

推出.

由 a) 可推出 b)，这是因为

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i,y\rangle + \langle \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i, y\rangle,$$

而当 $n\to\infty$ 时有 $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} x_i \to 0$.

命题 c) 由重复使用 b) 并注意关系式 $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ 得到. ▶

从刚证明的这个引理直接推出

定理 (毕达哥拉斯①)

①毕达哥拉斯 (Pythagoras of Samos) (大约公元前 580 — 前 500) 是杰出的古希腊数学家和唯心主义哲学家，毕达哥拉斯学派的奠基人. 这个学派发现了正方形的边和对角线是不可公度线段. 这使古人为之震惊. 古典毕达哥拉斯定理本身，在毕达哥拉斯以前很久，许多国家的人就已经知道了，(当然，可能没有证明).

a) 设 $\{x_i\}$ 是一组彼此正交的向量, 而 $x = \sum_i x_i$, 则 $\|x\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$.

b) 如果 $\{e_i\}$ 是规范正交向量组, 而 $x = \sum_i x^i e_i$, 则 $\|x\|^2 = \sum_i |x^i|^2$.

2. 傅里叶系数和傅里叶级数

a. 傅里叶系数和傅里叶级数的定义

设 $\{e_i\}$ 是规范正交组, 而 $\{l_i\}$ 是具内积 $\langle , \rangle$ 的空间中的正交向量组.

设 $x = \sum_i x^i l_i$. 在向量 x 的这个展开式中, 系数 x^i 可直接求出:

$$x^i = \frac{\langle x, l_i \rangle}{\langle l_i, l_i \rangle}.$$

如果 $l_i = e_i$, 则该式可简化为:

$$x^i = \langle x, e_i \rangle.$$

我们看出, 如果向量 x 本身以及正交组 $\{l_i\}$(或 $\{e_i\}$) 是给定的, 则关于 x^i 的公式有意义. 为了计算 x^i 不再需要等式 $x = \sum_i i^i l_i$(或 $x = \sum_i x^i e_i$).

定义 5 称数 $\left\{ \dfrac{\langle x, l_i \rangle}{\langle l_i, l_i \rangle} \right\}$ 为向量 $x \in X$ 在正交系 $\{l_i\}$ 下的傅里叶系数.

如果向量组 $\{e_i\}$ 是规范正交的, 则傅里叶系数有 $\{\langle x, e_i \rangle\}$ 的形式.

从几何观点看, 向量 $x \in X$ 的第 i 个傅里叶系数 $\langle x, e_i \rangle$ 是这个向量在单位向量 e_i 的方向上的射影. 在熟知的三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 的情况, 设给定了它的规范正交标架 e_1, e_2, e_3, 这时, 傅里叶系数 $x^i = \langle x, e_i \rangle (i = 1, 2, 3)$ 是向量 x 在基 e_1, e_2, e_3 下的坐标, 它们出现在展开式 $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ 中.

如果给我们的不是三个向量 e_1, e_2, e_3, 而是两个向量 e_1, e_2, 那么, 远非对每个 $x \in \mathbb{R}^3$ 都能成立展开式 $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$. 虽然如此, 在这种情形依然可以定义傅里叶系数 $x^i = \langle x, e_i \rangle, i = 1, 2$, 向量 $x_e = x^1 e_1 + x^2 e_2$ 是向量 x 在向量 e_1, e_2 的平面 L 上的射影. 在平面 L 的一切向量中, 向量 x_e 在下述意义下最接近向量 x : 对于任何向量 $y \in L$, 成立 $\|x - y\| \geqslant \|x - x_e\|$. 这就是傅里叶系数的美妙极值性质. 下边我们转入对它的一般情况的讨论.

定义 6 如果 X 是具内积 $\langle , \rangle$ 的线性空间, 而 $l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$ 是 X 的正交向量系, 那么, 对任意向量 $x \in X$ 令级数

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} e_k \tag{8}$$

与之对应.

这个级数叫做向量 x 关于正交系 $\{l_k\}$ 的**傅里叶级数**.

如果 $\{l_k\}$ 是有限组, 则傅里叶级数就化成有限和.

在规范正交系 $\{e_k\}$ 的情形, 向量 $x \in X$ 的傅里叶级数可简单地写成

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \tag{8'}$$

的形式.

例 6 设 $X = \mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. 在这个空间中考察例 1 中的正交系 $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. 与函数 $f \in \mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 对应的关于这个正交系的傅里叶级数是

$$f \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx.$$

$a_0(f)$ 的因子 $\frac{1}{2}$ 的设置为的是能得到傅里叶系数的如下统一公式:

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, k = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, k = 1, 2, \cdots \tag{10}$$

如果 $f(x) = x$, 则 $a_k = 0, k = 0, 1, 2, \cdots$, 而 $b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}, k = 1, 2, \cdots$. 因此, 在这种情况, 得

$$f(x) = x \backsim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx.$$

例 7 在空间 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中考察例 1 中的正交系 $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$. 设 $f \in \mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. 根据定义 5 和关系式 (4), 函数 f 在正交系 $\{e^{ikx}\}$ 下的傅里叶系数用公式

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \left(= \frac{\langle f(x), e^{ikx}\rangle}{\langle e^{ikx}, e^{ikx}\rangle}\right) \tag{11}$$

表示.

比较等式 (9),(10),(11), 并注意到欧拉公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, 我们得到, 同一个函数关于实和复两种形式的三角函数系的傅里叶系数之间有如下关系:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{如果 } k \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{如果 } k < 0. \end{cases} \tag{12}$$

为了使公式 (9) 和 (12) 中的情况 $k = 0$ 不成为例外, (假设 $b_0 = 0$) 用 a_0 表示的不是开头的傅里叶系数本身, 而是它的两倍之大, 上边就是这么做的.

b. 傅里叶系数和傅里叶级数的基本一般性质

下述几何事实是本段的关键.

引理 2 (垂线引理) 设 $\{l_k\}$ 是空间 X 中的一组 (有限多个或可数多个) 非零的相互正交的向量, 且向量 $x \in X$ 关于 $\{l_k\}$ 的傅里叶级数收敛于向量 $x_l \in X$.

那么, 表达式 $x = x_l + h$ 中的向量 h 必正交于 x_l; 其次,h 正交于由向量系 $\{l_k\}$ 生成的线性空间及其在 X 中的闭包.

◀ 注意到内积的性质, 只要对任何量 $l_m \in \{l_k\}$ 验证 $\langle h, l_m\rangle = 0$ 即可.

我们有

$$h = x - x_l = x - \sum_k \frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle} l_k.$$

因此,

$$\begin{aligned}\langle h, l_m\rangle &= \langle x, l_m\rangle - \sum_k \frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle}\langle l_k, l_m\rangle \\ &= \langle x, l_m\rangle - \frac{\langle x, l_m\rangle}{\langle l_m, l_m\rangle}\langle l_m, l_m\rangle = 0.\end{aligned}$$ ▶

垂线引理在几何上是很明显的, 而且, 在第 2.a. 段中考察三维欧氏空间中由两个正交向量构成的向量组时, 我们实质上已经指出了这个引理.

根据这个引理可以得到一系列关于傅里叶系数和傅里叶级数性质的结果.

贝塞尔不等式

考虑到展开式 $x = x_l + h$ 中向量 x_l 和 h 的正交性, 根据毕达哥拉斯定理得到,$\|x\|^2 = \|x_l\|^2 + \|h\|^2$(斜边不小于直角边). 这个关系式用傅里叶系数的术语写出来就叫做贝塞尔不等式. 让我们把它写出来. 根据同一个毕达哥拉斯定理, 有

$$\|x_l\|^2 = \sum_k \left|\frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle}\right|^2 \langle l_k, l_k\rangle. \tag{13}$$

因此,

$$\sum_k \frac{|\langle x, l_k\rangle|^2}{\langle l_k, l_k\rangle} \leqslant \|x\|^2. \tag{14}$$

这就是贝塞尔不等式.对于规范正交向量系 $\{e_k\}$, 它变得特别简单:

$$\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{15}$$

用傅里叶系数 α_k, 一般的贝塞尔不等式 (14) 可写成 $\sum\limits_i |\alpha_k|^2\|l_k\|^2 \leqslant \|x\|^2$, 它在规范正交系下化成 $\sum\limits_k |\alpha_k|^2 \leqslant \|x\|^2$.

假若空间 X 是复的, 对于傅里叶系数 α_k 上边所写的 $|\alpha_k|$ 表示的是 α_k 的模. 这种情形下, 傅里叶系数可取复数值.

我们注意到, 在贝塞尔不等式的推导中, 我们应用了向量 x_l 的存在性假定以及等式 (13). 但是, 如果 $\{l_k\}$ 是有限组, 则向量 x_l 的存在性是没有问题的 (因为这时 x 的傅里叶级数是有限和). 因此, 不等式 (14) 对 $\{l_k\}$ 的任何有限子系成立, 从而对整个 $\{l_k\}$ 也成立.

例 8 对于三角函数系 (参看公式 (9),(10)), 贝塞尔不等式有如下形式:

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)dx. \tag{16}$$

对函数系, $\{e^{ikx}; k\in\mathbb{Z}\}$ (参看公式 (11)), 贝塞尔不等式特别优美:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)dx. \tag{17}$$

完备空间中傅里叶级数的收敛性

设 $\sum\limits_k x^k e_k=\sum\limits_k\langle x,e_k\rangle e_k$ 是向量 $x\in X$ 关于规范正交系 $\{e_k\}$ 的傅里叶级数. 根据贝塞尔不等式 (15), 级数 $\sum\limits_k|x^k|^2$ 收敛. 根据毕达哥拉斯定理,

$$\|x^m e_m+\cdots+x^n e_n\|^2=|x^m|^2+\cdots+|x^n|^2.$$

根据级数收敛性的柯西准则, 这个等式右边部分, 对于充分大的 m 和 $n\geqslant m$ 能小于任意指定的 $\varepsilon>0$. 于是, 在这时有

$$\|x^m e_m+\cdots+x^n e_n\|<\sqrt{\varepsilon}.$$

因此, 一旦原空间 X 关于由范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ 诱导的距离完备, 傅里叶级数 $\sum\limits_k x^k e_k$ 就满足级数收敛性的柯西准则, 从而收敛.

为了书写简便, 我们只关于规范正交系对傅里叶级数进行了论证. 但所有论证对关于任意正交系下的傅里叶级数都是有效的.

傅里叶系数的极值性质

现在证明, 如果向量 $x\in X$ 关于规范正交系 $\{e_k\}$ 的傅里叶级数 $\sum\limits_k x^k e_k=\sum\limits_k\langle x,e_k\rangle e_k$ 收敛于 $x_e\in X$, 则正是这个 x_e, 在由 $\{e_k\}$ 张成的空间 L 的一切向量 $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ 中, 是最近似于向量 x 的, 亦即, 对一切 $y\in L$, 成立

$$\|x-x_e\|\leqslant\|x-y\|,$$

而且该式中的等号仅在 $y=x_e$ 时成立.

事实上, 根据垂线引理和毕达哥拉斯定理, 有

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|(x-x_e)+(x_e-y)\|^2 = \|h+(x_e-y)\|^2 \\ &= \|h\|^2+\|x_e-y\|^2 \geqslant \|h\|^2 = \|x-x_e\|^2.\end{aligned}$$

例 9 稍微离开一下我们的主要目标 —— 关于正交系的展开. 假定, 在 X 中任意给定了一组线性无关的向量 $x_1,\cdots,x_n$, 要寻找这组向量的线性组合 $\sum\limits_k^n \alpha_k x_k$ 使其为给定向量 $x\in X$ 的最佳逼近. 由于在由向量 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的空间 L 内, 用正交化方法能构造一个规范化正交组 $e_1,\cdots,e_n$, 使它也生成 L, 所以, 根据傅里叶系数的极值性质可得, 存在唯一的向量 $x_l\in L$ 使 $\|x-x_l\| = \inf\limits_{y\in L}\|x-y\|$. 由于向量 $h=x-x_l$ 与 L 正交, 从等式 $x_l+h=x$ 得到未知向量 x_l 关于向量组 $x_1,\cdots,x_n$ 的展开式 $x_l=\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k x_k$ 的系数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 所满足的方程组如下:

$$\begin{cases}\langle x_1,x_1\rangle\alpha_1+\cdots+\langle x_n,x_1\rangle\alpha_n = \langle x,x_1\rangle, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle x_1,x_n\rangle\alpha_1+\cdots+\langle x_n,x_n\rangle\alpha_n = \langle x,x_n\rangle.\end{cases} \tag{18}$$

这个方程组的解的存在性和唯一性从 x_l 的存在性和唯一性推出. 根据格拉姆定理, 由此得到, 这个方程组的行列式不等于零. 换句话说, 我们顺便证明了, 线性无关向量组的格拉姆行列式不等于零.

这个逼近问题和相应的方程组 (18), 我们已经指出过, 出现在, 譬如, 根据高斯的最小二乘法 (也可参看练习 1) 对实验数据的处理中..

c. 完全正交系与帕塞瓦尔等式

定义 7 赋范空间 X 中的向量组 $\{x_\alpha;\alpha\in A\}$ 叫做关于集合 $E\subset X$ 是完全的(或在 E 中完全), 如果任意的向量 $x\in E$ 都能在空间 X 的范数意义下以任意精确度用该向量组中向量的有限线性组合逼近.

如果用 $L(x_\alpha)$ 表示该向量组在 X 中的线性包 (亦即该向量组中向量的一切有限线性组合的全体所成之集), 则定义 7 可以改述如下:

向量组 $\{x_\alpha\}$ 关于集合 $E\subset X$ 完全, 如果 E 包含在该向量组的线性包的闭包 $\overline{L}(x_\alpha)$ 中.

例 10 如果 $X=E^3$, 而 e_1,e_2,e_3 是 E^3 的基底, 则向量组 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 在 X 中完全, 而向量组 $\{e_1,e_2\}$ 在 X 中不完全, 但关于集合 $L\{e_1,e_2\}$ 或它的子集 E 完全.

例 11 把函数序列 $1,x,x^2,\cdots$ 看做是向量空间 $\mathfrak{R}_2([a,b],\mathbb{R})$ 或 $\mathfrak{R}_2([a,b],\mathbb{C})$ 中的一个向量组 $\{x^k;k=0,1,2,\cdots\}$. 记 $C[a,b]$ 是连续函数子空间. 那么, 这个向量组关于集合 $C[a,b]$ 是完全的.

◀ 事实上, 对任何 $f \in C[a,b]$ 和 $\varepsilon > 0$, 根据魏尔斯特拉斯定理, 存在代数多项式 $P(x)$ 使 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-P(x)| < \varepsilon$. 但由此可得

$$\|f-P\| := \sqrt{\int_a^b |f-P|^2(x)dx} < \varepsilon\sqrt{b-a},$$

从而, 用向量组 $\{x^k; k=0,1,2,\cdots\}$ 中的函数的有限线性组合可在空间 $\mathfrak{R}_2([a,b],\mathbb{R})$ 或 $\mathfrak{R}_2([a,b],\mathbb{C})$ 的范数意义下任意精确地逼近函数 f. ▶

我们指出, 在该例中, 与在例 10 的情况不同, 并非 $C[a,b]$ 中的每个连续函数都是上述向量组中的元的有限线性组合, 而仅仅是能用这种线性组合逼近. 因此, 在空间 $\mathfrak{R}_2([a,b],\mathbb{R})$ (或 $\mathfrak{R}_2([a,b],\mathbb{C})$) 的范数意义下成立 $C[a,b] \subset \overline{L}\{x^n\}$.

例 12　如果从函数组 $\{1, \cos kx, \sin kx; k\in\mathbb{N}\}$ 中拿走一个函数, 譬如 1, 那么, 所得的函数组 $\{\cos kx, \sin kx; k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ 或 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ 中将不再是完全的.

◀ 事实上, 根据傅里叶系数的极值性质, 在长度为 n 的所有线性组合

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

中, 只有其系数 a_k 和 b_k 是函数 $f(x)\equiv 1$ 关于正交组 $\{\cos kx, \sin kx; k\in\mathbb{N}\}$ 的傅里叶系数时, $T_n(x)$ 给出函数 $f(x)\equiv 1$ 的最佳逼近. 然而, 根据关系式 (5), 该最佳逼近多项式应为零多项式. 因此,

$$\|1-T_n\| \geqslant \|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1dx} = \sqrt{2\pi} > 0,$$

从而, 用该函数组的函数的线性组合逼近 $f(x)\equiv 1$ 的误差不可能小于等于 $\sqrt{2\pi}$. ▶

定理 (正交系完全性条件)

设 X 是具内积 $\langle,\rangle$ 的线性空间, 而 $l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$ 是 X 中有限或可数多个非零的相互正交的向量. 那么, 以下诸条件彼此等价:

a) *向量组 $\{l_k\}$ 关于集合 $E\subset X$*[①] *完全;*

b) *对任何向量 $x\in E\subset X$ 成立 (傅里叶级数) 展开式*

$$x = \sum_k \frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle} l_k; \tag{19}$$

①特别地, 集合 E 可能因各种不同的兴趣的原因只由一个向量组成.

c) 对任何向量 $x \in E \subset X$ 成立 (帕塞瓦尔[①]) 等式

$$\|x\|^2 = \sum_k \frac{|\langle x, l_k\rangle|^2}{\langle l_k, l_k\rangle}. \tag{20}$$

对于规范正交系 $\{e_k\}$, 等式 (19) 和 (20) 有特别简单的形式:

$$x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k \tag{19'}$$

和

$$\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2. \tag{20'}$$

这样一来, 重要的帕塞瓦尔等式 (20) 或 (20′), 实际就是用傅里叶系数的术语写出的毕达哥拉斯定理.

现在来证明上边叙述的定理.

◀ a) ⇒ b) 根据傅里叶系数的极值性质;

b) ⇒ c) 根据毕达哥拉斯定理;

c) ⇒ a) 因为由垂线引理 (参看 b 段), 根据毕达哥拉斯定理得

$$\left\|x - \sum_{k=1}^n \frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle} l_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \left\|\sum_{k=1}^n \frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle} l_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|\langle x, l_k\rangle|^2}{\langle l_k, l_k\rangle}. \blacktriangleright$$

注　我们指出, 从帕塞瓦尔等式可推出正交系关于集合 $E \subset X$ 完全的如下简单必要条件: 在 E 中不存在非零的与该正交系中的向量都正交的向量.

作为对上述定理和注的有益的补充, 我们来证明以下一般

命题　设 X 是具内积 $\langle , \rangle$ 的线性空间, 而 $x_1, x_2, \cdots$ 是 X 中的线性无关向量组. 为使向量组 $\{x_k\}$ 在 X 中是完全的,

a) 必须在 X 中不存在非零的与 $\{x_k\}$ 中所有向量都正交的向量;

b) 在 X 是完备空间的情形 (即是希尔伯特空间的情形), 只需在 X 中不存在非零的与 $\{x_k\}$ 中所有向量都正交的向量.

◀ a) 如果向量 h 正交于向量组 $\{x_k\}$ 中所有向量, 那么, 根据毕达哥拉斯定理, 对任何线性组合 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, 得

$$\left\|h - \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right\|^2 = \|h\|^2 + \left\|\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right\|^2 \geqslant \|h\|^2$$

[①] 帕塞瓦尔 (M. A. Parseval) (1755—1836) 是法国数学家, 他在 1799 年对三角函数系发现了这个关系式.

因此, 如果 $\{x_k\}$ 是完全的, 则 $\|h\| = 0$.

b) 利用正交化手续, 从向量系 $\{x_k\}$ 得规范正交向量系 $\{e_k\}$, 它的线性包 $L\{e_k\}$ 与原向量系 $\{x_k\}$ 的线性包 $L\{x_k\}$ 一致.

现在任取向量 $x \in X$. 由于空间 X 完备, 向量 x 关于向量系 $\{e_k\}$ 的傅里叶级数收敛于某个向量 $x_e \in X$. 根据垂线定理, 向量 $h = x - x_e$ 正交于空间 $L\{e_k\} = L\{x_k\}$. 根据假设条件, 应有 $h = 0$. 因此,$x = x_e$, 从而,x 的傅里叶级数收敛于 x 本身. 这样一来, 向量 x 可用 $\{e_k\}$ 中的向量的有限线性组合以任意精度逼近, 从而也可用 $\{x_k\}$ 中的向量的有限线性组合以任意精度逼近. ▶

在这个命题的 b) 中, 空间的完备性条件是本质的, 这从下例可以看出.

例 13 考察满足 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(a^j)^2 < \infty$ 的一切实数序列 $a = (a^1, a^2, \cdots)$ 构成的空间 l_2(参看第 10 章 §1).l_2 中的向量 $a = (a^1, a^2, \cdots)$ 和 $b = (b^1, b^2, \cdots)$ 的内积以通常方式定义: $\langle a, b\rangle := \sum\limits_{j=1}^{\infty} a^j b^j$.

考察 l_2 中的规范正交系 $e_k = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{k}, 1, 0, 0, \cdots.), k = 1, 2, \cdots$, 其中不包括向量 $e_0 = (1, 0, 0, \cdots)$. 把向量 $e = \{1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, \cdots\}$ 补充到 $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ 中并考察所有这些向量的线性包 $L\{e, e_1, e_2, \cdots\}$. 可把这个线性包看做是一个线性空间 X(l_2 的子空间), 且有在 l_2 中取的内积.

我们注意到, 向量 $e_0 = (1, 0, 0, \cdots)$ 显然不能用向量系 $e, e_1, e_2, \cdots$ 中的有限多个向量的线性组合表示, 因此, 它不在 X 中. 但同时, 它又能用这样的有限线性组合在 l_2 中以任意精度逼近, 这是因为,

$$e - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} e_k = (1, 0, \cdots, 0, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \cdots).$$

这就是说, 我们同时查明,X 在 l_2 中不是闭的 (因此,X 与 l_2 不同, 它不是完备距离空间), 但它在 l_2 中的闭包与 l_2 重合, 这是因为向量组 $e_0, e_1, e_2, \cdots$ 生成整个空间 l_2.

将会看到, 在 $X = L\{e, e_1, e_2, \cdots\}$ 中不存在与所有向量 $e_1, e_2, \cdots$ 都正交的非零向量.

事实上, 假若 $x = \alpha e + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in X$ 满足 $\langle x, e_k\rangle = 0 (k = 1, 2, \cdots)$, 则 $\langle x, e_{n+1}\rangle = \dfrac{\alpha}{2^{n+1}} = 0$, 从而,$\alpha = 0$. 而这时又有 $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle = 0 (k = 1, 2, \cdots)$. 所以, $x = 0$.

因此, 我们已经构造出了所需要的例子: 具有内积的线性空间 X 及其线性无关向量组 $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ 满足上述命题的 b) 中除 X 完备的其他条件, 然而,$\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ 在 X 中不完全, 因为 $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ 在 l_2 中不完全且 X 在 l_2 中的闭包与 l_2 一致.

当然, 我们所研究的这个例子是典型的无穷维例子. 图 103 是对构造上例的过程的直观说明.

我们注意到, 在无穷维情形 (这正是分析特有的情况), 一个向量组, 能否用它当中的向量的线性组合以任意给定的精度逼近空间中的向量, 以及, 能否按这个向量组把空间中的向量展开成级数, 一般说来, 是向量组的两种不同的性质.

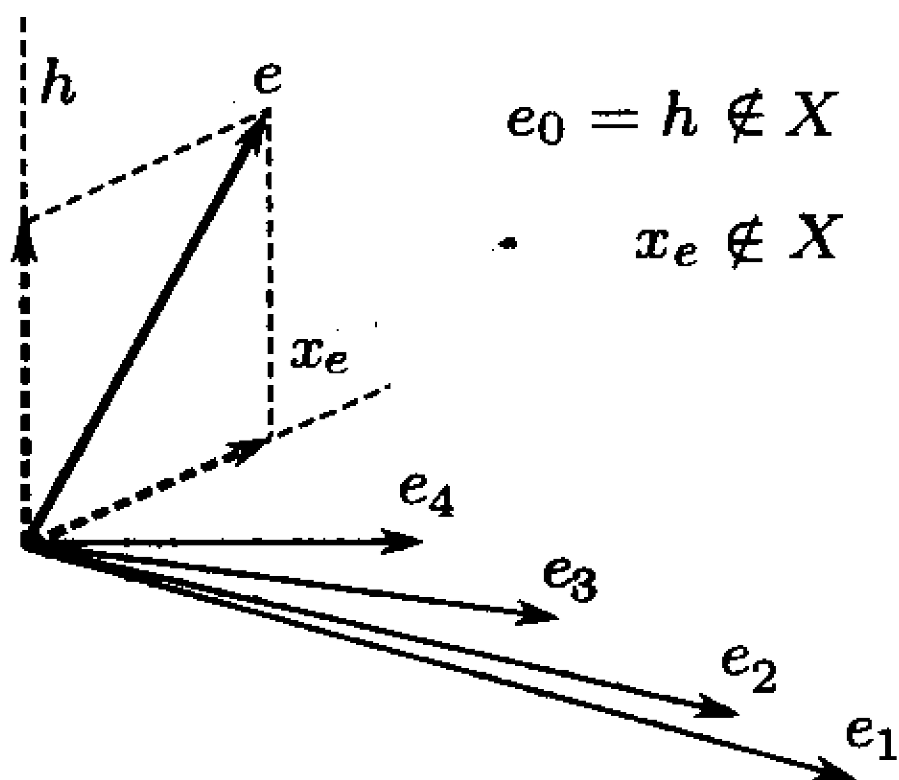


图 103

这个问题的讨论和下面的例 14 彻底阐明了正交系和傅里叶级数的特殊作用, 对于它们, 这两种性质是同时成立或不成立的 (上边证明了的定理说明了这一点).

定义 8 称线性赋范空间 X 的向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ **是空间的基**, 如果它的任何有限子组中的向量线性无关, 而且, 任意向量 $x \in X$ 都能表示成 $x = \sum\limits_k \alpha_k x_k$ 的形式, 其中 α_k 是取自 X 的数域中的系数, 而 (当无限和情形) 收敛性是依空间 X 中的范数收敛.

向量组的完全性与它是否作成空间的基有什么关系呢?

在有限维空间 X 中, 向量组在 X 中的完全性, 从紧性和连续性的论述中可以看出, 它显然等价于该向量组是 X 的基. 而在无穷维性, 一般说来, 并非如此.

例 14 把闭区间 $[-1,1]$ 上的实值连续函数的集合 $C([-1,1],\mathbb{R})$ 看作具有由公式 (3) 定义通常内积的数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 我们用符号 $C_2([-1,1],\mathbb{R})$ 表示这个空间, 并研究其中的线性无关向量组 $1, x, x^2, \cdots$.

这个向量组在空间 $C_2([-1,1],\mathbb{R})$ 中完全 (参看例 11), 但不是空间的基.

◄ 首先证明, 如果级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ 在 $C_2([-1,1],\mathbb{R})$ 中, 亦即在闭区间 $[-1,1]$ 上按均方意义收敛, 那么, 它作为幂级数在开区间 $]-1,1[$ 上逐点收敛.

事实上, 根据级数收敛的必要条件, 当 $k \to \infty$ 时有 $\|\alpha_k x^k\| \to 0$. 但是,

$$\|\alpha_k x^k\|^2 = \int_{-1}^{1} (\alpha_k x^k)^2 dx = \alpha_k^2 \frac{2}{2k+1}.$$

因此, 对足够大的 k 有 $|\alpha_k| < \sqrt{2k+1}$. 在这种情况下, 幂级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ 在开区间 $]-1,1[$ 上显然是收敛的.

现在用 φ 表示这个幂级数在开区间 $]-1,1[$ 上的和. 我们注意到, 在每个闭区间 $[a,b] \subset]-1,1[$ 上, 幂级数一致收敛于 $\varphi|_{[a,b]}$, 从而也在均方意义下收敛.

由此得到, 如果在闭区间 $[-1,1]$ 上连续的函数 f 是这个级数在空间 $C_2([-1,1];\mathbb{R})$ 中收敛意义下的和, 则 f 和 φ 在 $]-1,1[$ 上重合. 但函数 φ 是无穷次可微的. 因

此, 如果在空间 $C_2([-1,1],\mathbb{R})$ 中取任一个不在 $]-1,1[$ 上无穷次可微的函数, 那么, 它就不可能在这个空间中关于函数系 $\{x^k; k=0,1,\cdots\}$ 展成级数. ►

于是, 譬如取函数 $f(x)=|x|$ 和数列 $\{\varepsilon_n=\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}\}$, 则可构造一个由 $\{x^k; k=0,1,\cdots\}$ 的元的有限线性组合 $P_n(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n$ 组成的序列 $\{P_n(x): n\in\mathbb{N}\}$, 使 $\|f-P_n\|<\frac{1}{n}$, 亦即当 $n\to\infty$ 时 $P_n\to f$. 如果必要, 在每一个这样的线性组合 $P_n(x)$ 中还可认为其系数造成唯一最优的了 (参看例 9). 虽然如此, 这时也不可能成立 $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$, 这是因为, 从 $P_n(x)$ 到 $P_{n+1}(x)$, 变化的不只是最后一个系数 α_{n+1}, 所有前边的系数 $\alpha_0,\cdots,\alpha_n$ 都可能变化.

而对正交系, 这种情况就不会发生 ($\alpha_0,\cdots,\alpha_n$ 不变), 根据傅里叶系数的极值性质可以证明这一点.

例如, 可把单项式系 $\{x^k\}$ 化成勒让德正交多项式系, 再把 $f(x)=|x|$ 关于这个正交系展成傅里叶级数.

*3. 分析中正交函数系的一个重要来源

现在略为说明各种正交函数系在具体问题中是老样出现的, 关于这些函数系的傅里叶级数又是怎样产生的.

例 15 傅里叶方法

设区间 $[0,l]\subset\mathbb{R}$ 是弹性弦的平衡位置, 弦在区间的两端点固定, 而其他部分是自由的, 可以在平衡位置附近做小的横振动. 设 $u(x,t)$ 描述这些振动的函数, 亦即在每个确定的时刻 $t=t_0$, 函数 $u(x,t_0)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant l$ 上的图像给出了弦在时刻 t_0 的形状. 特别地, 在任意时刻 t, 有 $u(0,t)=u(l,t)=0$, 因为弦的端点是固定的.

我们知道 (参看第 14 章 §4), 函数 $u(x,t)$ 满足所谓弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{21}$$

这里正系数 a 依赖于弦的密度和弹性模量.

当然, 由一个方程 (21) 不足以确定函数 $u(x,t)$. 根据经验我们知道, 一旦给定了, 譬如, 弦在某一时刻 $t=0$(我们称它为初始时刻) 的位置 $u(x,0)=\varphi(x)$ 和弦的每一点在这个时刻的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$, 就单值地确定了运动 $u(x,t)$. 例如, 我们把弦拉成 $\varphi(x)$ 的形状, 再把它松开, 则 $\psi(x)\equiv 0$.

这样, 在区间 $[0,l]$ 两端固定的弦的自由振动问题[①] 归结为求方程 (21) 的满足边界条件

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \tag{22}$$

和初始条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x) \tag{23}$$

① 我们指出, 弦振动的开创性数学研究是由波鲁克 · 泰勒 (B. Taylor) 做的.

的解 $u(x,t)$.

有一个相当自然的求解这类问题的程序, 在数学里叫做*分离变量方法*或*傅里叶方法*. 它的做法如下: 在形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$ 的级数中寻求解 $u(x,t)$, 这个级数的诸项有特别的形式 $X(x)T(t)$ (分离变量形式), 且是给定方程的满足边界条件的解. 在我们的情形, 将会看到, 这等价于把振动 $u(x,t)$ 分解成最简单的调和振动的和 (准确地说, 是分解成驻波的和).

事实上, 如果函数 $X(x)T(t)$ 满足方程 (21), 则 $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$, 即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(t)}{X(t)}. \tag{24}$$

在方程 (24) 中, 独立变量 x 和 t 分别在等号两边出现 (被分离), 因此, 这两部分实际上应是同一个常数 λ. 如果再考虑到我们考察的特殊形式的解应当满足的边界条件 $X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$, 那么, 问题归结为在条件 $X(0)=X(l)=0$ 下解以下两个方程

$$T''(t)=\lambda a^2T(t), \tag{25}$$

$$X''(x)=\lambda X(x). \tag{26}$$

容易写出这两个方程各自的通解:

$$T(t)=A\cos\sqrt{\lambda}at+B\sin\sqrt{\lambda}at, \tag{27}$$

$$X(x)=C\cos\sqrt{\lambda}x+D\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{28}$$

如果试图使解满足条件 $X(0)=X(l)=0$, 那么, 当 $\lambda\neq 0$ 时*, 应有 $C=0$. 舍弃 $D=0$ 这种平凡情况后, 就得到 $\sin\sqrt{\lambda}l=0$, 由此, $\sqrt{\lambda}=\pm\dfrac{n\pi}{l}, n\in\mathbb{N}$.

这样一来, 方程 (25),(26) 中的 λ 只能在特定的数集 $\{\lambda_n=(n\pi/l)^2; n\in\mathbb{N}\}$ 中取值, 这些数叫*问题的特征数*. 把这些 λ 值代入表达式 (27),(28), 得到一串特解

$$u_n(x,t)=\sin n\frac{\pi}{l}x\left(A_n\cos n\frac{\pi a}{l}t+B_n\sin n\frac{\pi a}{l}t\right), \tag{29}$$

它们满足边界条件 $u_n(0,t)=u_n(l,t)=0$(且描绘的是形如 $\Phi(x)\sin(\omega t+\theta)$ 的驻波, 其中每个点 $x\in[0,l]$ 都在做简谐振动, 各点有自己的振幅 $\Phi(x)$, 但所有点有同一个频率 ω).

数值 $\omega_n=n\dfrac{\pi a}{l}, n\in\mathbb{N}$, 由于自然的原因, 叫做弦的*固有频率*, 而简谐振动 (29) 叫做弦的固有振动. 振动 $u_1(x,t)$, 由于其固有频率最小, 叫做弦的*基音*, 而其他的固有振动 $u_2(x,t),u_3(x,t),\cdots$ 叫做*泛音*(正是泛音决定了乐器所发出的声音的色调, 叫做音色).

---

* 译者注. $\lambda=0$ 的情形应排除在外, 因为这时方程 (26) 没有满足条件 $X(0)=X(l)$ 的非平凡的解.

现在, 我们要把未知的振动 $u(x,t)$ 表示成给定的弦的固有振动的和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$. 这时, 边界条件 (22) 自动地满足, 只要考虑使它满足初始条件 (23) 的问题, 这意味着

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\frac{\pi}{l}x \tag{30}$$

和

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi a}{l} B_n \sin n\frac{\pi}{l}x. \tag{31}$$

这样一来, 问题就归结为求系数 A_n, B_n, 或者说归结为把函数 φ 和 ψ 关于在区间 $[0,l]$ 上的正交系 $\{\sin n\frac{\pi}{l}x; n\in\mathbb{N}\}$ 展成傅里叶级数.

值得注意, 从方程 (26) 产生出来的函数 $\sin n\frac{\pi}{l}x$ 可以看成线性算子 $A=\frac{d^2}{dx^2}$ 的本征向量, 与它相应的本征值是 $\lambda_n=n\frac{\pi}{l}$, 这里 $n\in\mathbb{N}$. 算子 A 作用在由 $C^{(2)}[0,l]$ 中一切在区间 $[0,l]$ 两端为零的函数所构成的函数空间上, 固有值正是来自这个条件. 因此, 等式 (30),(31) 可以解释作按给定的线性算子的本征向量展开.

与具体问题相联系的线性算子是分析中正交函数系的一个重要来源.

让我们回顾代数中的一个熟知的结果, 它揭示了这样的函数系有正交性的内在原因.

设 Z 是一个线性空间, 其中定义了内积 $\langle,\rangle$, 而 E 是 Z 的且在 Z 中稠密的子空间 (可以与 Z 重合). 称线性算子 $A: E\to Z$ 是对称的, 如果任意的向量 $x,y\in E$ 都满足等式 $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$. 那么: *对称算子的与不同的本征值对应的本征向量必正交.*

◀ 实际上, 如果 $Au=\alpha u, Av=\beta v$ 且 $\alpha\neq\beta$, 则

$$\alpha\langle u,v\rangle=\langle Au,v\rangle=\langle u,Av\rangle=\beta\langle u,v\rangle,$$

由此得到, $\langle u,v\rangle=0$. ▶

用这种观点考察一下例 4 是有益处的. 例 4 中本质上研究的是算子 $A=\left(\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\right)$ 的本征函数. 这个算子是作用在 $C^{(2)}[a,b]$ 中在区间 $[a,b]$ 的端点为 0 的那一类函数所构成的函数空间上. 利用分部积分可以证明, 在上述空间上这个算子 (关于标准的内积 (4)) 是对称的. 因此, 例 4 的结果是上述代数事实的具体表现.

特别地, 当 $q(x)\equiv 0, A$ 化做算子 $\frac{d^2}{dx^2}$, 在 $[a,b]=[0,l]$ 时, 它就是在最后的例 15 中所考察的情形.

我们还要指出, 在我们考察的例子中, 问题归结为函数 φ 和 ψ 按算子 $A=\frac{d^2}{dx^2}$ 的本征函数展开 (参看关系式 (30) 和 (31)). 在这里当然就产生了这样的展开在原则上是否可能的问题. 正如我们现在所了解的, 这个问题等同于所考察的算子在给定的函数空间中的本征函数系是否具有完全性的问题.

三角函数系 (以及其他一些具体的正交函数系) 在 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中的完全性, 看来是李雅普诺夫[①]首先以明显的形式证明的. 具体三角函数系中隐蔽形式的完全性问题在狄利克雷研究三角函数收敛性的著作中已经出现. 正如已经指出过的, 对于三角函数系, 与完全性等价的帕塞瓦尔等式早在18世纪末至19世纪初就被帕塞瓦尔发现. 正交系的完全性问题的一般提法以及它在数学物理问题中的应用是斯捷克洛夫[②]研究的一个重要课题, 他还把正交系的完全性 (封闭性) 这一概念引入数学. 正是在他研究完全性问题时, 极积地使用了积分平均方法 (光滑化方法) (参看第 17 章 §4, §5), 因此, 常称这个方法为*斯捷克洛夫平均方法*.

练　习

1. *最小二乘法.* 我们用实验来研究量 y 对量 $x_1,\cdots,x_n$ 的依赖关系 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$. 实验结果列于下表

x_1	x_2	$\cdots$	x_n	y
a_1^1	a_2^1	$\cdots$	a_n^1	b^1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_1^m	a_2^m	$\cdots$	a_n^m	b^m

在它的行里指出了参数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一组值 $(a_1^i,a_2^i,\cdots,a_n^i)$ 和与之相应的 y 的值 b^i, 它是用具有一定精确度的仪器测量得到的. 我们要根据这些实验数据求出一个便于计算的经验公式 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$. 这个未知的线性函数的系数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 应当选得使按经验公式所得的结果与实验中所得结果的均方差 $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}(b^k-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i^k)^2}$ 达到最小.

试把这个问题解释成用向量 $(a_i^1,\cdots,a_i^m), i=1,\cdots,n$ 的线性组合最佳逼近向量 $(b^1,\cdots,b^m)$ 的问题, 并证明问题能归结为求解形如 (18) 的线性方程组的问题.

2. a) 设 $C[a,b]$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数所构成的线性空间, 其中定义了在该区间上函数的一致收敛性度量, 而 $C_2[a,b]$ 还是这个线性空间, 但其中定义了在该区间上函数的均方差度量 (即 $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b|f-g|^2(x)dx}$). 试证: 函数在 $C[a,b]$ 中的收敛性蕴含它们在 $C_2[a,b]$ 中的收敛性, 但逆命题不成立, 而且空间 $C_2[a,b]$ 不完备, 这与空间 $C[a,b]$ 不同.

b) 说明为什么函数系 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 线性无关且在 $C_2[a,b]$ 中完全, 但不是这个空间的基底.

c) 说明勒让德多项式为什么是 $C_2[-1,1]$ 的一个完全正交系, 且是该空间的基底.

d) 求出 $\sin\pi x$ 在区间 $[-1,1]$ 按勒让德多项式系的傅里叶展开的前四项.

①李雅普诺夫 (А. М. Ляпунов) (1857—1918) 是俄国数学家和力学家, 切比雪夫学派的杰出代表, 运动稳定性理论的创始人. 他成功地从事了数学和力学的各邻域的研究.

②斯捷克洛夫 (В. А. Стеклов) (1864—1926) 是俄苏数学家, 切比雪夫创立的彼得格勒数学学派的代表, 苏联数学物理学派的奠基人. 俄罗斯科学院数学研究所是以他的名字命名的.

e) 试证: 第 n 个勒让德多项式在 $C_2[-1,1]$ 中的范数 $\|P_n\|$ 的平方等于

$$\frac{2}{2n+1}\left(=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!2^{2n}}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx\right).$$

f) 试证: 在一切最高次项的系数等于 1 的 n 次多项式中, 勒让德多项式 $\widetilde{P}_n(x)$, 按区间 $[-1,1]$ 上的平均意义, 偏离零最小.

g) 说明为什么任意函数 $f\in C_2([-1,1],\mathbb{C})$ 都满足等式

$$\int_{-1}^{1}|f|^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\frac{1}{2})\left|\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx\right|^2,$$

这里 $\{P_0,P_1,\cdots\}$ 是勒让德多项式系.

3. a) 试证: 如果向量系 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 在空间 X 中完全, 而空间 X 是空间 Y 的处处稠密的子空间, 则向量系 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 在 Y 中也完全.

b) 试证: 由区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数构成的线性空间 $C[a,b]$, 在 $\mathfrak{R}_2[a,b]$ 中是处处稠密的. (在第 17 章 §5 的练习 5g) 中证明了, 甚至对区间 $[a,b]$ 上一切具紧支集的无穷可微函数的集合这也是对的.)

c) 试利用魏尔斯特拉斯逼近定理证明: 三角函数系 $\{1,\cos kx,\sin kx;k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中完全.

d) 试证: 函数系 $\{1,x,x^2,\cdots\},\{1,\cos kx,\sin kx;k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[a,b]$ 中都完全, 但第一个不是这个空间的基底, 而第二个是.

e) 说明为什么任意的函数 $f\in\mathfrak{R}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 都满足 (帕塞瓦尔) 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2),$$

这里数 a_k,b_k 由公式 (9),(10) 确定.

f) 利用例 8 的结果证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}$.

4. **带权的正交性.**

a) 设 $p_0,p_1,\cdots,p_n$ 是区域 D 中的连续正函数. 试验证公式

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=0}^{n}\int_D p_k(x)f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)dx$$

在 $C^{(n)}(D,\mathbb{C})$ 中给出一个内积.

b) 试证: 当把 $\mathfrak{R}(D,\mathbb{C})$ 中两个仅在零测集上不同的函数等同后, 借助 D 中的正连续函数 p 可引入如下内积

$$\langle f,g\rangle=\int_D p(x)f(x)\bar{g}(x)dx.$$

这时称 p 是*权函数*. 如果 $\langle f,g\rangle=0$, 则称*函数 f 和 g 以 p 为权正交*.

c) 设 $\varphi: D \to G$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到区域 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的微分同胚, 又设 $\{u_k(y), k \in \mathbb{N}\}$ 是在标准内积 (2) 或 (3) 的意义下定义在 G 中的正交函数系. 试建立区域 D 中定义的以 $p(x) = |\det \varphi'(x)|$ 为权的正交函数系, 以及区域 D 中定义的通常内积意义下的正交函数系.

d) 试证: 函数系 $\{e_{m,n}(x,y) = e^{i(mx+ny)}; m, n \in \mathbb{N}\}$ 在矩形 $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ||x| \leqslant \pi \wedge |y| \leqslant \pi\}$ 上正交.

e) 试做一个函数系, 使它在二维环面 $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ 上正交. 这里的环面 T^2 是用第 12 章 §1 的例 4 中指出的参数方程给出的. 这时, 函数 f 和 g 在环面上的内积理解为曲面积分 $\int_{T^2} f\bar{g}d\sigma$.

5. a) 从代数学知道 (我们在条件极值理论中也顺便证明过), 每一个作用在 n 维欧几里德空间 E^n 中的对称算子 $A: E^n \to E^n$, 都有异于零的本征向量*. 这在无穷维情形, 一般是不对的.

试证: 乘以自变量的线性算子 $f(x) \mapsto xf(x)$ 是 $C_2([a,b],\mathbb{R})$ 中的对称算子, 但它没有非零本征向量.

b) **施图姆**[①]**– 刘维尔问题**常常出现在数学物理方程中. 这个问题要求求方程 $u''(x)+[q(x)+\lambda p(x)]u(x) = 0$ 在区间 $[a,b]$ 上, 满足某些边界条件, 例如 $u(a) = u(b) = 0$ 的不恒等于零的解.

函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知的, 在所考虑的区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $p(x) > 0$ 在 $[a,b]$ 上.

我们在例 15 中已经遇到过这种问题, 那里只需在条件 $X(0) = X(l) = 0$ 下解方程 (26), 其中 $q(x) \equiv 0, p(x) \equiv 1$ 以及 $[a,b] = [0,l]$. 我们确信, 施图姆 – 刘维尔问题一般只对某些特别的参数 λ 的值是可解的. 正是这个原因, 这种 λ 值叫**施图姆 – 刘维尔问题的本征值**.

试证: 如果函数 f 和 g 是施图姆 – 刘维尔问题的对应于本征值 $\lambda_f \neq \lambda_g$ 的解, 则在区间 $[a,b]$ 上成立等式 $\dfrac{d}{dx}(g'f - f'g) = (\lambda_f - \lambda_g)pfg$ 且函数 f, g 在 $[a,b]$ 上以 p 为权正交.

c) 我们知道 (参看第 14 章, §4), 在区间 $[a,b]$ 两端点固定的非均匀弦的微小振动可用方程 $(pu'_x)'_x = \rho u''_{tt}$ 描述, 这里 $u(x,t)$ 是在每个时刻 t 给出弦的形状的函数,$\rho = \rho(x)$ 是线密度, 而 $p = p(x)$ 是在点 $x \in [a,b]$ 的弹性系数. 固定条件即 $u(a,t) = u(b,t) = 0$.

试证: 如果求这个方程形如 $X(x)T(t)$ 的解, 则问题归结为方程组 $T'' = \lambda T, (pX')' = \lambda\rho X$, 其中 λ 在两方程中是同一个数.

这样一来, 关于函数 $X(x)$ 得到区间 $[a,b]$ 上的一个施图姆 – 刘维尔问题, 它只在参数 λ 取某些特定的值 (本征值) 时可解 (约定, $p(x) > 0$ 在 $[a,b]$ 上, 且 $p \in C^1[a,b]$. 利用变量替换 $s = \int_a^x \dfrac{d\xi}{p(\xi)}$ 可把方程 $(pX')' = \lambda\rho X$ 化成不包含一阶导数的形式.)

---

* 译者注,"异于零的本征向量"一语中的"异于零"是不需要的,它已包含在"本征向量"的定义之中了.本练习中的"对称算子 A"应假定是非零的

① 施图姆 (Sturm J.C.F) (1803—1855) 是法国数学家 (同时是彼得堡科学院的外国荣誉院士); 主要工作在解数学物理边值问题方面.

d) 试验证: 作用在由 $C^{(2)}[a,b]$ 中满足条件 $u(a)=u(b)=0$ 的函数所构成的空间上的算子 $S(u)=(p(x)u'(x))'-q(x)u(x)$ 在该空间上是对称的 (亦即 $\langle Su,v\rangle=\langle u,Sv\rangle$, 这里 $\langle,\rangle$ 是实函数的标准的内积). 再验证: 算子 S 的与不同本征值对应的本征函数必正交.

e) 试证: 设 X_1 和 X_2 是方程 $(pX')'=\lambda\rho X$ 的对应于参数 λ 的不同的值 λ_1,λ_2, 且在区间的端点等于零的解, 则它们在 $[a,b]$ 上以 $\rho(x)$ 为权正交.

6. *作为本征函数的勒让德多项式.*

a) 利用例 5 中的勒让德多项式 $P_n(x)$ 的表达式以及等式 $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, 证明 $P_n(1)=1$.

b) 对等式 $(x^2-1)\dfrac{d}{dx}(x^2-1)^n=2nx(x^2-1)$ 求微分, 试证 $P_n(x)$ 满足方程

$$(x^2-1)\cdot P_n''(x)+2x\cdot P_n'(x)-n(n+1)P_n(x)=0.$$

c) 试验证算子

$$A:=(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}\right]$$

在空间 $C^2[-1,1]\subset\mathfrak{R}_2[-1,1]$ 上的对称性, 并根据关系式 $A(P_n)=n(n+1)P_n$ 说明勒让德多项式的正交性.

d) 试利用系 $\{1,x,x^2,\cdots\}$ 在 $C^2[-1,1]$ 中的完全性证明: 算子 A 的与本征值 $\lambda=n(n+1)$ 对应的本征空间的维数不超过 1.

e) 试证: 算子 $A=\dfrac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}\right]$ 在 $C^2[-1,1]$ 中没有不包含在勒让德多项式系 $\{P_0(x), P_1(x),\cdots\}$ 中的本征函数, 也没有与一切数 $n(n+1)(n=0,1,2,\cdots)$ 不同的本征值.

7. *球函数*

a) 在求解 $\mathbb{R}^3$ 中许多问题 (例如, 与拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 有关的位势理论问题) 时, 常寻求由它的特解构成的级数形式的解. 方程 $\Delta u=0$ 的 n 次齐次多项式 $S_n(x,y,z)$ 特解叫做*调和多项式*. 显然, 在球坐标系 (γ,φ,θ) 中, 调和多项式具有 $r^nY_n(\theta,\varphi)$ 的形式. 这样产生的 $Y_n(\theta,\varphi)$ 只依赖于球面坐标 $0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, 叫做*球函数*.(Y_n 由条件 $\Delta S_n=0$ 确定, 是具 $2n+1$ 个自由系数, 是两个自变量的三角多项式.)

试利用格林公式证明: 当 $m\neq n$ 时, 函数 Y_m, Y_n 在 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面上正交 (在内积 $\langle Y_m,Y_n\rangle=\iint Y_m\cdot Y_n d\sigma$ 的意义下, 这里面积分是展布在球面 $r=1$ 上的).

b) 从勒让德多项式出发还能引进多项式 $P_{n,m}(x)=(1-x^2)^{m/2}.\dfrac{d^mP_n}{dx^m}(x), m=1,2,\cdots,n$考察函数

$$P_n(\cos\theta), P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi, P_{n,m}(\sin\theta)\sin m\varphi. \qquad (*)$$

我们发现, 指标为 n 的任意球函数 $Y_n(\theta,\varphi)$ 是这些函数的线性组合. 试利用这个事实, 并注意三角函数系的正交性, 证明: 函数系 (*) 是由指标是 n 的球函数构成的 $(2n+1)$ 维空间的一个正交基.

8. *埃尔米特多项式.* 在量子力学中当研究线性振荡器方程时, 必须考察具有内积 $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}fg dx$ 的函数类 $C^{(2)}(\mathbb{R})\subset\mathfrak{R}_2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 以及特殊函数 $H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), n=0,1,2,\cdots$.

a) 试证:$H_0(x)=1, H_1(x)=2x, H_2(x)=4x^2-2$.

b) 试证:$H_n(x)$ 是 n 次多项式. 函数系 $\{H_0(x), H_1(x), \cdots\}$ 叫埃尔米特多项式系.

c) 试验证: 函数 $H_n(x)$ 满足方程 $H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$.

d) 函数 $\psi_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x)$ 叫埃尔米特函数. 试证:$\psi_n''(x)+(2n+1-x^2)\psi_n(x)=0$, 且当 $x\to 0$ 时有 $\psi_n(x)\to 0$.

e) 试验证: 当 $m\neq n$ 时有 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\psi_m dx=0$.

f) 试证: 埃尔米特多项式在 $\mathbb{R}$ 上以 e^{-x^2} 为权正交.

9. 切比雪夫－拉盖尔①多项式$\{L_n(x); n=0,1,2,\cdots\}$ 可用公式 $L_n(x):=e^x\dfrac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}$ 定义.

试验证:

a) $L_n(x)$ 是 n 次多项式:

b) 函数 $L_n(x)$ 满足方程

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0;$$

c) 切比雪夫－拉盖尔多项式系 $\{L_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 在半直线 $[0,+\infty[$ 上以 e^{-x} 为权正交.

10. 切比雪夫多项式$\{T_0(x)\equiv 1, T_n(x)=2^{1-n}\cos n(\arccos x); n\in\mathbb{N}\}$ 当 $|x|<1$ 时可由公式

$$T_n(x)=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

给出.

试证:

a) $T_n(x)$ 是 n 次多项式;

b) $T_n(x)$ 满足方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0;$$

c) 切比雪夫多项式系 $\{T_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 在开区间 $]-1,1[$ 上以 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 为权正交.

11. a) 在概率论和函数论中遇到下述拉德马赫②函数系$\{\psi_n(x)=\varphi(2^nx); n=0,1,2,\cdots\}$, 这里 $\varphi(t)=\mathrm{sgn}(\sin 2\pi t)$. 试验证: 它是区间 $[0,1]$ 上的一个正交系.

b) 哈尔③函数系$\{\chi_{n,k}(x)\}$, 其中 $n=0,1,2,\cdots$; 而 $k=1,2,2^2,\cdots$, 由关系式

$$\chi_{n,k}(x)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}},\\ -1, & \text{如果 } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k}{2^{n+1}},\\ 0, & \text{在其他 } [0,1] \text{ 的点}\end{cases}$$

①拉盖尔(E.N.Laguerre)(1834—1886) 是法国数学家.

②拉德马赫 (Rademaher, H)(1892—1969) 是德国 (从 1936 年开始是美国) 数学家.

③哈尔 (Haar, A)(1885—1933) 是匈牙利数学家.

给出.

试验证哈尔函数系在区间 $[0,1]$ 上的正交性.

12. a) 试证: 任意的具内积的 n 维实向量空间与具同样维数的算术欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 等距同构.

b) 我们记得, 称一个度量空间是可分的, 如果其中有可数的处处稠密子集. 试证: 如果具内积的线性空间作为度量空间 (其中定义由内积诱导出的距离) 可分, 那么, 它有可数规范正交基.

c) 设 X 是可分希尔伯特空间 (即 X 是可分的完备度量空间, 且其度量是由 X 中的内积导出的). 在 X 中取规范正交基 $\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$, 构造映射 $X \ni x \longmapsto (c_1, c_2, \cdots)$, 这里 $c_i = \langle x, e_i \rangle$ 是向量 x 关于基 $\{e_i\}$ 的傅里叶展开的系数. 试证: 这个映射是 X 到空间 l_2(在例 14 中研究过它) 上的线性、等距的双射.

d) 利用图 103 指出构造例 14 的基本思想是什么, 并说明为什么它恰与所研究的空间的无限维性密切相关.

e) 试说明怎样在函数空间 $C[a,b] \subset \mathfrak{R}_2[a,b]$ 中构造类似的例子.

§2 傅里叶三角级数

1. 经典傅里叶级数收敛性的基本形式

a. 三角级数和傅里叶三角级数

经典的三角级数是形如①

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{1}$$

的级数, 它是以三角函数系 $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}\}$ 为基础得到的. 这里的系数 $\{a_0, a_k, b_k; k \in \mathbb{N}\}$ 是实数或复数. 三角级数 (1) 的部分和是 n 次三角多项式

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{2}$$

如果级数 (1) 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛, 那么它的和 $f(x)$ 显然是 2π- 周期函数. 它完全由它在任何一个长为 2π 的区间上的限制所确定.

反之, 如果给定了 $\mathbb{R}$ 上的一个 2π- 周期函数 (振动, 信号等等), 而我们希望把它展成一些典型周期函数的和, 那么, 为此目的首先考虑到的就是最简单的 2π- 周期函数 $\{1, \cos kx, \sin kx, k \in \mathbb{N}\}$, 它们表示多倍频率的简谐振动.

①把自由项写成 $a_0/2$ 的形式, 这对傅里叶级数是一个方便的写法, 但在这里不是必须的.

假定能把连续函数 $f(x)$ 表示成一致收敛于它的三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx, \tag{3}$$

则展开式 (3) 中的系数能容易且完全单值地求出.

在这种情形, 依次用函数系 $\{1,\cos kx,\sin kx;k\in\mathbb{N}\}$ 中的每个函数乘等式 (3), 对所得的一致收敛级数做分部积分, 并注意到关系式

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0, \text{当 } m\neq n, m,n\in\mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nxdx=0, m,n\in\mathbb{N};^*$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi, n\in\mathbb{N},$$

即可求出函数 f 展成的三角级数 (3) 的系数

$$a_k=a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx, k=0,1,\cdots \tag{4}$$

$$b_k=b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx, k=1,2,\cdots. \tag{5}$$

当把 (3) 看做向量 $f\in\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ 按正交系 $\{1,\cos kx,\sin kx;k\in\mathbb{N}\}$ 的傅里叶展开时, 我们得到就是现在这些系数. 这并不奇怪, 因为从级数 (3) 的一致收敛性当然地能得到它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的平均收敛性, 从而级数 (3) 的系数应是函数 f 按所考察的正交系的傅里叶系数 (参看 §1).

定义 1　对于函数 f, 如果积分 (4),(5) 有意义, 则与 f 相对应的三角级数

$$f\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx \tag{6}$$

叫做函数 f 的*傅里叶三角级数*.

因为在这一节除傅里叶三角级数外不研究其他的傅里叶级数, 所以, 为简单起见, 我们有时省略 "三角" 一词, 而简单地说: "函数 f 的傅里叶级数".

我们基本上只涉及函数类 $\mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中, 或稍广一些, 其模的平方在开区间 $]-\pi,\pi[$ 上 (至少在反常积分意义下) 可积的函数, 仍然使用从前的符号 $\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ 表示这些函数构成的线性空间, 并在其中定义标准内积

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f\bar{g}dx. \tag{7}$$

* 译者注. 原著漏写该式.

对任何函数 $f \in \mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 都成立的贝塞尔不等式

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)dx \tag{8}$$

这说明远非每个三角级数 (1) 都是某个函数 $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 的傅里叶级数.

例 1 我们知道 (参看第 16 章 §2 例 7), 三角级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}},$$

在 $\mathbb{R}$ 上是收敛的, 但它不是任何函数 $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 的傅里叶级数, 因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ 是发散的.

因此, 这里将要研究的不是任意的三角级数 (1), 而是 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中的函数, 以及在 $]-\pi,\pi[$ 上绝对可积函数类中的函数的傅里叶级数 (6).

b. 傅里叶三角级数的平均收敛性

设

$$S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx \tag{9}$$

是函数 $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 的傅里叶级数的前 n 项部分和. S_n 对 f 的偏离既可用空间 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 的由内积 (7) 诱导出的自然距离, 即 S_n 和 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的均方差

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^2(x)dx} \tag{10}$$

来度量, 又可按在这个区间上的逐点收敛意义度量.

对任意的傅里叶级数, 第一种收敛性在 §1 中已经研究过. 那里得到的结果对傅里叶三角级数的具体使用性, 首先与三角函数系 $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ 在 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中完全性有关 (这一点已在 §1 中指出, 并将在本节第 4 段中独立地给以证明).

因此, 从 §1 的基本定理, 在现在情形下, 可以断言, 成立以下定理:

定理 1 (傅里叶三角级数的平均收敛性) *任意函数 $f \in \mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 的傅里叶级数 (6) 在平均意义 (10) 下收敛于它自己, 即*

$$f(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=\!=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx,$$

并且成立帕塞瓦尔等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)dx = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2. \tag{11}$$

我们将常常使用更加紧凑的三角多项式和三角级数的复形式, 它基于欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x, \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$. 利用这些公式, 傅里叶级数的部分和 (9) 可以写成

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{9'}$$

的形式, 而傅里叶级数 (6) 本身可以写成

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{6'}$$

的形式, 这里

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{如果 } k > 0, \\ \frac{1}{2}a_0, & \text{如果 } k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{如果 } k < 0, \end{cases} \tag{12}$$

即

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx, k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

就是说, c_k 正是函数 f 关于函数系 $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ 的傅里叶系数.

我们注意到, 傅里叶级数 (6′) 的可和性即是和式 (9′) 的收敛性.

在这种紧凑的形式下, 定理 1 成为: 对于任何 $f \in \mathfrak{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, 有

$$f(x) \underset{\mathfrak{R}_2}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

和

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{14}$$

c. 傅里叶级数的逐点收敛性

定理 1 完全解决了傅里叶级数 (6) 平均收敛的问题, 即按空间 $\mathfrak{R}_2[-\pi, \pi]$ 的范数收敛的问题. 本节余下的部分主要是研究傅里叶三角级数逐点收敛的条件和特征. 我们将只考察这个问题的最简单的方面. 三角级数逐点收敛性的研究通常是非常精细的. 尽管在欧拉、傅里叶和黎曼之后, 傅里叶级数一直在函数论中占着传统的中心地位, 但至今对那些能用逐点收敛三角级数表示的函数所构成的函数类还没有一个本质的描述 (黎曼问题). 直到不久以前, 甚至还不知道, 连续函数的傅里叶级数是否一定几乎处处收敛于它自己 (这时,处处收敛性可能不成立已经知道). 当时, A.

H. 柯尔莫哥洛夫[1] 甚至曾构造出了 $L[-\pi,\pi]$ 中其傅里叶级数处处发散的例子 (这里 $L[-\pi,\pi]$ 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上勒贝格可积的函数空间, 它可由 $\mathfrak{R}[-\pi,\pi]$ 按 $L[-\pi,\pi]$ 的距离完备化得到), 而 Д. Е. 梅尼绍夫[2] 构造了一个三角级数 (1), 它有非零系数且几乎处处收敛于零 (**梅尼绍夫零级数**). Н. Н. 鲁金[3]提出了这样一个问题 (**鲁金问题**): 任意函数 $f \in L_2[-\pi,\pi]$ 的傅里叶级数是否必定几乎处处收敛 (这里 $L_2[-\pi,\pi]$ 是 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 的距离完备化). 这个问题是 1966 年才由 L. 卡尔松[4]解决的, 答案是肯定的. 特别地, 从 L. 卡尔松的结果得到: 任意函数 $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ (譬如连续函数) 的傅里叶级数必在区间 $[-\pi,\pi]$ 中几乎处处收敛.

2. 傅里叶三角级数逐点收敛性的研究

a. 傅里叶级数部分和的积分表示

现在考察傅里叶级数 (6) 的部分和 (9), 在它的复形式 (9′) 中代入傅里叶系数的表达式 (13), 并作如下变换:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)dt. \tag{15}$$

但是

$$D_n(u) := \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu}-1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{i\frac{1}{2}u} - e^{-i\frac{1}{2}u}}, \tag{16}$$

而且, 从定义本身看出, 当 $e^{iu}=1$ 时有 $D_n(u) = (2n+1)$. 因此,

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}, \tag{17}$$

这里, 当分数的分母变成零时, 设 $D_n(u) = 2n+1$.

---

[1]柯尔莫哥洛夫 (А. Н. Колмогоров) (1903—1987) 是杰出的苏联学者, 著作遍布概率论, 数理统计, 函数论, 泛函分析, 拓扑学, 逻辑学, 微分方程及多方面的数学应用.

[2]梅尼绍夫 (Д. Е. Меньшов) (1892—1988) 是最著名的苏联数学家之一, 实变函数论专家.

[3]鲁金 (Н. Н. Лузин) (1883—1950) 是俄苏数学家, 最精通函数论的行家之一, 大莫斯科数学学派 (“Лузитании ”) 的创始人.

[4]卡尔松 (L. Carleson) (1928—) 是杰出的瑞典数学家, 他的主要工作涉及现代分析的各个领域.

继续 (15) 的计算, 得

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt. \tag{18}$$

函数 (17) 叫狄利克雷核. 我们把 $S_n(x)$ 表示成了函数 f 与狄立克雷核的卷积的形式.

从函数 $D_n(u)$ 的定义 (16) 看出, 狄立克雷核是 2π- 周期偶函数, 此外还有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)du = 1. \tag{19}$$

假设函数 f 是 $\mathbb{R}$ 上的 2π- 周期函数或从闭区间 $[-\pi,\pi]$ 周期延拓到 $\mathbb{R}$ 上生成的函数, 在 (18) 中作变量替换, 得

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt. \tag{20}$$

这里在作变量替换时, 我们还利用了那样一个事实: 周期函数在任何长度等于函数周期的区间上的积分都是相同的.

注意到 $D_n(t)$ 是偶函数, 等式 (20) 可改写成如下形式:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x-t)+f(x+t)]D_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x-t)+f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}dt. \end{aligned} \tag{21}$$

b. 黎曼引理和局部化原理

上边得到的傅里叶三角级数的部分和的表达式 (21) 连同下边叙述的黎曼的结果, 是傅里叶三角级数逐点收敛性研究的基础.

引理 1 (黎曼引理) *如果局部可积函数 $f:]\omega_1,\omega_2[\to \mathbb{R}$ 在区间 $]\omega_1,\omega_2[$ 上 (至少在反常积分意义下) 绝对可积, 则*

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \text{ 当} \lambda\to\infty, \lambda\in\mathbb{R}. \tag{22}$$

◀ 如果 $]\omega_1,\omega_2[$ 是有限区间, 而 $f(x)\equiv 1$, 则 (22) 可用直接积分并取极限得到. 一般情况将化成这种简单情况.

固定任意的 $\varepsilon>0$, 首先取区间 $[a,b]\subset]\omega_1,\omega_2[$ 使对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$ 成立

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_{a}^{b} f(x)e^{i\lambda x}dx\right| < \varepsilon. \tag{23}$$

由于有估计

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right|$$
$$\leqslant \int_{\omega_1}^{a} |f(x)e^{i\lambda x}|dx + \int_b^{\omega_2} |f(x)e^{i\lambda x}|dx$$
$$= \int_{\omega_1}^{a} |f|(x)dx + \int_b^{\omega_2} |f|(x)dx$$

以及 f 在 $]\omega_1, \omega_2[$ 上可积性, 欲取的区间 $[a, b]$ 当然是存在的.

由于 $f \in \mathfrak{R}([a,b],\mathbb{R})$ (准确地说, $f|_{[a,b]} \in \mathfrak{R}[a,b]$), 所以存在那样的达布下积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_j \Delta x_j$ 使

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j < \varepsilon,$$

这里 $m_j = \inf\limits_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x)$.

现在做 $[a, b]$ 上的一个分段常数函数 $g(x) = m_j$, 当 $x \in [x_{j-1}, x_j[, j = 1, \cdots, n$. 于是, 我们得到在 $[a, b]$ 上, $g(x) \leqslant f(x)$, 且

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)||e^{i\lambda x}|dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon. \tag{24}$$

但

$$\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}dx$$
$$= \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^{n} (m_j e^{i\lambda x})\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \to 0, \text{当 } \lambda \to \infty, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

比较关系式 (22)—(25) 就得到了我们想证明的结果. ▶

注 1 分离 (22) 的实部和虚部, 我们得到: 当 $\lambda \to \infty, \lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\cos\lambda x dx \to 0 \text{ 和 } \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\sin\lambda x dx \to 0. \tag{26}$$

如果函数 f 是复值函数, 那么, 分别对其实部和虚部都将能得到关系 (26), 这也就是说, 关系 (22) 对复值函数 $f:]\omega_1, \omega_2[\to \mathbb{C}$ 实际上也是成立的.

注 2 如果已知 $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$, 那么根据贝塞尔不等式 (8), 立刻得到: 当 $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \to 0 \text{ 和 } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \to 0.$$

这是黎曼引理的离散形式, 原则上, 在即将进行的对经典傅里叶级数的初步研究中, 有了它就够用了.

现在回到傅里叶级数部分和的积分表示式 (21) 去, 我们看到, 如果函数 f 满足黎曼引理的条件, 那么, 由于 $\sin\frac{1}{2}t \geqslant \sin\frac{1}{2}\delta > 0$, 当 $0 < \delta \leqslant t \leqslant \pi$ 时, 我们能根据关系式 (26) 得到

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}[f(x-t)+f(x+t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}dt + o(1), \text{当 } n \to \infty. \tag{27}$$

由等式 (27) 可以作出的重要结论是: 傅里叶级数在一点的收敛性完全由函数在这个点的任意一个小邻域中的性质确定.

我们把这个原理叙述成以下命题.

定理 2 (局部化原理) 设 f 和 g 是区间 $]-\pi,\pi[$ 上的实值或复值局部可积且 (至少在反常积分意义下) 绝对可积的函数. 如果 f 和 g 在点 $x_0 \in]-\pi,\pi[$ 的一个小邻域中相等, 则它们的傅里叶级数

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}, g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(g)e^{ikx}$$

在 x_0 点同时收敛或发散, 而且当收敛时, 它们的和相等①.

注 3 从推导等式 (21) 和 (27) 的论证中看出, 局部化原理中的点 x_0 可以是区间 $[-\pi,\pi]$ 的一个端点, 但这时, 为使函数 f 和 g 从 $[-\pi,\pi]$ 到 $\mathbb{R}$ 上的延拓在点 x_0 的邻域中相等, 必须 (且只需) 原来在区间 $[-\pi,\pi]$ 上给出的函数 f 和 g 在该区间的两个端点的邻域中都相等 (这样的要求是本质的).

c. 傅里叶级数在一点收敛的充分条件

定义 2 称定义在点 $x \in \mathbb{R}$ 的空心邻域上的函数 $f : \dot{U}(x) \to \mathbb{C}$ 在点 x 处满足迪尼条件, 如果

a) 在点 x 存在以下两个单侧极限:

$$f(x_-) = \lim_{t\to+0} f(x-t), f(x_+) = \lim_{t\to+0} f(x+t);$$

①虽然未必等于值 $f(x_0) = g(x_0)$.

b) 积分

$$\int_{+0} \frac{[f(x-t)-f(x_-)]+[f(x+t)-f(x_+)]}{t} dt$$

绝对收敛①.

例 2 如果 f 是定义在 $U(x)$ 内的连续函数, 它在 x 点满足赫尔德条件

$$|f(x+t)-f(x)| \leqslant M|t|^{\alpha}, 0<\alpha \leqslant 1,$$

其中 $0<\alpha \leqslant 1$, 那么, 由于这时有估计

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \leqslant \frac{M}{|t|^{1-\alpha}},$$

函数 f 在 x 点满足迪尼条件.

如果定义在点 x 的空心邻域 $\dot{U}(x)$ 中的连续函数 f 有单侧极限 $f(x_-), f(x_+)$, 且满足单侧赫尔德条件

$$|f(x+t)-f(x_+)| \leqslant Mt^{\alpha},$$
$$|f(x-t)-f(x_-)| \leqslant Mt^{\alpha},$$

这里 $t>0, 0<\alpha \leqslant 1$, 而 M 是一个正常数, 那么, 根据与上边相同的道理, 函数 f 显然也满足迪尼条件.

定义 3 称实值或复值函数 f 是区间 $[a,b]$ 上的**分段连续函数**, 如果存在该区间中有限的一组点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使函数 f 在每个开区间 $]x_{j-1}, x_j[(j=1,\cdots,n)$ 中定义、连续, 而且在端点处有单侧极限.

定义 4 称在给定区间上具有分段连续导数的函数为这个区间上的**分段连续可微函数**.

例 3 如果一个函数在给定区间上分段连续可微, 那么, 它在该区间的任意一点都满足指数 $\alpha=1$ 的赫尔德条件 (这可由拉格朗日有限增量定理推出). 因此, 由例 1, 该函数在所考察的区间的任意点都满足迪尼条件. 当然, 在区间的两个端点只需检验相应的单侧迪尼条件.

例 4 函数 $f(x)=\mathrm{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 的任意点, 其中包括零点, 满足迪尼条件.

定理 3 (傅里叶级数在一点收敛的充分条件) *设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是 2π- 周期函数, 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积. 如果函数 f 在点 $x\in\mathbb{R}$ 满足迪尼条件, 则它的傅里叶级数在点 x 收敛, 且*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx} = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}. \tag{28}$$

①指的是对某个 $\varepsilon>0$ 积分 $\int_0^{\varepsilon}$ 绝对收敛.

◀ 根据关系式 (21) 和 (19), 得

$$S_n(x)-\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{[f(x-t)-f(x_-)]+[f(x+t)-f(x_+)]}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt$$

由于当 $t\to+0$ 时有 $2\sin\frac{1}{2}t\sim t$, 所以由迪尼条件根据黎曼引理, 可以断言, 当 $n\to\infty$ 时最后这个积分趋于零. ▶

注 4　由于刚证明的定理和局部化原理, 我们看出, 函数在一点处的值发生变化, 对于系数, 级数, 傅里叶级数的部分和, 全都没有影响, 因此, 这种级数在一点的收敛性以及级数的和, 不取决于函数在一点处的个别取值, 而由在这个点的任意小的一个邻域内的积分平均确定. 这在定理 3 中也得到反映.

例 5　在 §1, 例 6 中, 我们求出了定义在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)=x$ 的傅里叶级数

$$x\sim\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx,$$

把函数 $f(x)$ 从区间 $]-\pi,\pi[$ 周期延拓到整个数轴上, 可以认为, 上述级数是这个延拓后的函数的傅里叶级数. 于是, 根据定理 3 得

$$\sum_{k=1}^{\infty}2\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx=\begin{cases}x, \text{如果 } |x|<\pi,\\ 0, \text{如果 } |x|=\pi.\end{cases}$$

特别地, 当 $x=\frac{\pi}{4}$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

例 6　设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $|\alpha|<1$. 考察在区间 $[-\pi,\pi]$ 上它由公式 $f(x)=\cos\alpha x$ 给出的 2π- 周期函数 $f(x)$.

根据公式 (4),(5) 求出它的傅里叶系数如下:

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos nxdx=\frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2},$$
$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\sin nxdx=0.$$

根据定理 3, 在任意点 $x\in[-\pi,\pi]$ 都成立等式

$$\cos\alpha x=\frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right).$$

由此, 当 $x=\pi$, 我们得到

$$\cot\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}=\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}. \tag{29}$$

如果 $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$, 则 $\left|\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2-\alpha_0^2}$, 因此, 等式 (29) 右端的级数关于 α 在任意区间 $|\alpha|\leqslant\alpha_0<1$ 上一致收敛. 所以, 可以对它逐项积分, 即

$$\int_0^x\left(\cot\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}\right)d\alpha=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2\alpha d\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

从而

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\bigg|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\ln|\alpha^2-n^2|\bigg|_0^x.$$

这个等式给出

$$\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

并最终得到

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \text{当 } |x|<1. \tag{30}$$

这样一来, 在第 17 章 §3 推导欧拉 Γ函数的辅助公式时曾经援引过的这个关系式 (30) 获证.

d. 费耶[①]定理

现在研究函数项序列

$$\sigma_n(x):=\frac{S_0(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1},$$

它是周期函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的傅里叶三角级数 (6) 的相应部分和 $S_0(x),\cdots,S_n(x)$ 的算术平均.

根据傅里叶级数部分和的积分表示 (20), 得

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\mathfrak{F}_n(t)dt,$$

这里

$$\mathfrak{F}_n(t)=\frac{1}{n+1}[D_0(t)+\cdots+D_n(t)],$$

① 费耶 (L. Fejér) (1880—1959) , 著名的匈牙利数学家.

利用狄利克雷核的显形式 (17), 并注意

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \left(\sin\frac{1}{2}t\right)^{-1}\sum_{k=0}^{n}[\cos kt - \cos(k+1)t] = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t},$$

得到

$$\mathfrak{F}_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{(n+1)\sin\frac{1}{2}t}.$$

函数 $\mathfrak{F}_n$ 叫**费耶核**, 准确地说, 叫第 n 个**费耶核**.

注意到狄利克雷核 D_n 的最初定义 (16), 可得, 费耶核是光滑的 2π- 周期函数, 它的值, 当最后分数的分母为零时, 等于 $n+1$.

费耶核和狄利克雷核的性质有许多相似之处. 但费耶核, 与狄利克雷核不同, 它是非负的. 因此成立以下

引理 2 由函数

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\mathfrak{F}_n(x), & \text{如果 } |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{如果 } |x| > \pi. \end{cases}$$

构成的序列是 $\mathbb{R}$ 上的 δ- 型函数序列.

◀ $\Delta_n(x)$ 的非负性是显然的.

由公式 (19) 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{F}_n(x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)dx = 1.$$

最后, 对任意的 $\delta > 0$, 当 $n \to \infty$, 有

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_n(x)dx = \int_{\delta}^{+\infty} \Delta_n(x)dx = \int_{\delta}^{\pi} \Delta_n(x)dx$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\frac{1}{2}x} \to 0, \text{当 } n \to \infty. ▶$$

定理 4 (费耶) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 2π- 周期且在 $[-\pi, \pi]$ 上绝对可积的函数,

a) 如果在集合 $E \subset \mathbb{R}$ 上函数 f 一致连续, 则

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ 在 } E \text{ 上当 } n \to \infty;$$

b) 如果 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 则

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上当 } n \to \infty;$$

c) 如果 f 在点 $x \in \mathbb{R}$ 连续, 则

$$\sigma_n(x) \to f(x) \text{ 当 } n \to \infty.$$

◀ 断言 b) 和 c) 是断言 a) 的特殊情形.

断言 a) 本身是第 17 章 §4 关于卷积收敛性的一般命题 5 的特殊情形, 因为

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathfrak{F}_n(t)dt = (f * \Delta_n)(x). \ ▶$$

推论 1 (关于三角多项式逼近的魏尔斯特拉斯定理) 如果函数 $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则这个函数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可以用三角多项式以任意精度一致逼近.

◀ 把 f 做 2π- 周期延拓, 我们将得到 $\mathbb{R}$ 上的一个连续的周期函数, 根据费耶定理, 三角多项式 $\sigma_n(x)$ 一致收敛于它. ▶

推论 2 如果函数 f 在点 x 连续, 则它的傅里叶级数或者在该点发散, 或者在该点收敛于 $f(x)$.

◀ 只需检验收敛的情形. 如果当 $n \to \infty$ 序列 $S_n(x)$ 有极限, 则序列 $\sigma_n(x) = \dfrac{S_0(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}$ 也有同样的极限. 但是, 根据费耶定理, 当 $n \to \infty$ 有 $\sigma_n(x) \to f(x)$. 因此, 如果当 $n \to \infty$ 存在 $S_n(x)$ 的极限, 则 $S_n(x) \to f(x)$ 当 $n \to \infty$. ▶

注 5 我们指出, 连续函数的傅里叶级数在某些点也可能是发散的.

3. 函数的光滑性和傅里叶系数的下降速度

a. 光滑函数的傅里叶系数的估计

我们从一个简单但重要和有用的引理开始.

引理 3 (傅里叶级数的可微性) 如果连续函数 $f \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 的两个端点取值相等 ($f(-\pi) = f(\pi)$), 且在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续可微, 则它的导数的傅里叶级数

$$f' \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f')e^{ikx}$$

可以由函数本身的傅里叶级数

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

形式地进行微分得到, 亦即

$$c_k(f') = ikc_k(f), k \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

◀ 从傅里叶系数的定义 (13) 出发, 用分部积分就得到

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = ikc_k(f),$$

因为 $f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0$. ▶

命题 1 (函数的光滑性与傅里叶系数下降速度的联系) 设 $f \in C^{(m-1)}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 且 $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi), j = 0,1,\cdots,m-1$. 如果函数 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有 m 阶分段连续导数, 则成立

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), k \in \mathbb{Z}, \tag{32}$$

和

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{k^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right), \text{当 } k \to \infty, k \in \mathbb{Z}, \tag{33}$$

而且 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

◀ 关系式 (32) 是使用 m 次等式 (31) 得到的:

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)c_k(f^{(m-1)}) = \cdots = (ik)^m c_k(f).$$

置 $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$, 考虑到贝塞尔不等式

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}|^2(x)dx,$$

从 (32) 得到 (33). ▶

注 6 如同在引理 3 中一样, 在这个命题中可以用 f 是整个数轴上的 2π- 周期函数的假定代替条件 $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$.

注 7 如果傅里叶三角级数是写成 (6) 的形式, 而不是复形式 (6′), 则代替简单关系式 (32), 只得写成明显地比较累赘的等式, 但其含义同样是: 在上述条件下, 傅里叶级数可以逐项微分 (无论它是用公式 (6) 还是 (6′) 给出的). 至于级数 (6) 的傅里叶系数 $a_k(f), b_k(f)$ 的估计, 那么, 由于 $a_k(f) = c_k(f) - c_{-k}(f), b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f))$ (参看公式 (12)), 从 (33) 可以推出: 如果函数 f 满足命题中的条件, 则

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, k \in \mathbb{N}, \tag{33′}$$

这里 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, 并且可以认为 $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$.

b. 函数的光滑性和它的傅里叶级数的收敛速度.

定理 5 如果函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 满足

a) $f\in C^{(m-1)}[-\pi,\pi], m\in\mathbb{N}$,

b) $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi), j=0,1,\cdots,m-1$,

c) 在 $[-\pi,\pi]$ 上 f 有 $m\geqslant 1$ 阶的分段连续导数 $f^{(m)}$, 则函数 f 的傅里叶级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上绝对且一致收敛于 f, 而且傅里叶级数前 n 项和 $S_n(x)$ 对 $f(x)$ 的偏离, 在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足估计

$$|f(x)-S_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}},$$

这里 $\{\varepsilon_n\}$ 是趋于零的正数序列.

◀ 把傅里叶级数的部分和 (9) 写成紧凑的复形式 (9′)

$$S_n(x)=\sum_{-n}^{n}c_k(f)e^{ikx}.$$

根据函数 f 的条件, 由命题 1, 我们得到, $|c_k(f)|=\gamma_k/|k|^m$, 且 $\sum\gamma_k/|k|^m<\infty$ (因为 $0\leqslant\gamma_k/|k|^m\leqslant\dfrac{1}{2}(\gamma_k^2+1/|k|^{2m})$ 和 $m\geqslant 1$, 所以有 $\sum\gamma_k/|k|^m<\infty$). 因此, 序列 $S_n(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛 (根据级数的魏尔斯特拉斯强函数检验法或序列的柯西准则).

根据定理 3, 序列 $S_n(x)$ 的极限 $S(x)$ 等于 $f(x)$, 这是因为函数 f 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 的每个点都满足迪尼条件 (参看例 3), 而且, 由于 $f(-\pi)=f(\pi)$, 函数 f 能周期地延拓成 $\mathbb{R}$ 上的函数且在任意点 $x\in\mathbb{R}$ 保持迪尼条件.

现在, 利用关系式 (31) 就能进行估计:

$$\begin{aligned}|f(x)-S_n(x)|&=|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{\pm k=n+1}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}\right|\\&\leqslant\sum_{\pm k=n+1}^{\infty}|c_k(f)|=\sum_{\pm k=n+1}^{\infty}\gamma_k/|k|^m\\&\leqslant\left(\sum_{\pm k=n+1}^{\infty}\gamma_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\pm k=n+1}^{\infty}1/k^{2m}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

这个不等式右边的第一个因子, 当 $n\to\infty$ 时, 趋于零, 这是因为 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma_k^2<\infty$. 另外 (参看图 104),

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}1/k^{2m}\leqslant\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^{2m}}=\frac{1}{2m-1}\cdot\frac{1}{n^{2m-1}}.$$

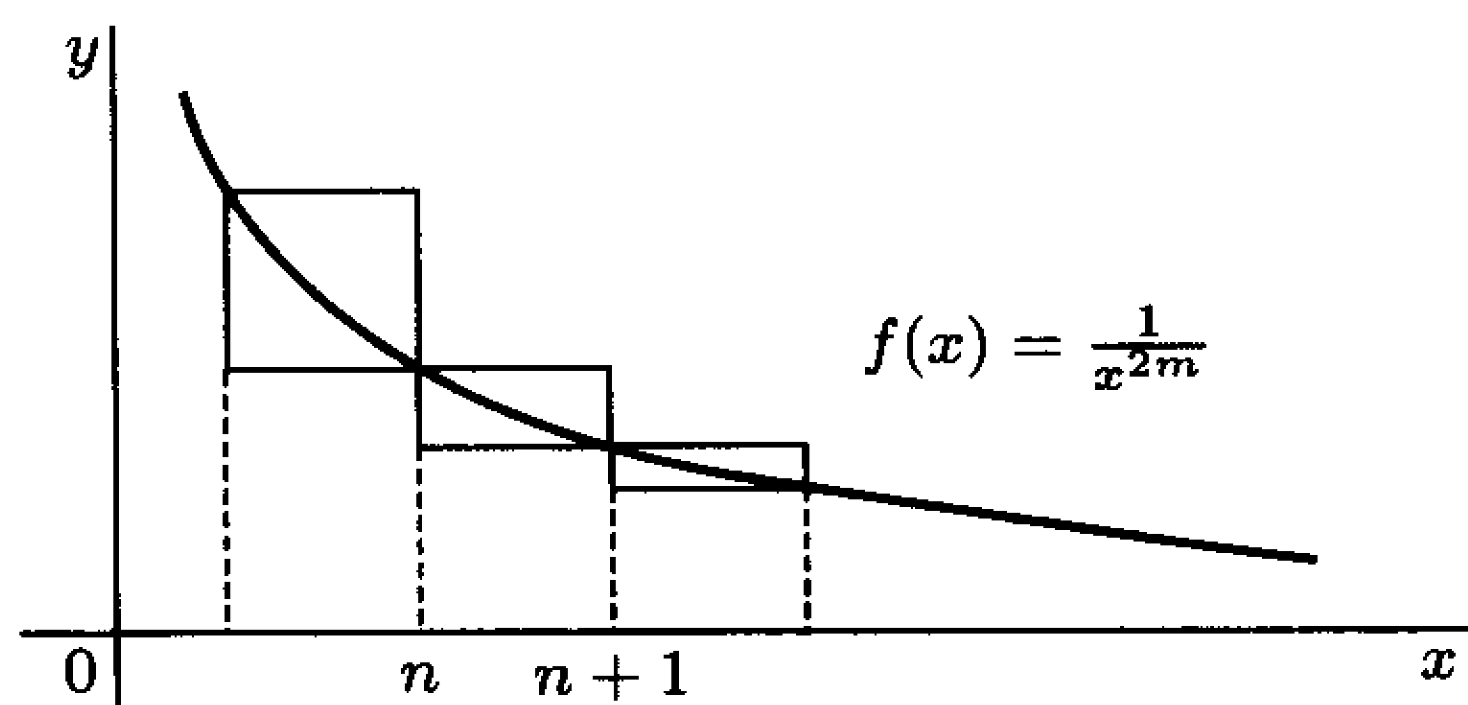


图 104

这样一来, 我们就证明了定理 5. ►

由于得到了这些结果, 我们将能做出几个有益的注.

注 8　从定理 5 (本质上是在证明它时用过的定理 3) 可以很容易地不依赖费耶定理独立得到推论 1 中的魏尔斯特拉斯逼近定理.

◄ 只要对实值函数证明它就行了. 利用函数 f 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的一致连续性, 我们用一个分段线性的连续函数 $\varphi(x)$ 逼近 f, 使在整个区间上一致地精确到 $\varepsilon/2$, 而且 $\varphi(x)$ 在区间的两个端点与 f 取相同的值, 即 $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = f(x) = f(-\pi)$ (图 105). 根据定理 5,φ 的傅里叶级数在区间 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 φ. 取这个级数的部分和, 满足对 $\varphi(x)$ 的偏离不超过 $\varepsilon/2$, 我们将得到一个三角多项式, 它在整个区间 $[-\pi, \pi]$ 上以精度 ε 逼近原来的函数 f. ►

注 9　假定具有跳跃奇性的函数, 它能表示成和的形式 $f = \varphi + \psi$, 其中 ψ 是光滑函数, 而 φ 是具有和 f 一样的奇性的一个简单函数 (图 106, a, b, c), 那么, 根据定理 5, f 的傅里叶级数是快速且一致收敛的函数 ψ 的傅里叶级数与函数 φ 的傅里叶级数的和. 后边这个傅里叶级数可以认为是已知的, 如果我们取一个标准的函数 φ 的话 (在图106上 $\varphi(x) = -\pi - x$ 当 $-\pi < x < 0$, 而 $\varphi(x) = \pi - x$ 当 $0 < x < \pi$).

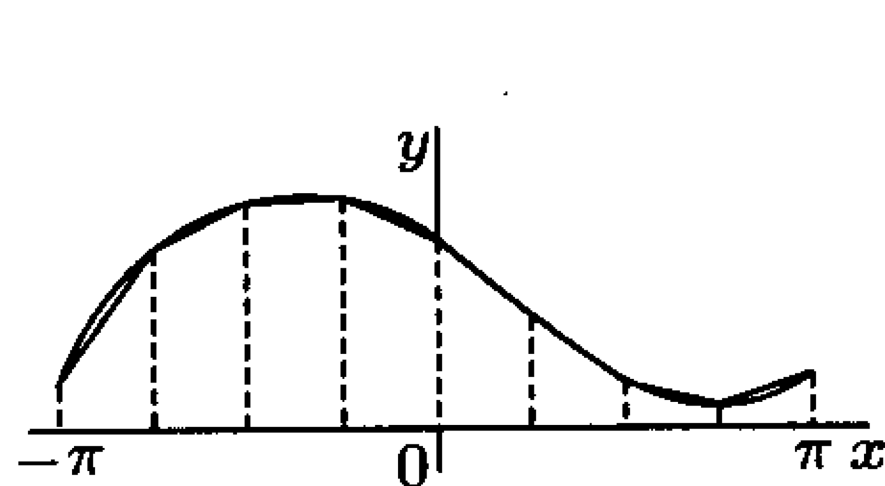


图 105

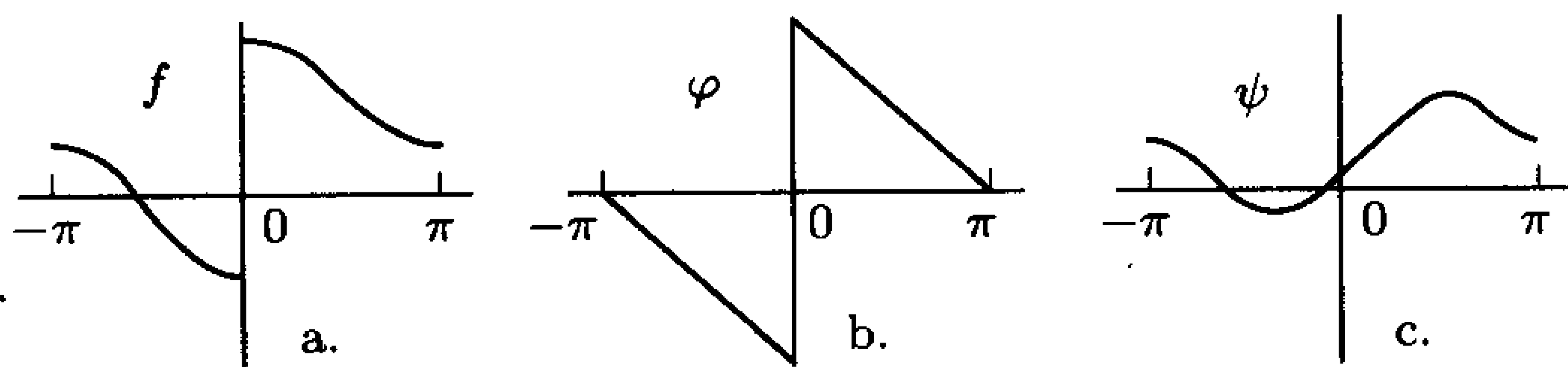


图 106

我们所观察到的这种情形, 无论在与级数有关的应用和计算问题中 (A. H. 克雷洛夫[①] 分离奇性并改善级数收敛性的方法), 还是在傅里叶三角级数理论本身中 (譬

①克雷洛夫 (A. H. Крылов)(1863—1945) 俄苏力学家和数学家, 对计算数学, 特别是在船舶构件计算方法做出了重大贡献.

如, 参看练习 11 中所说的吉布斯[①] 现象) 都是经常用到的.

注 10 傅里叶级数的积分法.

借助定理 5 可以陈述并证明以下命题, 它是关于傅里叶级数可微性的引理 3 的补充.

命题 2 *如果函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 分段连续, 则对应 $f(x)\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}$ 经过积分后化做等式*

$$\int_0^x f(t)dt=c_0(f)x+{\sum_{-\infty}^{\infty}}'\frac{c_k(f)}{ik}(e^{ikx}-1),$$

这里撇 "′" 表示在和中没有 $k=0$ 那一项; 求和按对称部分和 ${\sum\limits_{-n}^{n}}'$ 进行, 而且级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛.

◀ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上考察辅助函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt-c_0(f)x.$$

显然, $F\in C[-\pi,\pi]$. 其次, $F(-\pi)=F(\pi)$, 这是因为由 $c_0(f)$ 的定义有

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt-2\pi c_0(f)=0.$$

由于函数 F 的导数 $F'(x)=f(x)-c_0(f)$ 是分段连续的, 根据定理 5, 函数 F 的傅里叶级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(F)e^{ikx}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 F. 根据引理 3, 当 $k\neq 0$ 时有 $c_k(F)=\dfrac{c_k(F')}{ik}$. 但是, 当 $k\neq 0$ 时有 $c_k(F')=c_k(f)$. 现在用函数 f 来表达等式 $F(x)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(F)e^{ikx}$, 并注意 $F(0)=0$, 我们就得到欲证的结果. ▶

4. 三角函数系的完全性

a. 完全性定理

最后我们从傅里叶级数的逐点收敛性重新回到它按 (10) 的平均收敛性. 更准确地说就是, 利用关于傅里叶级数逐点收敛性特点的知识储备, 不依赖于练习中已经说过的方法, 独立地给出三角函数系 $\{1,\cos kx,\sin kx;k\in\mathbb{N}\}$ 在 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 中的完全性的证明. 这时, 如在第 1 段中一样, $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 或 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 理解为在区间 $]-\pi,\pi[$ 上本身局部可积而模的平方 (至少在反常积分意义下) 可积的实值或复值函数的线性空间; 假定在这个线性空间中定义了标准的内积 (7), 由这个内积产生的范数的收敛性正好就是平均收敛性 (均方差 (10) 意义下的收敛性).

① 吉布斯 (Gibbs) (1839—1903) 是美国物理学家和数学家, 热力学和统计力学的奠基人之一.

下边打算证明的定理, 直接了当地确认了三角函数系在 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中是完全的. 但是, 我们将这样叙述定理, 使叙述本身能展现定理证明的关键. 它基于那样一个明显的事实, 即完全性性质有传递性: 如果 A 逼近 B, 而 B 逼近 C, 则 A 逼近 C.

定理 6 (三角函数系的完全性) *任意函数 $f\in\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 都能用*

a) *支集在 $]-\pi,\pi[$ 中且在 $[-\pi,\pi]$ 上黎曼可积的函数;*

b) *支集在 $[-\pi,\pi]$ 中的分段常数函数;*

c) *连续分段线性且支集在区间 $[-\pi,\pi]$ 中的函数;*

d) *三角多项式*

以任意精度平均逼近.

◀ 显然, 只要对实值函数的情形证明定理就够了, 所以我们限于考虑这种情形.

a) 从反常积分的定义推出

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\lim_{\delta\to+0}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} f^2(x)dx.$$

因此, 对任何 $\varepsilon>0$, 可以找到 $\delta>0$ 使函数

$$f_\delta(x)=\begin{cases} f(x), & \text{如果 } |x|<\pi-\delta,\\ 0, & \text{如果 } \pi-\delta\leqslant|x|<\pi.\end{cases}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上按平均意义与 f 的差别小于 ε, 这是因为

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-f_\delta)^2(x)dx=\int_{-\pi}^{-\pi+\delta} f^2(x)dx+\int_{\pi-\delta}^{\pi} f^2(x)dx.$$

b) 只需验证, 任意形如 f_δ 的函数, 在 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ 中都能用分段常数且支集在 $[-\pi,\pi]$ 中的函数逼近即可. 但是函数 f_δ 在区间 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上已经是黎曼可积的. 因此, 在这个区间上它以某常数 M 为界, 此外, 还存在该区间的一个分划 $-\pi+\delta=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi-\delta$, 使相应的函数 f_δ 的达布下积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ 与 f_δ 在 $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$ 上的积分之差小于 $\varepsilon>0$.

现在置

$$g(x)=\begin{cases} m_i, & \text{如果 } x\in[x_{i-1},x_i[,\\ 0, & \text{在 } [-\pi,\pi] \text{ 的其他点},\end{cases}$$

我们将得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f_\delta-g)^2(x)dx &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f_\delta+g||f_\delta-g|(x)dx\\ &\leqslant 2M\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta}(f_\delta-g)(x)dx\leqslant 2M\varepsilon,\end{aligned}$$

这就是说, f_δ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可以用在该区间上分段常数且在区间 $[-\pi,\pi]$ 的端点的邻域中等于零的分段常数函数在平均意义下以任意精度逼近.

c) 现在, 只要确认能够在平均意义下任意逼近 b) 中指出的函数即可, 设 g 是这样一个函数. 它在开区间 $]-\pi,\pi[$ 内的全部间断点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 由于它们是有限多个, 所以, 对任何 $\varepsilon>0$, 可以取到足够小的 $\delta>0$, 使点 $x_1,\cdots,x_n$ 的 δ- 邻域互不相交, 都严格包含在开区间 $]-\pi,\pi[$ 内, 而且 $2\delta nM<\varepsilon$. 这里 $M=\sup\limits_{|x|\leqslant\pi}|g(x)|$. 现在用在区间 $[x_i-\delta,x_i+\delta]$ 的端点取值为 $g(x_i-\delta)$ 和 $g(x_i+\delta)$ 的线性插值函数代替该区间上的函数 g, 我们将得到一个支集在 $[-\pi,\pi]$ 中的连续分段线性函数 g_δ. 根据 g_δ 的构造方法知道, 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 $|g_\delta(x)|\leqslant M$, 因此

$$\int_{-\pi}^{\pi}(g-g_\delta)^2(x)dx\leqslant 2M\int_{-\pi}^{\pi}|g-g_\delta|(x)dx$$

$$=2M\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta}|g-g_\delta|(x)dx\leqslant 2M\cdot(2M\cdot 2\delta)\cdot n<4M\varepsilon,$$

因此, 逼近的可能性得证.

d) 只需再证明任意的 c) 类函数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上都能用三角多项式在平均意义下逼近. 但是, 因为根据定理 5, 对于任意的 g_δ 型函数, 关于任意给定的 $\varepsilon>0$, 可以找到一个三角多项式 T_n, 它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上以精度 ε 一致地逼近 g_δ. 因此,$\int_{-\pi}^{\pi}(g_\delta-T_n)^2(x)dx<2\pi\varepsilon^2$, 从而也确立了用三角多项式在区间 $[-\pi,\pi]$ 上以任意精度逼近任意的 c) 类函数的可能性.

现在, 援引 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中的三角不等式, 即可断定: 整个定理 6, 亦即上边指出的那些函数类在 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中的完全性, 已经得证. ►

b. 内积和帕塞瓦尔等式

在证明了三角多项式在 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中的完全性以后, 根据定理 1 可以断言对于任意的函数 $f\in\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 成立等式

$$f=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx], \tag{34}$$

或写成复形式的等式

$$f=\sum_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}, \tag{35}$$

这里的收敛性理解为按空间 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 的范数的收敛性, 亦即平均收敛性, 而 (35) 中的极限过程是由 $S_n(x)=\sum\limits_{-n}^{n}c_k(f)e^{ikx}$ 在 $n\to\infty$ 时完成的.

如果把等式 (34),(35) 改写成

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}f=\frac{a_0(f)}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+b_k(f)\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \tag{34'}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{35'}$$

则等式右边分别是按规范正交系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\pi; k\in\mathbb{N}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}; k\in\mathbb{Z}\right\}$ 的级数. 因此, 根据用向量在规范正交基下的坐标计算向量内积的一般规则 (参看 §1 引理 1), 可以断定, 对 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 的任意两个函数 f 和 g, 等式

$$\frac{1}{\pi}\langle f,g\rangle = \frac{a_0(f)\bar{a}_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\bar{a}_k(g) + b_k(f)\bar{b}_k(g) \tag{36}$$

或它的另一种写法

$$\frac{1}{2\pi}\langle f,g\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\bar{c}_k(g) \tag{37}$$

都成立. 在这里, 照例记

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx.$$

特别地, 当 $f=g$ 时, 从 (36) 和 (37) 得到以下两个彼此等价的经典的帕塞瓦尔等式:

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2, \tag{38}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{39}$$

我们已经说过, 从几何的观点看, 帕塞瓦尔等式可以看做是无穷维情形下的毕达哥拉斯定理.

根据帕塞瓦尔等式容易证明以下有益的命题.

命题 3 (傅里叶级数的唯一性) *设 f 和 g 是 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中的函数. 那么,*

a) 如果三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx \left(= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}\right)$$

在区间 $[-\pi,\pi]$ 上平均收敛于 f, 则它是 f 的傅里叶级数;

b) 如果函数 f 和 g 有同一的傅里叶级数, 则它们在区间 $[-\pi,\pi]$ 上几乎处处相等, 即 $f=g$ 在 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$ 中.

◀ 断言 a) 实际上就是下述一般事实的特殊情况: 向量按正交向量系的展开是唯一的. 根据内积的连续性 (参看 §1 的引理 1), 借助内积运算立刻得到, 向量按正交系展开的系数是, 而且只能是, 傅里叶系数.

断言 b), 注意到三角函数系在 $\mathfrak{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ 中的完全性, 可从帕塞瓦尔等式推出.

由于差 $(f-g)$ 有零傅里叶级数, 根据帕塞瓦尔等式有 $\|f-g\|_{\mathfrak{R}_2}=0$. 因此, f 和 g 在它们的连续点处相等, 从而, 几乎处处相等. ▶

注 11 在研究泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 时, 我们曾指出, 函数类 $C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 中的不同的函数 (在某些点 $a\in\mathbb{R}$). 可以有相同的泰勒级数. 这个与刚才证明的傅里叶级数唯一性定理相反的性质, 不应该使之过分地绝对化, 这是因为任何唯一性定理都是对一定的空间和一定形式的收敛性而言的.

例如, 在解析函数空间中 (解析函数即能局部地表示成逐点收敛幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的函数), 两个不同的函数在任意点的泰勒展开都不相同.

同样地, 如果在研究三角级数时不使用空间 $\mathfrak{R}_2[-\pi,\pi]$, 并考察三角级数的逐点收敛性, 那么, 如同已指出过的 (参看 §2, 1, c), 可以构造一个三角级数, 它的系数不全为零, 但它几乎处处收敛于零. 当然, 根据命题 3, 这种零 - 级数在均方差意义下不收敛于零.

最后, 作为傅里叶三角级数性质应用的例子, 我们来研究二维古典等周不等式的下述结果, 它属于赫尔维茨[1]. 为了避开累赘的表达式和一些意外的技术上的困难, 我们将使用复形式的记法.

例 7 n 维欧几里得空间 $E_n(n\geqslant 2)$ 中一区域的体积 V 和包围该区域的 $(n-1)$ 维超曲面的面积 F 之间有如下关系

$$n^n v_n V^{n-1}\leqslant F^n, \tag{40}$$

它叫等周不等式. 这里 v_n 是 E^n 中 n 维单位球的体积. 等周不等式中的等号只对球成立.

"等周" 这种叫法是与在长度为 L 的平面闭曲线中求出所围面积 S 最大的曲线这一经典几何问题有关的. 在这种情形下, 不等式 (40) 即

$$4\pi S\leqslant L^2. \tag{41}$$

我们现在要证明的正是这个不等式, 同时认为, 所考虑的曲线都是光滑的, 并用参数方程形式给出: $x=\varphi(s), y=\psi(s)$, 这里 s 是沿曲线的自然参数 (弧长), 而函数 φ 和 ψ 属于函数类 $C^{(1)}[0,L]$. 曲线封闭性条件即 $\varphi(0)=\varphi(L), \psi(0)=\psi(L)$.

代替参数 s 改用参数 $t=2\pi\frac{s}{L}-\pi$, 它从 $-\pi$ 变到 π, 并设我们的曲线用参数方程

$$x=x(t), y=y(t), -\pi\leqslant t\leqslant\pi, \tag{42}$$

[1]赫尔维茨 (A. Hurwitz) (1859—1919) 是德国数学家, 克莱因的学生.

给出, 且

$$x(-\pi) = x(\pi), y(-\pi) = y(\pi). \tag{43}$$

关系式 (42) 能表成复值函数形式

$$z = z(t), -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \tag{42'}$$

这里 $z(t) = x(t) + iy(t)$, 并据 (43) 有 $z(-\pi) = z(\pi)$.

我们注意到

$$|z'(t)|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

因此, 在我们的参数 t 的选择下, 有

$$|z'(t)|^2 = L^2/4\pi^2. \tag{44}$$

其次, 考虑到 $\bar{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$, 并利用等式 (43), 可把由闭曲线 (42) 围成的区域的面积用复形式的公式表示出来:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx')(t)dt = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\bar{z}(t)dt \tag{45}$$

现在写出函数 (42′) 的傅里叶展开式

$$z(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

这时,

$$z'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}.$$

特别地, 等式 (44) 和 (45) 表示

$$\frac{1}{2\pi}\|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2 dt = \frac{L^2}{4\pi^2},$$

而

$$\frac{1}{2\pi}\langle z', z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\bar{z}(t)dt = \frac{i}{\pi}S$$

根据等式 (37),(39), 所得的关系式有如下用傅里叶系数表示的形式:

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |kc_k|^2,$$

$$S = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} kc_k\bar{c}_k.$$

这样一来,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi \sum_{-\infty}^{\infty} (k^2 - k)|c_k|^2.$$

这个等式的右端显然是非负的, 而且只有在条件

$$c_k = 0, \text{当 } k \in \mathbb{Z}, k \neq 0, 1$$

下, 它才是零.

于是, 我们证明了不等式 (41), 同时还得到了使等号成立的那种曲线的方程

$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it}, -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

这是以复平面上的点 c_0 为中心, $|c_1|$ 为半径的圆的复形式的参数方程.

练　习

1. a) 试证:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{当 } 0 < x < 2\pi,$$

并求这个级数在其他的点 $x \in \mathbb{R}$ 的和.

现在, 试利用上述展开以及傅里叶三角级数的运算法则证明:

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2kx}{2k} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$, 当 $0 < x < \pi$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \dfrac{\pi}{4}$, 当 $0 < x < \pi$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = \dfrac{x}{2}$, 当 $|x| < \pi$.

e) $x^2 = \dfrac{\pi}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$, 当 $|x| < \pi$.

f) $x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

g) $\dfrac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, 当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

h) 绘出这里的三角级数的和在整个数轴上的图像. 利用所得到的结果求下列数项级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. 试证:

a) 如果 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ 是奇 (偶) 函数, 则它的傅里叶系数有以下特点: $a_k(f) = 0 (b_k(f) = 0)$ 当 $k = 0, 1, 2, \cdots$;

b) 如果 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 具有周期 $2\pi/m$, 则它的傅里叶系数 $c_k(f)$ 仅当 k 是 m 的倍数时才可能不等于零;

c) 如果 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ 是实值的, 则对于任何 $k\in\mathbb{N}, c_k(f)=\bar{c}_{-k}(f)$;

d) $|a_k(f)|\leqslant 2\sup\limits_{|x|<\pi}|f(x)|, |b_k(f)|\leqslant 2\sup\limits_{|x|<\pi}|f(x)|, |c_k(f)|\leqslant \sup\limits_{|x|<\pi}|f(x)|$.

3. a) 试证: 对于任意的 $a\in\mathbb{R}$, 函数系 $\{\cos kx; k=0,1,\cdots\}, \{\sin kx; k\in\mathbb{N}\}$ 都是空间 $\mathfrak{R}_2[a,a+\pi]$ 中的完全系.

b) 求函数 $f(x)=x$ 按上述每个函数系在区间 $[0,\pi]$ 上的展开式.

c) 绘出所得傅里叶级数的和在整个数轴上的图像.

d) 指出函数 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶三角级数, 并阐明它在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上是否一致收敛于这个函数.

4. 函数 f 的傅里叶级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}$ 可以看成幂级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_kz^k\left(=\sum\limits_{-\infty}^{-1}c_kz^k+\sum\limits_{0}^{+\infty}c_kz^k\right)$ 的特殊情形, 其中 z 在复平面的单位圆的圆周上变化 (即 $z=e^{it}$).

试证: 如果函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 的傅里叶系数 $c_k(f)$ 减小得那样快, 使 $\varliminf\limits_{k\to-\infty}|c_k(f)|^{1/k}=c_->1$, 而 $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}|c_k(f)|^{1/k}=c_+<1$, 则

a) 可以把函数 f 看成用级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_kz^k$ 表示的定义在环形区域 $c_-^{-1}<|z|<c_+^{-1}$ 中的某个函数在单位圆圆周上的迹;

b) 当 $z=x+iy, \ln\dfrac{1}{c_-}<y<\ln\dfrac{1}{c_+}$, 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikz}$ 绝对收敛 (特别地, 它的和与求和顺序无关);

c) 在由条件 $a\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant b$ (其中 $\ln\dfrac{1}{c_-}<a<b<\ln\dfrac{1}{c_+}$) 确定的复平面中的带形区域内, 级数 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}$ 绝对且一致收敛;

d) 试利用展开式 $e^z=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots$ 和欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 证明

$$1+\frac{\cos x}{1!}+\cdots+\frac{\cos nx}{n!}+\cdots=e^{\cos x}\cos(\sin x),$$
$$\frac{\sin x}{1!}+\cdots+\frac{\sin nx}{n!}+\cdots=e^{\cos x}\sin(\sin x);$$

e) 试利用展开式 $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots, \sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\cdots$ 验证

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!}=\sin(\cos x)\mathrm{ch}(\sin x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!}=\cos(\cos x)\mathrm{sh}(\sin x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2nx}{(2n)!}=\cos(\cos x)\mathrm{ch}(\sin x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin 2nx}{(2n)!}=\cos(\cos x)\mathrm{sh}(\sin x).$$

5. 试验证:

a) 对于任何 $a \in \mathbb{R}$, 函数系 $\{1, \cos k\frac{2\pi}{T}x, \sin k\frac{2\pi}{T}x; k \in \mathbb{N}\}, \{e^{ik\frac{2\pi}{T}x}; k \in \mathbb{Z}\}$ 都是空间 $\mathfrak{R}_2([a, a+T]; \mathbb{C})$ 中的完全正交系;

b) T- 周期函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 关于上述的函数系的傅里叶系数 $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$ 与它是在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上还是在任何其他形如 $[a, a+T]$ 的区间上展成傅里叶级数无关.

c) 如果 $c_k(f)$ 和 $c_k(g)$ 是 T- 周期函数 f 和 g 的傅里叶系数, 则

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\bar{g}(x)dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\bar{c}_k(g);$$

d) T- 周期光滑函数 f 和 g 的用因子 $\frac{1}{T}$ 规范化了的 "卷积"

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)dt$$

的傅里叶系数 $c_k(h)$ 与函数 f 和 g 的傅里叶系数 $c_k(f), c_k(g)$ 满足关系 $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)(k \in \mathbb{Z})$.

6. 试证: 如果 α 与 π 不可公度, 则

a) $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} e^{ik(x+n\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt;$

b) 对任何连续的 2π- 周期函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.$$

7. 试证下述断言:

a) 如果函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 则

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x+\frac{\pi}{\lambda}) - f(x)\right|dx.$$

b) 如果函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 和 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 且 g 的模在 $\mathbb{R}$ 上有界, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)g(t)e^{i\lambda t}dt =: \varphi_\lambda(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{在 } \mathbb{R} \text{ 上, 当 } \lambda \to \infty.$$

c) 如果 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是 2π- 周期且在一个周期上绝对可积的函数, 则它的傅里叶三角级数的余项 $S_n(x) - f(x)$ 可以表示成

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\Delta^2 f)(x,t)D_n(t)dt,$$

这里 D_n 是 n 阶狄利克雷核, 而 $(\Delta^2 f)(x,t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)$.

d) 对于任意 $\delta \in]0, \pi[$, 可把上边得到的余项公式化成以下形式

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t}(\Delta^2 f)(x,t)dt + o(1),$$

这里 $o(1)$ 当 $n \to \infty$ 时趋于零, 而且这个极限在任何使函数 f 有界的区间 $[a, b]$ 上是一致的.

e) 如果函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足赫尔德条件 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^\alpha$ (这里 M 和 α 是正数), 此外, $f(-\pi)=f(\pi)$, 则函数 f 的傅里叶级数在整个区间上一致收敛于它自己.

8. a) 试证: 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 2π- 周期函数, 且有分段光滑的 m 阶 $(m\in\mathbb{N})$ 导数 $f^{(m)}$, 则 f 可以表示成

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}B_m(t-x)f^{(m)}(t)dt$$

的形式, 这里 $B_m(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(ku+\dfrac{m\pi}{2}\right)}{k^m}, m\in\mathbb{N}$.

b) 利用练习 1 中函数 $\dfrac{\pi-x}{2}$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的傅里叶展开, 证明: $B_1(u)$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上的 1 次多项式, 而 $B_m(u)$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上的 m 次多项式. 这些多项式叫伯努利多项式.

c) 试验证: 对任意 $m\in\mathbb{N}$, 有 $\int_0^{2\pi}B_m(u)du=0$.

9. a) 设 $x_m=\dfrac{2\pi m}{2n+1}, m=0,1,\cdots,2n$. 试验证:

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\cos kx_m\cos lx_m=\delta_{kl},$$

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m\sin lx_m=\delta_{kl},$$

$$\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m\cos lx_m=0,$$

这里 k,l 是非负整数, 而 $\delta_{kl}=0$ 当 $k\neq l,\delta_{kl}=1$ 当 $k=l$.

b) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 2π- 周期, 且在一个周期上绝对可积的函数. 用点 $x_m=\dfrac{2\pi m}{2n+1}, m=0,1,\cdots,2n$, 把区间 $[0,2\pi]$ 分成 $2n+1$ 个相等的区间. 我们用与区间 $[0,2\pi]$ 的这个分划对应的矩形公式计算积分

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx, b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx.$$

的近似值. 这时, 我们得到

$$\widetilde{a}_k(f)=\frac{2}{2n+1}\sum_{m=1}^{2n}f(x_m)\cos kx_m,$$

$$\widetilde{b}_k(f)=\frac{2}{2n+1}\sum_{m=1}^{2n}f(x_m)\sin kx_m,$$

并且用它们代替函数 f 的傅里叶级数的前 n 项和 $S_n(f,x)$ 中的相应的系数 $a_k(f)$ 和 $b_k(f)$.

试证: 这时得到的是函数 f 在节点 $x_m(m=0,1,2,\cdots,2n)$ 的 n 阶插值三角多项式 $\widetilde{S}_n(f,x)$, 即在这些节点处有 $f(x_m)=\widetilde{S}_n(f,x_m)$.

10. 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且分段可微, 又设它的导数 f' 在区间 $]a,b[$ 上平方可积. 试利用帕塞瓦尔等式证明

a) 如果 $[a,b]=[0,\pi]$, 则当满足两个条件 $f(0)=f(\pi)=0$ 或 $\int_0^\pi f(x)dx=0$ 中的任一个时, 成立**斯捷克洛夫不等式**

$$\int_0^\pi f^2(x)dx\leqslant\int_0^\pi (f')^2(x)dx,$$

其中的等号仅在 $f(x)=a\cos x$ 时成立;

b) 如果 $[a,b]=[-\pi,\pi]$ 并同时满足两个条件 $f(-\pi)=f(\pi)$ 和 $\int_{-\pi}^\pi f(x)dx=0$, 则成立**维勒金盖勒不等式**

$$\int_{-\pi}^\pi f^2(x)dx\leqslant\int_{-\pi}^\pi (f')^2(x)dx,$$

其中等号仅在 $f(x)=a\cos x+b\sin x$ 时成立.

11. **吉布斯现象** —— 人们这样称呼下边描述的傅里叶三角级数部分和的行为特点, "它是由维尔波列雅姆首先发现的 (1848 年), 后来 (1898 年) 吉布斯重新发现了这种现象" (《数学百科全书》*, 卷 1, 莫斯科, 1977 年.)

a) 试证

$$\mathrm{sgn}x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \text{当 } |x|<\pi.$$

b) 试验证, 函数 $S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ 当 $x=\frac{\pi}{2n}$ 时达到最大值, 且当 $n\to\infty$ 时有

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2n}}{(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx\approx 1.179$$

这样一来, 当 $n\to\infty$ 时 $S_n(x)$ 在点 $x=0$ 附近的振动大约超过函数 $\mathrm{sgn}x$ 本身在这一点的跳跃的 18% ($S_n(x)$ "依惯性" 超跳).

c) 绘出习题 b) 的函数 $S_n(x)$ 的图像的极限.

现在设 $S_n(f,x)$ 是函数 f 的傅里叶三角级数前 n 项部分和, 并设当 $n\to\infty$ 时在 ξ 的空心邻域 $0<|x-\xi|<\delta$ 中有 $S_n(f,x)\to f(x)$, 在点 ξ 处 f 有单边极限 $f(\xi_-)$ 和 $f(\xi_+)$. 为确定起见, 设 $f(\xi_-)\leqslant f(\xi_+)$.

称和 $S_n(f,x)$ *在点 ξ 有吉布斯现象*, 如果 $\varliminf\limits_{\substack{n\to\infty\\x\to\xi-0}} S_n(f,x)<f(\xi_-)\leqslant f(\xi_+)<\varlimsup\limits_{\substack{n\to\infty\\x\to\xi+0}} S_n(f,x)$.

d) 试利用注 9 证明, 对任意形如 $\varphi(x)+c\,\mathrm{sgn}(x-\xi)$ 的函数, 这里 $c\neq 0, |\xi|<\pi$, 而 $\varphi\in C^{(1)}[-\pi,\pi]$, 在点 ξ 有吉布斯现象.

12. **高维傅里叶三角级数.**

---

* 编者注. 该书中文编译版:《数学百科全书》, 科学出版社, 1994. 1—2000. 12 (第 1 版). 第 2 卷, 第 729 页列有条目 "Gibbs 现象".

a) 试验证: 函数系 $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}$, 其中 $k=(k_1,\cdots,k_n), x=(x_1,\cdots,x_n), kx=k_1x_1+\cdots+k_nx_n, k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}$, 在任意 n 维方体 $I=\{x\in\mathbb{R}^n | a_j\leqslant x_j\leqslant a_j+2\pi, j=1,2,\cdots,n\}$ 上是规范正交系.

b) 对应于 I 上可积函数 f 做可数和 $f\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}$, 它叫函数 f 关于系 $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\right\}$ 的傅里叶级数, 这里 $c_k(f)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_I f(x)e^{-ikx}dx$. 数 $c_k(f)$ 叫函数 f 关于系 $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\right\}$ 的傅里叶系数.

在高维情形, 人们常借助和

$$S_N(x)=\sum_{|k|\leqslant N}c_k(f)e^{ikx}$$

求傅里叶级数的和; 这里 $|k|\leqslant N$ 表示 $N=(N_1,\cdots,N_n)$ 和 $|k_j|\leqslant N_j, j=1,\cdots,n$.

试证, 对任何关于其每个变量都是 2π- 周期的函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$, 有

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\frac{1}{\pi^n}\int_I\prod_{j=1}^{n}D_{N_j}(t_j-x_j)f(t)dt\\&=\frac{1}{\pi^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(t-x)\prod_{j=1}^{n}D_{N_j}(t_j)dt_1\cdots dt_n,\end{aligned}$$

这里 $D_{N_j}(t)$ 是第 N_j 个一维狄利克雷核.

c) 试证, 关于每个变量都是 2π- 周期的 n 元函数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的费耶和

$$\sigma_n(x):=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}S_k(x)=\frac{1}{(N_1+1)\cdots(N_n+1)}\sum_{k_1=0}^{N_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{N_n}S_{k_1\cdots k_n}(x)$$

能表示成以下形式:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi^n}\int_I f(t-x)\Phi_N(t)dt,$$

这里 $\Phi_N(u)=\prod\limits_{j=1}^{n}F_{N_j}(u_j)$, 而 F_{N_j} 是第 N_j 个一维费耶核.

d) 试把费耶定理推广到 n 维情形

e) 试证: 如果函数 f 关于它的每个自变量都是 2π- 周期的, 且在 I 上至少在反常积分意义下绝对可积, 则当 $u\to 0$ 时有 $\int_I|f(x+u)-f(x)|dx\to 0$, 而当 $N\to\infty$ 时有 $\int_I|f-\sigma_N|(x)dx\to 0$.

f) 试证: 在方体 I 上绝对可积的两个函数 f 和 g 具有相同的傅里叶级数 (亦即对任何多重指标 k 均有 $c_k(f)=c_k(g)$), 当且仅当, $f(x)=g(x)$ 在 I 上几乎处处成立. 这是关于傅里叶级数唯一性的命题 3 的推广.

g) 试验证: 原先所说的规范正交系 $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\right\}$ 在 $\mathfrak{R}_2(I)$ 中完全. 因此, 任意函数 $f\in\mathfrak{R}_2(I)$ 的傅里叶级数在 I 上都平均收敛于 f.

h) 设 f 是关于它的每个自变量都是 2π- 周期的 $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 类函数. 试验证: $c_k(f^{(\alpha)})=i^{|\alpha|}k^{\alpha}c_k(f)$, 这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), k=(k_1,\cdots,k_n), |\alpha|=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|, k^{\alpha}=k_1^{\alpha_1}\cdots k_n^{\alpha_n}, \alpha_j$ 是非负整数.

i) 设 f 是关于它的每个自变量都是 2π- 周期的 $C^{(mn)}(\mathbb{R}^n)$ 类函数. 试证: 如果对于每个多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 这里 α_j 是 0 或 m (对任意 $j=1,\cdots,n$), 都满足估计

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_I |f^{(\alpha)}|^2(x)dx \leqslant M^2,$$

则

$$|f(x)-S_N(x)| \leqslant \frac{CM}{\underline{N}^{m-\frac{1}{2}}},$$

这里 $\underline{N}=\min\{N_1,\cdots,N_n\}$, 而 C 是依赖于 m 的常数, 但它不依赖于 N 和 $x\in I$.

j) 注意, 如果一个连续函数序列在区间 I 上平均收敛于 f, 同时它又一致收敛于 φ, 则在 I 上有 $f(x)=\varphi(x)$.

试利用这个事实证明, 如果关于其每个自变量均为 2π- 周期的 n 元函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 属于类 $C^{(1)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, 则函数 f 的傅里叶三角级数在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于它本身.

13. *广义函数的傅里叶级数*. 以 2π- 为周期的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 可以看做单位圆圆周 Γ 上的点的函数 $f(s)$ (点用自然参数 $0\leqslant s\leqslant 2\pi$ 的值 s 确定).

仍采用第 17 章 §4 中的记号, 我们来考察 Γ 上的由 $C^{(\infty)}(\Gamma)$ 类函数构成的空间 $\mathfrak{D}(\Gamma)$ 以及广义函数空间 $\mathfrak{D}'(\Gamma)$. 所谓广义函数, 即 $\mathfrak{D}(\Gamma)$ 上的连续线性泛函. 泛函 $F\in\mathfrak{D}'(\Gamma)$ 在函数 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Gamma)$ 上的作用 (值) 将以符号 $F(\varphi)$ 表示, 我们不用 $\langle F,\varphi\rangle$ 这个符号, 因为在本章已用它表示埃尔米特内积 (7).

在 Γ 上的每一个可积函数 f 都能看做是 $\mathfrak{D}'(\Gamma)$ 的元素 (正则广义函数), 它在函数 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Gamma)$ 上的值由公式

$$f(\varphi)=\int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s)ds$$

确定.

空间 $\mathfrak{D}'(\Gamma)$ 中的广义函数序列 $\{F_n\}$ 收敛于广义函数 $F\in\mathfrak{D}'(\Gamma)$, 通常是指, 对任意函数 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Gamma)$, 有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi)=F(\varphi).$$

a) 利用这样一个事实: 对任意函数 $\varphi\in C^{(\infty)}(\Gamma)$, 根据定理 5, 在 Γ 上成立关系 $\varphi(s)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)e^{iks}$, 特别地, 成立等式 $\varphi(0)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)$, 证明在 $\mathfrak{D}'(\Gamma)$ 中广义函数收敛性意义下, 有

$$\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}e^{iks}\to\delta, \text{当 } n\to\infty.$$

这里 δ 是空间 $\mathfrak{D}'(\Gamma)$ 的一个元素, 它在函数 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Gamma)$ 上的作用由关系式 $\delta(\varphi)=\varphi(0)$ 确定.

b) 如果 $f\in\mathfrak{R}(\Gamma)$, 则用通常方式定义的函数 f 关于系 $\{e^{iks}\}$ 的傅里叶系数可以写成如下形式

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-iks}ds=\frac{1}{2\pi}f(e^{-iks}).$$

现在, 对任意广义函数 $F \in \mathfrak{D}'(\Gamma)$, 我们将类似地以公式 $c_k(F) = \frac{1}{2\pi}F(e^{-iks})$ 定义它的傅里叶系数. 这是有意义的, 因为 $e^{-iks} \in \mathfrak{D}(\Gamma)$.

因此, 对任意广义函数 $F \in \mathfrak{D}'(\Gamma)$ 有它的傅里叶级数与它对应:

$$F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{iks}$$

试证: $\delta \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{iks}$.

c) 试证以下有关广义函数运算的简单性和灵活性的漂亮结果: 广义函数 $F \in \mathfrak{D}'(\Gamma)$ 的傅里叶级数 (在空间 $\mathfrak{D}'(\Gamma)$ 的收敛性意义下) 收敛于 F.

d) 试证: 函数 $F \in \mathfrak{D}'(\Gamma)$ 的傅里叶级数 (作为函数 F 本身, 也作为任意的收敛广义函数级数) 可任意次逐项微分.

e) 由等式 $\delta = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}e^{iks}$ 求函数 δ' 的傅里叶级数.

f) 现在从圆周 Γ 回到直线 $\mathbb{R}$, 并把函数 e^{iks} 看做空间 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 中的正则广义函数 (亦即看做在 $\mathbb{R}$ 中具紧支集的 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ 类函数的空间 $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ 上的线性连续泛函)

任意局部可积函数 f 可以看做空间 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 的元素 ($\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 中的正则广义函数), 它作用在函数 $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 上所得的值由 $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ 给出. $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 中的收敛性用标准的方式定义:

$$(\lim_{n\to\infty} F_n = F) := \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})(\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi) = F(\varphi)).$$

试证, 在 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 中收敛性意义下, 下述等式成立:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$$

等式两边的无穷和都理解为对称部分和 $\sum\limits_{-n}^{n}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限; 而 $\delta(x - x_0)$, 如通常一样, 表示空间 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ 中的 δ- 函数到点 x_0 的位移, 即 $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$.

§3　傅里叶变换

1. 函数的傅里叶积分表示

a. 谱和函数的调和分析

设 $f(t)$ 是 T- 周期函数, 例如, 作为时间的函数的频率为 $\frac{1}{T}$ 的周期信号. 假设, f 在一个周期上绝对可积. 把 f 展成傅里叶级数 (在 f 充分正则的情形, 我们已经知

道, 这个傅里叶级数收敛于 f) 并加以变换

$$f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k(f)\cos k\omega_0 t + b_k(f)\sin k\omega_0 t]$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ik\omega_0 t} = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\cos(k\omega_0 t + \arg c_k), \quad (1)$$

我们就把 f 表示成了和的形式, 其中常数项是 $\frac{a_0}{2} = c_0$ 是 f在一个周期的平均值, 而余弦分量的频率是 $\nu_0 = \frac{1}{T}$ (基频), $2\nu_0$(第二调和频率), 等等. 一般地, 信号 $f(t)$ 的第 k 个调和分量 $2|c_k|\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t + \arg c_k\right)$ 的频率是 $k\nu_0 = \frac{k_0}{T}$, 圆频率是 $k\omega_0 = 2\pi k\nu_0 = \frac{2\pi}{T}k$, 振幅是 $2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, 相位是 $\arg c_k = -\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$.

将周期函数 (信号) 展成简单调和振动的和叫函数 f 的调和分析. 数集 $\{c_k(f); k \in \mathbb{Z}\}$ 或 $\{a_0(f), a_k(f), b_k(f); k \in \mathbb{N}\}$ 叫做函数 (信号) f 的谱. 这样一来, 周期函数有离散的谱.

我们来做些 (启发性) 探索, 看看当信号 f 的周期 T 无限增加时从展开式 (1) 会得到些什么.

为简单起见, 记 $l = \frac{T}{2}, \alpha_k = k\frac{\pi}{l}$, 把展开式

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{l}t}$$

改写成如下形式:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\left(c_k\frac{l}{\pi}\right)e^{ik\frac{\pi}{l}t}\frac{\pi}{l}, \quad (2)$$

这里

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\alpha_k t}dt.$$

亦即

$$c_k\frac{l}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\alpha_k t}dt.$$

我们设想, 在 $l \to +\infty$ 的极限状态中来考察 $\mathbb{R}$ 上的任意的绝对可积函数 f, 引入辅助函数

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt, \quad (3)$$

它在点 $\alpha = \alpha_k$ 的值与 (2) 中的量 $c_k\frac{l}{\pi}$ 相差很小. 在这种情况下

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} c(\alpha_k)e^{i\alpha_k t}\frac{\pi}{l}, \quad (4)$$

这里 $\alpha_k = k\frac{\pi}{l}$, 而 $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}$. 这个和是一个积分和, 当 $l \to \infty$ 从而使分划无限变细时, 我们得到

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha. \tag{5}$$

这样一来, 我们按傅里叶的做法, 把 f 展成了具不同频率和相位的谐波的连续统式线性组合.

今后将称积分 (5) 为傅里叶积分. 这是傅里叶级数的连续统式等价物. 其中的函数 $c(\alpha)$ 类似于傅里叶系数, 叫做 (定义在整个数轴 $\mathbb{R}$ 上的) 函数 f 的傅里叶变换. 很自然, 把它看成是函数 (信号) f 的**谱**. 与前面研究的周期信号相应的具傅里叶系数形式的离散谱不同, 任意信号的谱 $c(\alpha)$ 可在整个区间甚至整个直线上不是零 (**连续谱**).

例 1 试求函数, 其谱是下列具紧支集的函数:

$$c(\alpha) = \begin{cases} h, \text{如果 } |\alpha| \leqslant a, \\ 0, \text{如果 } |\alpha| > a. \end{cases} \tag{6}$$

◀ 根据公式 (5), 当 $t \neq 0$, 求出

$$f(t) = \int_{-a}^{a} h e^{i\alpha t} d\alpha = h\frac{e^{iat} - e^{-iat}}{it} = 2h\frac{\sin at}{t}, \tag{7}$$

而当 $t = 0$ 时, 我们得到 $f(0) = 2ha$, 它与当 $t \to 0$ 时 $2h \cdot \frac{\sin at}{t}$ 的极限相同. ▶

函数的形如 (5) 的表示叫做*函数的傅里叶积分表示*. 下边我们将讨论使这种表示成立的条件. 而现在再研究一个例子.

例 2 设 P 是具有以下性质的一个装置: 它是一个信号的线性转换器 (即 $P\left(\sum\limits_j a_j f_j\right) = \sum\limits_j a_j P(f_j)$), 而且保持信号的周期不变 (即 $P(e^{i\omega t}) = p(\omega)e^{i\omega t}$, 这里的系数 $p(\omega)$ 依赖于周期信号 $e^{i\omega t}$ 的频率).

在这里, 我们使用紧凑的复形式记号, 改成用函数 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 表示也是可以的.

函数 $p(\omega) =: R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ 叫做*装置 P 的谱特征*, 它的模 $R(\omega)$ 叫做*频率特征*, 而辐角 $\varphi(\omega)$ 叫*装置 P 的相位特征*. 通过装置的信号 $e^{i\omega t}$, 在出口变成信号 $R(\omega)e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}$, 其振幅因有因子 $R(\omega)$ 而变化, 而相位由于存在加项 $\varphi(\omega)$ 而移动.

我们假设装置 P 的谱特征 $p(\omega)$ 和输入装置的信号 $f(t)$ 是已知的, 要求装置输出的信号 $x(t) = P(f)(t)$.

把信号 f 表示成傅里叶积分 (5) 的形式, 利用装置 P 和积分的线性性, 我们得到

$$x(t) = P(f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

特别地, 如果

$$p(\omega)=\begin{cases}1, 当\ |\omega|\leqslant \Omega,\\ 0, 当\ |\omega|>\Omega,\end{cases} \tag{8}$$

则

$$x(t)=\int_{-\Omega}^{\Omega} c(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

而且, 从装置的谱特征的定义可以看出,

$$P(e^{i\omega t})=\begin{cases}e^{i\omega t}, 当\ |\omega|\leqslant \Omega,\\ 0, \quad 当\ |\omega|>\Omega.\end{cases}$$

具有谱特征 (8) 的装置 P 能使频率不超过 Ω 的信号通过 (滤过) 而不发生频率畸变, 但信号中属于高频 (超过 Ω) 的部分全部被切断. 由于这个原因, 在无线电技术中把这种装置叫做 (*具频率上界 Ω 的*) *理想低频滤波器*.

现在转入事情的数学方面, 并对这里产生的概念做比较仔细的研究.

b. 傅里叶变换的定义和傅里叶积分

我们按照公式 (3) 和 (5) 引进

定义 1 函数

$$\mathfrak{F}[f](\xi):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{9}$$

叫做函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的*傅里叶变换*.

这里的积分是主值意义下的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx:=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}dx,$$

并且认为它是存在的.

如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的绝对可积函数, 那么, 由于当 $x,\xi\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x)e^{-ix\xi}|=|f(x)|$, 对任何这种函数, 傅里叶变换 (9) 都是有意义的, 而且积分 (9) 关于 ξ 在整个直线上绝对且一致收敛.

定义 2 如果 $c(\xi)=\mathfrak{F}[f](\xi)$ 是函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的傅里叶变换, 则相应于 f 在主值意义下的积分

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{10}$$

叫做*函数 f 的傅里叶积分*.

这样一来, 周期函数的傅里叶系数和傅里叶级数分别是傅里叶变换和傅里叶积分的离散化了的类似物.

定义 3　在主值意义下的积分

$$\mathfrak{F}_c[f](\xi) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x dx, \tag{11}$$

$$\mathfrak{F}_s[f](\xi) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x dx \tag{12}$$

分别叫做函数 f 的傅里叶余弦变换和傅里叶正弦变换.

置 $c(\xi)=\mathfrak{F}[f](\xi), a(\xi)=\mathfrak{F}_c[f](\xi), b(\xi)=\mathfrak{F}_s[f](\xi)$, 我们得到多少已从傅里叶级数知道的关系

$$c(\xi)=\frac{1}{2}(a(\xi)-ib(\xi)). \tag{13}$$

从关系 (11),(12) 可以看出,

$$a(-\xi)=a(\xi),\quad b(-\xi)=-b(\xi). \tag{14}$$

公式 (13),(14) 表明, 如果傅里叶变换对自变量的非负值是已知的, 则它在整个直线 $\mathbb{R}$ 上就完全确定了.

从物理观点看, 这个事实是很自然的 —— 信号的谱应当是对频率 $\omega \geqslant 0$ 而言的; (3) 和 (5) 中的负频率是书写形式的结果. 事实上,

$$\int_{-A}^{A} c(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \left(\int_{-A}^{0}+\int_{0}^{A}\right)c(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

$$=\int_{0}^{A}(c(\xi)e^{ix\xi}+c(-\xi)e^{-ix\xi})d\xi=\int_{0}^{A}(a(\xi)\cos x\xi+b(\xi)\sin x\xi)d\xi,$$

因此, 傅里叶积分 (10) 可以表示成

$$\int_{0}^{\infty}(a(\xi)\cos x\xi+b(\xi)\sin x\xi)d\xi \tag{10'}$$

的形式, 它与傅里叶级数的经典书写形式完全相当.

如果函数 f 是实值的, 那么, 在这种情况下, 从公式 (13),(14) 应得到

$$c(-\xi)=\overline{c(\xi)}, \tag{15}$$

这是因为从定义 (11),(12) 可以看出, 在这种情况下, $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数. 不过, 在条件 $\overline{f(x)}=f(x)$ 下, 等式 (15) 可直接从傅里叶变换的定义 (9) 得出, 只需注意到共轭号可以放到积分号下就行了. 最后所说的这一事实使我们可以断言, 对任何函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 都成立等式

$$\mathfrak{F}[\bar{f}](-\xi)=\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}. \tag{16}$$

注意到下边这些结果也是有益的: 如果 f 是实值偶函数, 即 $\overline{f(x)} = f(x) = f(-x)$, 则

$$\begin{aligned}&\overline{\mathfrak{F}_c[f](\xi)} = \mathfrak{F}_c[f](\xi), \mathfrak{F}_s[f](\xi) \equiv 0,\\&\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)} = \mathfrak{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}[f](-\xi);\end{aligned} \tag{17}$$

如果 f 是实值奇函数, 即 $\overline{f(x)} = f(x) = -f(-x)$, 则

$$\begin{aligned}&\mathfrak{F}_c[f](\xi) \equiv 0, \quad \overline{\mathfrak{F}_s[f](\xi)} = \mathfrak{F}[f](\xi),\\&\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)} = -\mathfrak{F}[f](\xi) = \mathfrak{F}[f](-\xi);\end{aligned} \tag{18}$$

而如果 f 是纯虚的函数, 即 $\overline{f(x)} = -f(x)$, 则

$$\mathfrak{F}[\bar{f}](-\xi) = -\overline{\mathfrak{F}[f](\xi)}. \tag{19}$$

我们还看到, 如果 f 是实值函数, 则它的傅里叶积分 $(10')$ 也可以写成

$$\int_0^{\infty} \sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)} \cos(x\xi + \varphi(\xi)) d\xi = 2\int_0^{\infty} |c(\xi)| \cos(x\xi + \varphi(\xi)) d\xi$$

的形式, 这里 $\varphi(\xi) = -\operatorname{arctg}\dfrac{b(\xi)}{a(\xi)} = \arg c(\xi)$.

例 3 求函数 $f(t) = \dfrac{\sin at}{t}$ (设 $f(0) = a \in \mathbb{R}$) 的傅里叶变换.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[f](\alpha) &= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \frac{\sin at}{t} e^{i\alpha t} dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \frac{\sin at \cos \alpha t}{t} dt\\&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin at\cos\alpha t}{t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(a+\alpha)t}{t} + \frac{\sin(a-\alpha)t}{t}\right) dt\\&= \frac{1}{2\pi}[\operatorname{sgn}(a+\alpha) + \operatorname{sgn}(a-\alpha)]\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{如果 } |\alpha| \leqslant |a|,\\ 0, & \text{如果 } |\alpha| > |a|,\end{cases}\end{aligned}$$

这是因为我们已知狄利克雷积分的值为

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

因此, 如果认为 $a \geqslant 0$, 并取函数 $f(t) = 2h\dfrac{\sin at}{t}$, 那么, 从等式 (7), 如所期望的, 作为这个函数的傅里叶变换, 我们将得到由关系 (6) 表示的这个函数的谱.

在例 3 中考察的函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上不是绝对可积的, 而且它的傅里叶变换有间断. 下边的引理告诉我们, 绝对可积函数的傅里叶变换没有间断.

引理 1 *如果函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 在 $\mathbb{R}$ 上局部可积并绝对可积, 则*

a) 它的傅里叶变换 $\mathfrak{F}[f](\xi)$ 对任意 $\xi \in \mathbb{R}$ 有定义;

b) $\mathfrak{F}[f] \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

c) $\sup\limits_{\xi} |\mathfrak{F}[f](\xi)| \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$;

d) $\mathfrak{F}[f](\xi) \to 0$, 当 $\xi \to \infty$.

◀ 我们已经指出过, $|f(x)e^{-ix\xi}| \leqslant |f(x)|$, 由此可得积分 (9) 的绝对和关于 $\xi \in \mathbb{R}$ 的一致收敛性. 同时, 这也证明了引理的 a) 和 c) 两点.

d) 可从黎曼引理 (参看 §2) 得出.

对固定的有限数 $A \geqslant 0$ 由估计式

$$\left| \int_{-A}^{A} f(x)(e^{-ix(\xi+h)} - e^{-ix\xi}) dx \right| \leqslant \sup_{|x| \leqslant A} |e^{-ixh} - 1| \int_{-A}^{A} |f(x)| dx$$

可以断定积分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

关于 ξ 连续, 它当 $A \to +\infty$ 时的一致收敛性使我们可以断言, $\mathfrak{F}[f] \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. ▶

例 4 我们来求函数 $f(t) = e^{-t^2/2}$ 的傅里叶变换:

$$\mathfrak{F}[f](\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\alpha t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos \alpha t dt.$$

关于参数 α 微分最后这个积分, 然后做分部积分, 则得

$$\frac{d\mathfrak{F}[f]}{d\alpha}(\alpha) + \alpha \mathfrak{F}[f](\alpha) = 0,$$

或

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \mathfrak{F}[f](\alpha) = -\alpha.$$

因此, $\mathfrak{F}[f](\alpha) = ce^{-\alpha^2/2}$, 这里 c 是一个常数, 利用欧拉 - 泊松积分 (参看第 17 章 §2 例 17), 可得

$$c = \mathfrak{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

于是, 我们求出了 $\mathfrak{F}[f](\alpha) = \sqrt{2\pi} e^{-\alpha^2/2}$, 同时还证明了, $\mathfrak{F}_c[f](\alpha) = \sqrt{2\pi} e^{-\alpha^2/2}$, 而 $\mathfrak{F}_s[f](\alpha) \equiv 0$.

c. 傅里叶变换的规范化

傅里叶变换 (3) 和傅里叶积分 (5) 是作为周期函数 f 关于三角函数系 $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ 的傅里叶系数和傅里叶级数的自然的连续统式类似物得到的. 三角函数系 $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ 不是规范正交的, 只是用它写出的傅里叶三角级数比较简单, 所以,

传统上都是用它, 而不用本质上更加自然的规范正交系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}; k\in\mathbb{Z}\right\}$. 在这个规范正交系中, 傅里叶级数有 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{c}_k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ 的形式, 而傅里叶系数用公式 $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx$ 确定.

傅里叶变换

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{21}$$

和傅里叶积分

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{22}$$

是这种自然的傅里叶系数和傅里叶级数在连续统情形下的类似物, 它们与上边研究的傅里叶变换和傅里叶积分只差一个规范化因子.

傅里叶 "系数" 和傅里叶 "级数" 实际上汇合在了相互对称的公式 (21),(22) 中, 因此, 今后我们本质上将仅对积分变换 (21) 的性质感兴趣. 这个积分变换叫做函数 f 的**规范化傅里叶变换**, 在不致引起混淆的情况下, 也可简单地叫做函数 f 的傅里叶变换.

一般地, 把按照规则

$$A(f)(y) = \int_X K(x,y)f(x)dx$$

作用在函数 f 上的算子 A 叫做积分算子或积分变换, 这里 $K(x,y)$ 是给定的函数, 它叫**积分算子的核**, 而 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是一个集合, 在其上给定了积分号下的函数并进行积分. 因为 y 是某集合 Y 中的自由参数, 所以 $A(f)$ 是集合 Y 上的函数.

数学中有一系列重要的积分变换, 其中傅里叶变换占有最关键的地位. 这种情况有很深的根源, 并与变换 (21) 的美妙性质密切相关. 在本节剩余的部分, 我们将对这些性质作一定的描述和展示.

这样一来, 我们将对规范化傅里叶变换 (21) 加以研究.

在用 $\hat{f}$ 表示规范化傅里叶变换的同时, 我们引进记号

$$\widetilde{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\xi x}dx, \tag{23}$$

亦即,$\widetilde{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.

公式 (21),(22) 告诉我们,

$$\widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}} = f, \tag{24}$$

就是说, 积分变换 (21),(22) 是互逆的. 因此, 如果 (21) 是傅里叶变换, 则积分算子 (23) 自然称作**傅里叶逆变换**.

下边将详细讨论和论证傅里叶变换的一些极其美妙的性质. 例如

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi),$$
$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f} \cdot \hat{g},$$
$$\|\hat{f}\| = \|f\|.$$

就是说, 傅里叶变换将微分运算转换成乘以自变量的运算; 函数卷积的傅里叶变换化作它们的傅里叶变换的乘积; 傅里叶变换是保范的 (帕塞瓦尔等式), 从而是相应函数空间的等距变换.

但是, 我们将从反演公式 (24) 开始.

关于傅里叶变换的另一种方便的规范方法可参看练习 10.

d. 函数能表示成傅里叶积分的充分条件

我们现在要证明的定理, 无论形式上还是其内容都完全类似于傅里叶三角级数在一点的收敛性定理. 为了尽量地保持我们熟悉的以前的公式和变换的形式, 在这一段将使用非规范的傅里叶变换 $c(\xi)$ 以及有些繁琐但有时还是比较方便的记号 $\mathfrak{F}[f](\xi)$. 以后, 研究傅里叶积分变换时, 通常是利用函数 f 的规范傅里叶变换 $\hat{f}$.

定理 1 (傅里叶积分在一点的收敛性定理) *设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 在数轴 $\mathbb{R}$ 的每个有限区间上绝对可积且分段连续, 如果它在点 $x \in \mathbb{R}$ 满足迪尼条件, 则它的傅里叶积分 ((5),(10),(10′),(22)) 在这一点收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]$, 即函数 f 在该点的左、右极限之和的一半.*

◀ 根据定理 1, 函数 f 的傅里叶变换 $c(\xi) = \mathfrak{F}[f](\xi)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 因而在任何区间 $[-A, A]$ 上可积. 与当初傅里叶级数的部分和的形式转换类似, 现在, 我们把傅里叶部分积分作如下形式转换:

$$\begin{aligned}
S_A(x) &= \int_{-A}^{A} c(\xi)e^{ix\xi}d\xi = \int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}dt\right)e^{ix\xi}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi}d\xi\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)A} - e^{-i(x-t)A}}{i(x-t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin(x-t)A}{x-t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x-u) + f(x+u)]\frac{\sin Au}{u}du.
\end{aligned}$$

上边第二步计算中的积分换序是合法的. 实际上, 由函数 f 的分段连续性, 对任

意有限数 $B>0$, 成立等式

$$\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}f(t)e^{-it\xi}dt\right)e^{ix\xi}d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}f(t)\left(\int_{-A}^{A}e^{i(x-t)\xi}d\xi\right)dt,$$

由此, 令 $B\to+\infty$, 并注意到积分 $\int_{-B}^{B}f(t)e^{-it\xi}d\xi$ 关于 ξ 的一致收敛性, 就得到我们所要的等式.

现在应用狄利克雷积分 (20) 的值和上边所作的形式转换, 得

$$S_A(x)-\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{[f(x-u)-f(x_-)]+[f(x+u)-f(x_+)]}{u}\sin Au du.$$

最后得出的积分当 $A\to\infty$ 时趋于零. 我们来说明这一点, 从而结束定理的证明.

把这个积分分成沿区间 $]0,1]$ 和沿区间 $[1,+\infty[$ 的两个积分. 根据迪尼条件和黎曼引理, 第一个积分当 $A\to+\infty$ 时趋于零. 而第二个积分, 相应于 $f(x-u),f(x+u),f(x_-),f(x_+)$ 又可分成四个积分. 对头两个, 再次应用黎曼引理, 可知当 $A\to+\infty$ 时它们趋于零. 而后两个积分, 不计常数因子可化成

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin Au}{u}du=\int_A^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv$$

的形式, 当 $A\to+\infty$ 时, 它是趋于零的, 这是因为狄利克雷积分 (20) 是收敛的. ▶

注 1 在定理 1 的证明中, 我们实际上研究的是积分在主值意义下的收敛性. 但是, 如果把傅里叶积分的写法 (10) 和 (10′) 加以比较, 那么, 很明显, 上边对积分 (10) 的收敛性的理解与积分 (10′) 的收敛性正好符合.

特别地, 由定理 1 得到

推论 1 *设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是连续且绝对可积函数. 如果它在每一点 $x\in\mathbb{R}$ 都可微或有有限单边导数, 或者它在 $\mathbb{R}$ 上满足赫尔德条件, 那么, 函数 f 能表示成傅里叶积分.*

这样, 对于所指函数类中的函数, 等式 (3) 和 (5) 或 (21) 和 (22) 成立, 从而证明了, 对这类函数傅里叶变换的反演公式成立.

我们来研究几个例子.

例 5 假设例 2 中考察的装置 P 的输出信号 $v(t)=P(f)(t)$ 是已知的, 试求相应的输入信号 $f(t)$.

在例 2 中我们证明了 f 和 v 满足关系

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

这里 $c(\omega) = \mathfrak{F}[f]$ 是信号 f 的谱 (函数 f 的非规范傅里叶变换), 而 p 是装置 P 的谱特征*. 设所有这些函数都是充分正则的, 根据已证结果,有

$$c(\omega)p(\omega) = \mathfrak{F}[v](\omega).$$

由此得到 $\mathfrak{F}[f](\omega) = c(\omega) = \mathfrak{F}[v](\omega)/p(\omega)$. 知道了 $c(\omega)$ 后, 利用傅里叶积分 (10) 即可求出 f.

例 6 设 $a > 0$, 且

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x \leqslant 0, \end{cases}$$

那么,

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-ix\xi}d\xi = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{a+i\xi}.$$

在傅里叶变换的定义本身的讨论中, 我们在 b 段已经得到它的一系列明显的性质. 我们还注意到, 如果 $f_-(x) := f(-x)$, 则 $\mathfrak{F}[f_-](\xi) = \mathfrak{F}[f](-\xi)$. 这是积分中的一个初等的变量替换.

现在取函数 $e^{-a|x|} = f(x) + f(-x) =: \varphi(x)$. 那么,

$$\mathfrak{F}[\varphi](\xi) = \mathfrak{F}[f](\xi) + \mathfrak{F}[f](-\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

如果再取函数 $e^{-ax}(x > 0)$ 往整个数轴上的奇延拓函数 $\psi(x) := f(x) - f(-x)$, 则

$$\mathfrak{F}[\psi](\xi) = \mathfrak{F}[f](\xi) - \mathfrak{F}[f](-\xi) = -\frac{i}{\pi}\frac{\xi}{a^2+\xi^2}.$$

利用定理 1, 准确地说, 是利用它的推论, 我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}}{a+i\xi}d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{如果 } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{如果 } x = 0, \\ 0, & \text{如果 } x < 0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ae^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}d\xi = e^{-a|x|};$$

* 译者注. 谱特征 $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是由装置的物理特性决定的, 这里假定它是已知的.

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi e^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}d\xi=\begin{cases}e^{-ax}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x=0,\\ -e^{ax}, & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

这里所有的积分都理解为主值意义下的, 虽然第二个积分, 由于它的绝对收敛性, 也可以理解成通常的反常积分.

分离最后两个积分的实部和虚部, 就得出已经遇到过的拉普拉斯积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x\xi}{a^2+\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2a}e^{-a|x|},$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{\xi\sin x\xi}{a^2+\xi^2}d\xi=\frac{\pi}{2}e^{-a|x|}\mathrm{sgn}x.$$

例 7 在例 4 的基础上, (利用初等的变量替换) 容易得到: 如果

$$f(x)=e^{-a^2x^2},$$

则

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}a}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}.$$

追踪观察函数 f 和 $\hat{f}$ 的函数图像随着参数 a 从 $1/\sqrt{2}$ 到 0 的变化同时发生的演化是非常有益的. 其中一个越 "集中", 另一个越 "涂抹开来". 这种状况与海森伯量子力学原理密切相关.(参看练习 6,7)

注 2 在即将结束函数用其傅里叶积分表示的可能性讨论时, 我们指出, 如例 1 和例 3 一致表明的, 在定理 1 及其推论中叙述的关于 f 的条件是能这样表示的充分条件, 而不是必要条件.

2. 函数的微分性质和渐近性质与其傅里叶变换的联系

a. 函数的光滑性及其傅里叶变换递减速度

已从黎曼引理知道, $\mathbb{R}$ 上任意绝对可积函数的傅里叶变换在无穷远处趋于零. 这从上边证明的引理 1 就已看得出来. 现在, 我们来证明, 与傅里叶系数类似, 函数越光滑, 它的傅里叶变换趋于零就越快. 与此相联系的一个事实是: 函数趋于零越快, 其傅里叶变换就越光滑.

我们从以下辅助命题开始.

引理 2 *设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是连续函数, 且在 $\mathbb{R}$ 上有局部分段连续导数 f'. 如果同时*

a) *函数 f' 在 $\mathbb{R}$ 上可积, 则 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时都有极限;*

b) *函数 f 和 f' 在 $\mathbb{R}$ 上都可积, 则当 $x\to\infty$ 时有 $f(x)\to 0$.*

◀ 在对 f, f' 所作的限制下, 成立牛顿 - 莱布尼茨公式

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$

在条件 a) 下, 该等式右边无论在 $x \to +\infty$ 还是在 $x \to -\infty$ 时都有极限.

而如果在无穷远 $(\pm\infty)$ 处有极限的函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上是可积的, 那么, 显然, 这两个极限必都是零. 由此, 在条件 b) 下得: 当 $x \to \infty$ 时, 有 $f(x) \to 0$. ▶

现在证明

命题 1 (函数的光滑性与其傅里叶变换递减速度的联系) *如果 $f \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $(k = 0, 1, \cdots)$, 而且所有的函数 $f, f', \cdots, f^{(k)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上都绝对可积, 那么,*

a) *对于任何 $n \in \{0, 1, \cdots, k\}$,*

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi), \tag{25}$$

b) $\hat{f}(\xi) = 0\left(\frac{1}{\xi^k}\right)$ *当 $\xi \to 0$.*

◀ 如果 $k = 0$, 则 a) 显然是对的, 而 b) 可从黎曼引理推出.

设 $k > 0$. 根据引理 2, 当 $x \to \infty$ 时, 函数 $f, f', \cdots, f^{(k-1)}$ 趋于零. 注意到这一点, 可完成分部积分:

$$\begin{aligned}
\widehat{f^{(k)}}(\xi) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f^{(k-1)}(x) e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{+\infty} + (i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-i\xi x} dx \right) = \cdots \\
&= \frac{(i\xi)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^x \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

于是, 等式 (25) 得证. 这是一个很重要的等式, 我们在另外的地方还会遇到它.

我们已经证明了, $\hat{f}(\xi) = (i\xi)^{-k} \widehat{f^{(k)}}(\xi)$, 但是, 根据黎曼引理, 当 $\xi \to 0$ 时有 $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \to 0$, 因此, 断言 b) 也得证. ▶

b. 函数降低的速度与其傅里叶变换的光滑性

注意到傅里叶变换与傅里叶逆变换几乎是一样的, 作为对命题 1 的补充, 下列命题也是正确的.

命题 2 (函数降低的速度与其傅里叶变换的光滑性的联系) *如果局部可积函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 使函数 $x^k f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积, 那么,*

a) *函数 f 的傅里叶变换属于函数类 $C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;*

b) *成立等式*

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (-i)^k [\widehat{x^k f(x)}](\xi). \tag{26}$$

◀ 对 $k=0$, 关系 (26) 显然是成立的, 而连续性已在引理 1 中证过. 如果 $k>0$, 则当 $n<k$ 时, 在无穷远处有估计 $|x^n f(x)| \leqslant |x^k f(x)|$, 由此推出函数 $x^n f(x)$ 绝对可积. 但是, $|x^n f(x)e^{-i\xi x}| \leqslant |x^n f(x)|$, 所以, 只要援引相应的积分关于参数 ξ 的一致收敛性, 就能逐次在积分号下进行微分:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx,$$

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x}dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

根据引理 1, 最后这个积分关于 ξ 在整个数直线上连续. 因此, 确实有 $\hat{f} \in C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. ▶

c. 速降函数空间

定义 4 用符号 $S(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 或更简短的符号 S, 表示对任意非负整数 α, β 都满足条件

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\beta f^{(\alpha)}(x)| < \infty$$

的一切函数 $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 的集合. 这种函数叫做 (当 $x\to\infty$ 时的) 速降函数.

显然, 速降函数的集合, 关于通常的函数加法和函数与复数的乘法构成线性空间.

例 8 函数 e^{-x^2} 和类 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 中的一切函数都包含在 S 中.

引理 3 *傅里叶变换在 S 上的限制是 S 作为线性空间的自同构.*

◀ 我们来验证 $(f\in S) \Longrightarrow (\hat{f} \in S)$.

为此首先注意, 根据命题 2a) 有 $\hat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

其次注意, 乘以 $x^\alpha (\alpha \geqslant 0)$ 的运算和微分运算 D 在速降函数类中是封闭的. 因此, 对任何非负整数 α 和 β, 从 $f\in S$ 可得函数 $D^\beta(x^\alpha f(x))$ 属于空间 S. 根据黎曼引理, 它的傅里叶变换在无穷远处趋于零. 但是, 根据公式 (25),(26) 有

$$D^\beta(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi) = i^{\alpha+\beta}\xi^\beta \hat{f}^{(\alpha)}(\xi),$$

于是我们证明了, 当 $\xi\to\infty$ 时有 $\xi^\beta \widehat{f}^{(\alpha)}(\xi) \to 0$, 亦即 $\hat{f} \in S$.

现在证明 $\hat{S} = S$, 亦即, 傅里叶变换把 S 映成整个集合 S.

我们记得, 傅里叶变换与傅里叶逆变换满足一个简单的关系 $\hat{f}(\xi) = \tilde{f}(-\xi)$. 显然, 改变函数自变量的符号是把集合 S 变成自身的运算. 因此, 傅里叶逆变换也是把空间 S 变成自身的.

最后, 如果 f 是 S 中的任意函数, 那么, 根据已经证明了的结果 $\varphi = \tilde{f} \in S$, 再由反演公式 (24), 得到 $f = \hat{\varphi}$.

傅里叶变换的线性性是显然的, 因此, 至此完全证明了引理 3. ►

3. 傅里叶变换的最重要的演算性质

a. 一些定义、记号和例子

上边我们已相当仔细地研究了定义在实直线上的函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的傅里叶变换. 特别是, 我们弄清了函数本身的正则性与它的傅里叶变换相应的性质之间的联系. 现在, 即当这个问题原则上已经解决以后, 我们将只考察充分正则函数的傅里叶变换, 为的是避开过于复杂的技术困难, 并集中地阐述傅里叶变换的基本演算性质. 这里我们将不只考虑一维的, 而且也考虑高维的傅里叶变换, 对它的基本性质的推导实际上并不依赖于前边讲的内容.

只想研究一维情形的读者可假定下边的 $n = 1$.

定义 5 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数. 函数

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi, x)} dx \tag{27}$$

叫做函数 f 的**傅里叶变换**.

同时注意,$x = (x_1, \cdots, x_n), \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n), (\xi, x) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$, 而认为积分是在主值意义下收敛的:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n := \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} \cdots \int_{-A}^{A} \varphi(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

在这种情况下, 高维傅里叶变换 (27) 可以看做 n 个一维的傅里叶变换, 它们是对变量 $x_1, \cdots, x_n$ 逐个进行的.

当函数 f 绝对可积时, 在什么意义下理解积分 (27) 的问题, 一般不会发生.

设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 和 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 是多重指标, 它们由非负整数 $\alpha_j, \beta_j, j = 1, \cdots, n$ 组成, 照例, 还设 D^α 表示微分算子 $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, 其阶数 $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, 而 $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\beta_n}$.

定义 6 用符号 $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 或者在不致引起混淆的情形用符号 S 表示一切非负多重指标 α, β 都满足条件

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty$$

的 $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中的函数 f 的集合. 这种函数叫做 (当 $x \to \infty$ 时的) **速降函数**.

显然, 具有函数加法的运算和函数乘以复数的运算的集合 S 是线性空间, 叫速降函数空间.

例 9. 函数 $e^{-|x|^2}$ (其中 $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$) 和所有 $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 类中具紧支集的函数都包含在 S 中.

如果 $f \in S$, 则关系式 (27) 中的积分显然是绝对收敛且关于 ξ 在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 上是一致的. 其次, 如果 $f \in S$, 那么, 根据通常的法则, 这个积分关于变量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 可任意多次微分. 这样一来, 如果 $f \in S$, 则 $\hat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

例 10 我们来求函数 $\exp(-|x|^2/2)$ 的傅里叶变换.

当积分速降函数时, 显然可以应用富比尼定理, 而且, 如果需要的话, 可以随意改变反常积分的顺序.

在给定情况下, 利用富比尼定理和例 4, 得

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} \cdot e^{-i(\xi, x)} dx$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_j^2/2} e^{-i\xi_j x_j} dx_j = \prod_{j=1}^{n} e^{-\xi_j^2/2} = e^{-|\xi|^2/2}.$$

现在, 我们来列出并证明傅里叶变换的基本演算性质, 同时, 为避免在技术上过于复杂, 我们认为傅里叶变换是对 S 类函数进行的. 这大约就像, 但愿把有理数的运算学好, 而不立即去学整个空间 $\mathbb{R}$ 中的运算. 完备化的过程是同一的. 这方面可参看练习 5.

b. 线性性

傅里叶变换的线性性是显然的: 它由积分的线性性得到.

c. 微分算子与傅里叶变换的相互关系

成立公式

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{28}$$

$$(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi) = (i)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}(\xi). \tag{29}$$

◀ 像公式 (25) 一样, 这里的第一个等式是用分部积分得到的 (当然, 如果是讨论空间 $\mathbb{R}^n$ 中的问题, $n > 1$, 要先用富比尼定理).

公式 (29) 推广了关系式 (26), 它是关于参数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 直接微分积分 (27) 得到的. ▶

注 3 注意到显然的估计

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < +\infty,$$

从等式 (28) 推出: 对任何函数 $f \in S$, 当 $\xi \to \infty$, 有 $\hat{f}(\xi) \to 0$, 这是因为 $D^\alpha f \in S$.

其次, 联合公式 (28) 和 (29), 可得

$$D^\beta(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi) = (i)^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi),$$

由此可得: 如果 $f \in S$, 那么, 对于任何非负多重指标 α 和 β, 当在 $\mathbb{R}^n$ 中 $\xi \to \infty$, 有 $\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi) \to 0$. 这样就证明了

$$(f \in S) \Rightarrow (\hat{f} \in S).$$

d. 反演公式

定义 7 由等式

$$\tilde{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(\xi,x)} dx \tag{30}$$

确定的算子叫做*傅里叶逆变换*.

成立以下*傅里叶变换的反演公式*:

$$\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f \tag{31}$$

或写成傅里叶积分形式的公式:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi. \tag{32}$$

利用富比尼定理, 公式 (31) 可立刻从一维傅里叶变换情形的相应的公式 (24) 推出. 但在这里, 我们仍按原来的许诺, 独立地证明这个公式.

◀ 首先证明, 对任何函数 $f, g \in S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y) dy. \tag{33}$$

这里的两个积分都有意义, 因为 $f, g \in S$, 从而根据注 1 知, 这时也有 $\hat{f}, \hat{g} \in S$.

我们来变换欲证等式左边的积分

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \left[\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(\xi,y)} dy\right] e^{i(x,\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-i(\xi,y-x)} d\xi\right] f(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y) dy.
\end{aligned}$$

这里所做的积分次序调换是合法的, 这是因为 f 和 g 都是速降函数. 这样, 等式 (33) 就被验证了.

现在, 我们注意到, 对任何 $\varepsilon > 0$, 有

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi) e^{i(y,\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{-i(y,\frac{u}{\varepsilon})} du = \varepsilon^{-n} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

由等式 (33), 这意味着,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x+y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u) f(x+\varepsilon u) du.$$

注意到这串等式中两头的积分关于 ε 是绝对且一致收敛的, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 我们得到

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u) du.$$

我们在这里令 $g(x) = e^{-|x|^2/2}$. 在例 10 中我们看到, $\hat{g}(u) = e^{-|u|^2/2}$. 只要再记起欧拉 - 泊松积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 借助富比尼定理即可得到 $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2/2} du = (2\pi)^{n/2}$, 并最后得出等式 (32). ►

注 4 与 (32) 中的等式 $\tilde{\hat{f}} = f$ 不同, 在关系 (31) 中还有等式 $\hat{\tilde{f}} = f$. 但这后一个等式可立刻从前一个推出, 因为 $\tilde{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$ 和 $\widetilde{f(-x)} = \widehat{f(x)}$.

注 5 我们已经看到 (参看注 3), 如果 $f \in S$, 则 $\hat{f} \in S$, 从而 $\tilde{f} \in S$, 亦即 $\widehat{S} \subset S$ 且 $\widetilde{S} \subset S$. 现在, 由关系 $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f$ 可以断言, $\widetilde{S} = \widehat{S} = S$.

e. 帕塞瓦尔等式

习惯上把关系式

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \tag{34}$$

称作帕塞瓦尔等式, 它的展开形式是

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi. \tag{34'}$$

特别地, 从 (34) 得

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \|\hat{f}\|^2. \tag{35}$$

从几何的观点看, 等式 (34) 表示, 傅里叶变换保持函数 (空间 S 的向量) 间的内积, 也就是说, 它是空间 S 的等距变换.

有时也把关系式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx \tag{36}$$

叫做帕塞瓦尔等式, 它可从等式 (33) 得到, 只要令那里的 $x = 0$ 即可.

基本的帕塞瓦尔等式 (34) 是从关系 (36) 得到的, 只要以 $\bar{\hat{g}}$ 代替那里的 g 并利用 $(\widehat{\bar{\hat{g}}}) = g$ (因为 $\hat{\bar{\varphi}} = \bar{\tilde{\varphi}}$ 且 $\tilde{\hat{g}} = g$).

f. 傅里叶变换与卷积

成立以下重要等式:

$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}, \tag{37}$$

$$\widehat{(f \cdot g)} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g} \tag{38}$$

(有时叫做博雷尔公式). 它们借助傅里叶变换把函数的卷积运算和函数的乘法运算联系起来.

我们来证明这些公式:

$$\blacktriangleleft\ \widehat{(f * g)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i(\xi,x)} dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right] e^{-i(\xi,x)} dx$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(\xi,x-y)} dx \right] dy$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(\xi,u)} du \right] dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \hat{f}(\xi) dy = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

这里所做的积分次序调换是没有问题的, 因为 $f, g \in S$.

公式 (38) 能借助反演公式 (32) 经过类似的计算得到. 不过, 只要记起 $\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f, \bar{\hat{f}} = \tilde{\bar{f}}, \bar{\tilde{f}} = \hat{\bar{f}}$ 以及 $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}, \overline{u * v} = \bar{u} * \bar{v}$, 等式 (38) 就可从已经证明了的关系式 (37) 推出. ▶

注 6 如果在公式 (37),(38) 中以 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 代替 f 和 g, 并对所得等式的两端进行傅里叶变换, 就得到关系式

$$\widetilde{(f \cdot g)} = (2\pi)^{-n/2} (\tilde{f} * \tilde{g}), \tag{37'}$$

$$\widetilde{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} (\tilde{f} \cdot \tilde{g}). \tag{38'}$$

4. 应用举例

现在我们来演示一下怎样把傅里叶变换 (也部分地涉及傅里叶级数), 应用于具体问题.

a. 波动方程

傅里叶变换能成功地应用于数学物理方程, 这 (在数学上) 首先与傅里叶变换能用代数的乘法运算替代微分运算密切相关.

譬如, 求函数 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足方程

$$a_0u^{(n)}(x)+a_1u^{(n-1)}(x)+\cdots+a_nu(x)=f(x),$$

这里 $a_0,\cdots,a_n$ 是常数系数, 而 f 是已知函数. 对这个等式两端进行傅里叶变换 (假定函数 u 和 f 是充分正则的), 由关系式 (28), 我们得到一个关于 $\hat{u}$ 的代数方程

$$(a_0(i\xi)^n+a_1(i\xi)^{n-1}+\cdots+a_n)\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi).$$

从它解出 $\hat{u}(\xi)=\hat{f}(\xi)/P(i\xi)$, 进行傅里叶逆变换就得到 $u(x)$.

我们将把这个思想用于求函数 $u=u(x,y)$ 使之在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 中满足一维波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\quad(a>0)$$

和初始条件

$$u(x,0)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

这里以及在以下的例子中, 我们将不去论证那些中间计算的合理性, 因为在求出所需的函数后, 直接验证它是所提问题的解, 通常要比进行论证和克服过程中产生的那些技术性困难容易得多. 顺便说一句, 在和这些困难进行的原则性斗争中起本质作用的是前边曾提及的广义函数.

这样一来, 把 t 当做参数, 关于 x 对方程两边做傅里叶变换. 那么, 只要一方面认为关于 t 的微分可以移到积分号外, 另一方面利用公式 (28), 我们就将得到

$$\hat{u}''_{tt}(\xi,t)=-a^2\xi^2\hat{u}(\xi,t),$$

由此求出

$$\hat{u}(\xi,t)=A(\xi)\cos a\xi t+B(\xi)\sin a\xi t.$$

根据初始条件

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)=A(\xi),$$
$$\hat{u}'_t(\xi,0)=\widehat{(u'_t)}(\xi,0)=\hat{g}(\xi)=a\xi B(\xi).$$

这样一来,

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)&=\hat{f}(\xi)\cos a\xi t+\frac{\hat{g}(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t\\&=\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)(e^{ia\xi t}+e^{-ia\xi t})+\frac{1}{2}\frac{\hat{g}(\xi)}{ia\xi}(e^{ia\xi t}-e^{-ia\xi t}).\end{aligned}$$

给这个等式添上因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}$ 并关于 ξ 积分, 简言之, 就是取傅里叶逆变换, 利用公式 (28), 立即得到

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-at)+f(x+at))+\frac{1}{2}\int_0^t(g(x-a\tau)+g(x+a\tau))d\tau.$$

b. 热传导方程

傅里叶变换还有一部分 (即公式 (37′), (38′)) 在研究上一个例子中没有用到, 而在寻求函数 $u=u(x,t), x\in\mathbb{R}^n, t\geqslant 0$, 使之在全空间 $\mathbb{R}^n$ 中满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u \quad (a>0)$$

和初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 时, 显示了很好的作用.

这里照例设 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

关于变量 $x\in\mathbb{R}^n$ 完成傅里叶变换后, 根据 (28), 我们将得到一个常微分方程

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t)=a^2(i)^2(\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)\hat{u}(\xi,t),$$

由它推出

$$\hat{u}(\xi,t)=c(\xi)e^{-a^2|\xi|^2t},$$

这里 $|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$. 注意到, $\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)$, 我们求出

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)\cdot e^{-a^2|\xi|^2t}.$$

做傅里叶逆变换, 并注意关系式 (37′), 得到

$$u(x,t)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}f(y)E_0(y-x,t)dy,$$

这里 $E_0(x,t)$ 是那样一个函数, 它关于 x 的傅里叶变换是函数 $e^{-a^2|\xi|^2t}$. 函数 $e^{-a^2|\xi|^2t}$ 关于 ξ 的傅里叶逆变换我们实际上已从例 10 知道了. 通过明显的变量替换, 我们求出

$$E_0(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

置 $E(x,t)=(2\pi)^{-n/2}E_0(x,t)$, 我们就求出了早已熟悉 (参看第 17 章 §4 例 15) 的热传导方程的基本解

$$E(x,t)=(2a\sqrt{\pi t})^{-n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} \quad (t>0)$$

和满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 的解的公式

$$u(x,t)=(f*E)(x,t).$$

c. 泊松公式

称函数 $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (设 $\varphi \in S$) 及其傅里叶变换 $\hat{\varphi}$ 之间的下述关系式为泊松公式:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n). \tag{39}$$

公式 (39) 是从等式

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx} \tag{40}$$

令 $x = 0$ 得到的. 我们来证明 (40), 假定 φ 是速降函数.

◀ 因为 $\varphi, \hat{\varphi} \in S$, 等式 (40) 两边的级数绝对收敛 (从而它们可任意求和) 且关于整个直线上的 x 一致收敛. 其次, 由于速降函数的导数本身也是 S 类函数, 所以, 可以断言, 函数 $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$ 属于函数类 $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. 显然, 函数 f 是 2π-周期的. 设 $\{\hat{c}_k(f)\}$ 是它关于规范正交系 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ 的傅里叶系数. 那么,

$$\begin{aligned} \hat{c}_k(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(x + 2\pi n) e^{-ikx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx =: \hat{\varphi}(k). \end{aligned}$$

但是, f 是光滑的 2π- 周期函数, 因此, 它的傅里叶级数在任何点 $x \in \mathbb{R}$ 都收敛于它自己. 因此, 在任意点 $x \in \mathbb{R}$ 都成立关系式

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = f(x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_k(f) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx}. \end{aligned}$$ ▶

注 7 从证明可以看出, 关系式 (39),(40) 远远不是只对 S 类函数才成立. 但是, 毕竟在 $\varphi \in S$ 时, 等式 (40) 可关于变量 x 任意次逐项微分, 作为推论, 能得到一些 $\varphi, \varphi', \cdots$ 和 $\hat{\varphi}$ 之间的新的关系式.

d. 科捷利尼科夫[①]定理

和前边一样, 这是一个以傅里叶级数和傅里叶积分的漂亮联合为基础的例子, 它与信号沿通讯管道传递的理论有直接关系. 为了使这个例子不显得生硬. 我们提醒,

[①]科捷利尼科夫 (В. А. Котелbников) (生于 1908 年) 是苏联学者, 著名的无线电通讯专家.

由于我们感官的局限性, 我们只能感受到一定的频带中的信号. 譬如, 耳朵 "听见" 的音频范围是从 20 赫兹到 2 万赫兹. 这样一来, 对无论什么信号, 我们就像一个滤波器 (参看第 1 段) , 仅仅截取了它们的谱中被限定的部分, 并把这些信号作为具有限谱的信号接受.

因此立即认为, 我们发出或接收到的信号 $f(t)$ (这里 t 是时间, $-\infty < t < \infty$) 都有有限谱, 它的谱仅对不超过某一临界值 $a > 0$ 的频率 ω 才异于零. 这样一来, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ 当 $|\omega| > a$, 因此, 具有限谱的函数的表示式

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

化成了只在区间 $[-a, a]$ 上的积分:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{41}$$

在区间 $[-a, a]$ 上, 我们把函数 $\hat{f}(\omega)$ 关于这个区间上的完全正交系 $\{e^{i\frac{\pi\omega}{a}k}; k \in \mathbb{Z}\}$ 展成傅里叶级数

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) e^{i\frac{\pi\omega}{a}k}. \tag{42}$$

注意到公式 (41), 我们得到这个级数的系数 $c_k(\hat{f})$ 的以下简单表达式:

$$c_k(\hat{f}) := \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) e^{-i\frac{\pi\omega}{a}k} d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\left(-\frac{\pi}{a}k\right). \tag{43}$$

把级数 (42) 代入积分 (41), 并考虑到关系式 (43), 我们求出

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) e^{i\omega t - i\frac{\pi k}{a}\omega} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \int_{-a}^{a} e^{i\omega(t - \frac{\pi}{a}k)} d\omega. \end{aligned}$$

算出这些初等积分后, 我们就得到科捷列尼科夫公式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \frac{\sin a\left(t - \dfrac{\pi}{a}k\right)}{a\left(t - \dfrac{\pi}{a}k\right)} \tag{44}$$

公式 (44) 表明, 为了重建用函数 $f(t)$ 描述的通信信息, 如果 $f(t)$ 有集中在频带 $|\omega| \leqslant a$ 内的有限谱, 则只需每过相等的一段时间 $\Delta = \pi/a$, 就沿通讯管道拍发给定函数的值 $f(k\Delta)$ (所谓读值).

这个断言连同公式 (44) 属于科捷列尼科夫, 叫做科捷列尼科夫理论或读数理论.

注 8 插值公式 (44) 本身在数学中还在科捷列尼科夫的工作 (1933 年) 以前就已经知道. 但是, 展开式 (44) 在连续信息沿通讯管道传递理论中的基本意义是科捷列尼科夫的工作首次指出的. 推导公式 (44) 的上述思想也是属于科捷列尼科夫的.

注 9 通讯的实际播发和接收时间实际上是有限的, 因此, 代替整个级数 (44), 取它的某一部分和 $\sum\limits_{-N}^{N}$. 对这时所产生的误差有专门的研究.

注 10 如果已知在给定的通讯管道中播发通讯信号 $f(t)$ 的一个读值需要占用多少时间, 则容易估计出沿该通讯管道可以平行播出这种通讯信号的数量. 换句话说, 出现了对通讯管道的通过能力做出估计的可能性 (此外, 通过能力还依赖于通讯信号的信息浓度, 而信息浓度是用信号 $f(t)$ 的谱说明的).

练 习

1. a) 详细写出关系式 (16)—(19) 的证明.

b) 把傅里叶变换看做映射 $f \mapsto \hat{f}$, 试证, 它有如下经常用到的性质:

$$f(at) \mapsto \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(相似法则);

$$f(t-t_0) \mapsto \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

(输入信号位移 —— 傅里叶原像关于时间的位移, 或位移定理);

$$[f(t+t_0) \pm f(t-t_0)] \mapsto \begin{cases} \hat{f}(\omega)2\cos\omega t_0, \\ \hat{f}(\omega)2\sin\omega t_0, \end{cases}$$

$$f(t)e^{\pm i\omega_0 t} \mapsto \hat{f}(\omega \pm \omega_0)$$

(傅里叶变换关于频率的位移);

$$f(t)\cos\omega_0 t \mapsto \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)+\hat{f}(\omega+\omega_0)],$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \mapsto \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)]$$

(简谐信号的振幅调制);

$$f(t)\sin^2\frac{\omega_0 t}{2} \mapsto \frac{1}{4}[2\hat{f}(\omega)-\hat{f}(\omega-\omega_0)-\hat{f}(\omega+\omega_0)].$$

c) 试求下列函数的傅里叶变换 (或如通常说的傅里叶像):

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A}, & \text{当 } |t| \leqslant A, \\ 0, & \text{当 } |t| > A \end{cases}$$

(矩形脉冲);

$$\Pi_A(t)\cos\omega_0 t$$

(用矩形脉冲调制的简谐信号);

$$\Pi_A(t+2A)+\Pi_A(t-2A)$$

(两个同一极性矩形脉冲);

$$\Pi_A(t-A)-\Pi_A(t+A)$$

(两个不同极性的矩形脉冲);

$$\Lambda_A(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}\left(1-\dfrac{|t|}{A}\right), & 当\ |t|\leqslant A,\\ 0, & 当\ |t|>A.\end{cases}$$

(三角形脉冲);

$$\cos at^2\ 和\ \sin at^2 (a>0);$$
$$|t|^{-\frac{1}{2}}\ 和\ |t|^{-\frac{1}{2}}e^{-a|t|}(a>0).$$

d) 试求下列函数的傅里叶原像:

$$\sin c\frac{\omega A}{\pi},\quad 2i\frac{\sin^2\omega A}{\omega A},\quad 2\sin c^2\frac{\omega A}{\pi},$$

这里 $\sin c\dfrac{x}{\pi}:=\dfrac{\sin x}{x}$ 是读数函数.

e) 利用上边的结果, 求下述我们已经遇到过的积分的值:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2dx, \int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2dx.$$

f) 验证函数 $f(t)$ 的傅里叶积分可以写成以下任一种形式:

$$\begin{aligned}f(t)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\omega)e^{it\omega}d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}dx\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)dx.\end{aligned}$$

2. 设 $f=f(x,y)$ 是二维拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 在半平面 $y\geqslant 0$ 上满足以下条件的解: $f(x,0)=g(x)$, 而且对任何 $x\in\mathbb{R}$ 当 $y\to+\infty$ 时有 $f(x,y)\to 0$.

a) 验证函数 f 关于变量 x 的傅里叶变换 $\hat f(\xi,y)$ 具有 $\hat g(\xi)e^{-y|\xi|}$ 的形式.

b) 试求函数 $e^{-y|\xi|}$ 关于变量 ξ 的傅里叶原像.

c) 现在, 试求 (在第 17 章 §4 例 5 已经碰到过的)函数 f 的泊松积分形式的表达式

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}g(\xi)d\xi.$$

3. 我们记得, 量 $M_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$ 叫做函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的 n 阶矩. 特别地, 如果 f 是一个概率分布密度, 亦即 $f(x) \geqslant 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, 则 $x_0 = M_1(f)$ 是具有分布 f 的随机变量 x 的数学期望, 而这个随机变量的方差 $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty}(x - x_0)^2 f(x)dx$ 能表示成 $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$ 的形式.

我们考察函数 f 的下列傅里叶变换

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

把 $e^{-i\xi x}$ 展成级数, 试证:

a) 如果, 譬如, $f \in S$, 则 $\hat{f}(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-i)^n M_n(f)}{n!}\xi^n$.

b) $M_n(f) = (i)^n \hat{f}^{(n)}(0), n = 0, 1, \cdots$

c) 现设 f 是实值的, 则 $\hat{f}(\omega) = A(\xi)e^{i\varphi(\xi)}$, 这里 $A(\xi)$ 是模, 而 $\varphi(\xi)$ 是 $\tilde{f}(\xi)$ 的辐角, 同时, $A(\xi) = A(-\xi)$ 和 $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$. 为规范起见, 设 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. 试验证

$$\hat{f}(\xi) = 1 + i\varphi'(0)\xi + \frac{A''(0) - (\varphi'(0))^2}{2}\xi^2 + o(\xi^2) \quad (\xi \to 0)$$

且

$$x_0 := M_1(f) = -\varphi'(0), \text{而 } \sigma^2 = M_1^2(f) - M_2(f) = -A''(0).$$

4. a) 验证函数 $e^{-a|x|}(a > 0)$ 以及它的对 $x \neq 0$ 的一切导数, 在无穷远处的减小速度比变量 $|x|$ 的任何负指数幂都快. 尽管如此, 这个函数并不属于函数类 S.

b) 试证, 这个函数的傅里叶变换在 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微, 但不属于函数类 S (仍然是因为 $e^{-a|x|}$ 在 $x = 0$ 不可微).

5. a) 试证函数类 S 的函数在空间 $\mathfrak{R}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 中稠密, 这里 $\mathfrak{R}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ 是由绝对平方可积函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 构成的, 在其中定义了内积 $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(f \cdot \bar{g})(x)dx$, 由这个内积产生的范数 $\|f\| = (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ 以及距离 $d(f, g) = \|f - g\|$.

b) 现在把 S 看做具有上述距离的距离空间 (即有 $\mathbb{R}^n$ 上均方差意义下的收敛性). 设 $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, 或简记做 L_2, 是距离空间 (S, d) 的完备化 (参看第 9 章,§5). 每个元素 $f \in L_2$ 由函数 $\varphi_k \in S$ 的序列 $\{\varphi_k\}$ 确定, 这个序列是距离 d 意义下的柯西序列.

试证, 这时函数 φ_k 的傅里叶像的序列 $\{\hat{\varphi}_k\}$ 也是 S 中的柯西序列, 因而, 它给出一个确定的元素 $\hat{f} \in L_2$, 这个元素很自然地应叫做元素 $f \in L_2$ 的傅里叶变换.

c) 在 L_2 中引进自然的代数结构和内积, 关于它们, 傅里叶变换 $L_2 \xrightarrow{\sim} L_2$ 是 L_2 到自身上的线性同构映射.

d) 通过函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ 这个例子可以看出, 如果 $f \in \mathfrak{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 未必有 $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. 虽然如此, 如果 $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 则由于 f 是局部可积的, 可以考察积分

$$\hat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}dx.$$

试验证: $\hat{f}_A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 且 $\hat{f}_A \in \mathfrak{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

e) 试证: 当 $A \to +\infty, \hat{f}_A$ 在 L_2 中趋于某元素 $\hat{f} \in L_2$, 且当 $A \to +\infty$ 时有 $\|\hat{f}_A\| \to \|\hat{f}\| = \|f\|$(这叫普朗谢雷尔① 定理).

6. **测不准原理.** 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(p)$ 是 S 类函数 (或练习 5 中空间 L_2 的元素), 而且 $\psi = \hat{\varphi}$ 以及 $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2(p)dp = 1$. 在这种情况下, 函数 $|\varphi|^2$ 和 $|\psi|^2$ 可以分别看做是两个随机变量 x 和 p 的概率分布密度.

a) 试证: 可用函数 φ 的自变量位移 (相当于特别选取自变量的起算点), 不改变量 $\|\hat{\varphi}\|$, 但能使得到的新函数 φ, 使 $M_1(|\varphi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x|\varphi|^2(x)dx = 0^*$, 然后, 在不改变 $M_1(|\varphi|^2) = 0$ 的前提下, 对函数 ψ 经过类似的自变量位移达到使 $M_1(|\psi|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p|\psi|^2(p)dp = 0$.

b) 对于实参数 α, 考察量

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x\varphi(x) + \varphi'(x)|^2 dx \geqslant 0,$$

试根据帕塞瓦尔等式和公式 $\widehat{\varphi'}(p) = ip\hat{\varphi}(p)$ 证明 $\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - \alpha + M_2(|\psi|^2) \geqslant 0$.(关于 M_1 和 M_2 的定义可参看练习 3.)

c) 试由此推出

$$M_2(|\varphi|^2)M_2(|\psi|^2) \geqslant \frac{1}{4}.$$

这个关系式表明函数 φ 本身越 "集中", 它的傅里叶变换就越 "疏散", 反过来也对. (关于这方面可参看例 1 和练习 7 b)).

在量子力学中, 这个关系式叫做测不准原理, 它有具体的物理含义. 譬如, 不可能把量子的坐标和它的动量同时测量精确. 这个基本的事实 (叫做海森堡②测不准原理) 在数学上与上边求出的 $M_2(|\varphi|^2)$ 和 $M_2(|\psi|^2)$ 之间的关系是一致的.

以下三个练习给出了初等的广义函数傅里叶变换概念.

7. a) 试利用例 1 求出用函数

$$\Delta_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha}, & \text{当 } |t| \leqslant \alpha, \\ 0, & \text{当 } |t| > \alpha. \end{cases}$$

表示的信号的谱.

b) 细致地考察当 $\alpha \to +\infty$ 时函数 $\Delta_\alpha(t)$ 及其谱的变化情况; 按照你的看法, δ- 函数所表示的单位脉冲的谱是怎样的.

c) 现在试利用例 2 求出理想低频滤波器 (具频率上限 a) 的输出信号 $\varphi(t)$, 它是单位脉冲 $\delta(t)$ 的响应.

d) 现在试根据所得到的结果解释科捷列尼科夫级数 (44) 的项的物理意义, 并提供一个以科捷列尼科夫公式 (44) 为基础播发具有限谱信号 $f(t)$ 的方案.

8. **施瓦兹空间.** 试验证:

a) 如果 $\varphi \in S$, 而 P 是多项式, 则 $(P \cdot \varphi) \in S$.

---

①普朗谢雷尔 (M. Plancherel) (1885—1967) 是瑞士数学家.

* 译者注. 原著中本练习把 $M_1(|\varphi|^2), M_1(|\psi|^2)$ 误印成 $M_1(|\varphi|)$ 和 $M_1(|\psi|)$.

②海森堡 (B. Heisenberg) (1901—1976) 是德国物理学家, 是量子力学的创始人之一.

b) 如果 $\varphi \in S$, 则 $D^{\alpha}\varphi \in S$ 且 $D^{\beta}(P \cdot D^{\alpha}\varphi) \in S$, 这里 α 和 β 是任意多重指标, 而 P 是多项式.

c) 在 S 中引进以下收敛概念. 函数 $\varphi_k \in S$ 的序列 $\{\varphi_k\}$ 被认为收敛于零, 如果对任何非负多重指标 α, β, 函数序列 $\{x^{\beta}D^{\alpha}\varphi_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于零. 关系式 $\varphi_k \to \varphi \in S$ 表示 $(\varphi - \varphi_k) \to 0$ 在 S 中.

附加了这里指出的收敛性的速降函数线性空间 S 叫做施瓦兹空间.

试证: 如果 $\varphi_k \to \varphi$ 在 S 中, 则 $\hat{\varphi}_k \to \hat{\varphi}$ 在 S 中当 $k \to \infty$. 这样一来, 傅里叶变换是施瓦兹空间中的线性连续变换.

9. *缓增广义函数空间* S'. 定义在速降函数空间 S 上的线性连续泛函叫做*缓增广义函数*. 这种泛函的线性空间 (空间 S 的共轭空间) 用符号 S' 表示. 泛函 $F \in S'$ 在函数 $\varphi \in S$ 上的值用符号 $F(\varphi)$ 表示.

a) 设 $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是 n 个变量的多项式, 而 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是局部可积函数且在无穷远处满足估计 $|f(x)| \leqslant |P(x)|$ (亦即当 $x \to \infty$ 时它可能是增长的, 但增长速度不超过幂式增长). 试证: 如果置

$$f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in S)$$

则可把 f 看做是空间 S' 的 (正则) 元素.

b) 广义函数 $F \in S'$ 乘以通常的函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, 照例是用关系 $(fF)(\varphi) := F(f\varphi)$ 定义. 试验证: 对类 S' 中的广义函数不仅能合理地定义它与函数 $f \in S$ 的乘积, 而且可以合理定义它与多项式 $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 的乘积.

c) 广义函数 $F \in S'$ 的微分是用传统方法定义的: $(D^{\alpha}F)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}F(D^{\alpha}\varphi)$.

试证这个定义是合理的, 亦即, 如果 $F \in S'$, 则 $D^{\alpha}F \in S'$ 对任何非负整数多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 都成立.

d) 如果 f 和 φ 是充分正则的函数 (譬如属于函数类 S), 则从关系 (36) 可以看出, 成立等式

$$\hat{f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)dx = f(\hat{\varphi}).$$

这个等式 (帕塞瓦尔等式) 也用来作为定义广义函数 $F \in S'$ 的傅里叶变换 $\hat{F}$ 的基础, 按照定义, 令 $\hat{F}(\varphi) := F(\hat{\varphi})$.

由于空间 S 关于傅里叶变换是不变的, 这个定义对任何元素 $F \in S'$ 都是合理的.

试证: 这个方法对 $\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中的广义函数不行. 正是这种情况, 说明了施瓦兹空间 S' 在傅里叶变换理论及其在广义函数的应用中所起的重要作用.

e) 在练习 7 中我们得到了 δ- 函数的傅里叶变换的初等的概念. δ- 函数的傅里叶变换若能直接按照正则函数的傅里叶变换的一般定义去求, 那么, 我们将有

$$\hat{\delta}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)e^{-i(\xi,x)}dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

现在, 试证明, 用正确的方法求广义函数 $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$ 的傅里叶变换, 亦即根据等式 $\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\hat{\varphi})$ 去求, 将得到 (同样结果) $\delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$. 于是,$\delta$- 函数的傅里叶变换是常数函数. (可以改变傅里叶变换的规范, 使这个常数等于 1, 参看练习 10.)

f) S'中的收敛性, 照例是在广义函数意义上的收敛性, 其含义是: $(F_n \to F$ 在 S' 中当 $n \to \infty) := (\forall \varphi \in S(F_n(\varphi) \to F(\varphi)$ 当 $n \to \infty))$.

试验证 δ- 函数的反演公式 (傅里叶积分):

$$\delta(x) = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^{A} \cdots \int \hat{\delta}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

g) 设 $\delta(x-x_0)$ 像通常一样表示 δ- 函数往点 x_0 的位移, 亦即 $\delta(x-x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$. 试验证: 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) (= \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \delta(x-n))$$

在空间 S' 中收敛 (这里 $\delta \in S'(\mathbb{R}), n \in \mathbb{Z}$).

h) 利用广义函数收敛级数的逐项微分合法性, 并注意到 §2 练习 13 f) 中的等式, 证明: 如果 $F = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$, 则

$$\hat{F} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi n).$$

i) 试利用关系式 $\hat{F}(\varphi) = F(\hat{\varphi})$ 从上边的结果求出泊松公式 (39).

j) 试证在椭圆函数理论和热传导理论中起重要作用的关系式 (θ- 公式):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2} \quad (t > 0).$$

10. 如果函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的傅里叶变换 $\check{\mathfrak{F}}[f]$ 由公式

$$\check{f}(\nu) := \check{\mathfrak{F}}[f](\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

定义, 则许多与傅里叶变换有关的公式都将变得特别简单和优美.

a) 试验证: $\check{f}(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \check{f}\left(\dfrac{u}{2\pi}\right)$.

b) 试证: $\check{\mathfrak{F}}[\check{\mathfrak{F}}[f]](t) = f(-t)$, 亦即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu.$$

这是 $f(t)$ 按不同频率 ν 的谐波展开的最自然的形式, 而这个展开式中的 $\check{f}(\nu)$ 是函数 f 的频谱.

c) 试验证: $\check{\delta} = 1, \check{1} = \delta$.

d) 试证: 泊松公式 (39) 现在可取以下特别优美的形式:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(n).$$

第十九章 渐近展开

我们遇到的大部分现象, 在数学方面是用彼此间有相当复杂的依赖关系的一组参数来刻画的. 但是, 对现象的描述, 通常都做了非常重要的简化, 如果已知某些参数或参数组合很大或很小的话.

例 1 在描述其速度 v 远小于光速 $(v \ll c)$ 的相对运动时, 可以用伽利略变换

$$x' = x - vt, \quad t' = t$$

代替洛伦兹变换 (第 1 章 §3, 例 3)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

因为 $v/c \approx 0$.

例 2 摆的振动周期

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

通过参数 $k^2 = \sin^2 \dfrac{\varphi_0}{2}$ 与摆对稳定平衡位置的最大倾角 φ_0 相联系 (参看第 6 章 §4). 如果振动是微小振动, 即 $\varphi_0 \approx 0$, 则得到这种振动的周期的一个简单公式

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

例 3 设在质点 m 上作用着一个使它回到平衡位置去的力, 这个力正比于偏离量 (弹性系数为 k 的弹性力), 还作用着一个介质阻力, 它正比 (比例系数为 α) 于质点速度的平方. 在这种情形, 运动方程有

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx = 0$$

的形式 (参看第 5 章 §6).

如果介质 "变稀疏" 了, 则 $\alpha \to 0$, 从而应假定运动变得接近于方程

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

所描述的运动 (频率为 $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 的简谐振动), 而如果介质 "变稠" 了, 则 $\alpha \to \infty$, 从而, 除以 α 后作为极限得到方程 $\dot{x}^2 = 0$, 即 $x(t) \equiv$ 常数.

例 4 如果 $\pi(x)$ 是不超过 $x \in \mathbb{R}$ 的质数的个数, 那么,众所周知 (参看第 3 章 §2), 对很大的 x,$\pi(x)$ 的值能以很小的误差按公式

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

求出.

例 5 极其平凡但不乏重要性的关系式是

$$\sin x \approx x \quad 或 \quad \ln(1+x) \approx x,$$

x 越接近于零, 它们的相对误差越小 (参看第 5 章 §3). 如果愿意的话, 可根据泰勒公式添加一项或更多后续项使这些关系式变得更加精确,

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2.$$

这样一来, 问题在于利用好当某个表征现象的参数 (或参数组合) 变得很小 (趋于零), 或相反地, 变得很大 (趋于无穷) 时所发生情况的特点, 对所研究的现象作出一个易于观察的、方便的、本质上正确的描述.

因此, 本质上还是极限过渡理论的问题.

这类问题叫做*渐近问题*. 很清楚, 实际上在数学和自然科学各部门都有这类问题.

求解渐近问题通常包括以下几步: 完成极限过渡并寻求渐近式 (主项), 即现象的适当简化描述; 对因应用所得渐近公式产生的误差进行估计, 分析渐近公式的适用范围; 将渐近主项更加精确化, 这个过程类似于在泰勒公式中添加后续项 (但远非总是那样的计算过程).

求解渐近问题的方法 (叫做*渐近方法*) 通常与问题的特点有非常密切的联系. 当然. 泰勒公式属于罕见的相当一般、同时又是基本的一类渐近公式, 它是微分学中最重要的关系式之一.

这一章打算把分析学的基本渐近方法的一些初等知识给予读者.

在 §1 我们引进有关基本渐近方法的一般概念和定义, 而在 §2 我们利用它们叙述了构造拉普拉斯积分的渐近展开的拉普拉斯方法. 这个方法是拉普拉斯在研究概率论的极限理论时发现的, 它是后来由黎曼发展起来的渐近分析理论的主要组成部分, 通常在复分析教程中有这方面内容的叙述. 各种渐近分析方法的进一步的知识可在文献索引列出的专门书籍中找到, 这些书中又有这类问题的丰富的参考文献目录.

§1 渐近公式和渐近级数

1. 基本定义

a. 渐近估计和渐近等式

为完整起见, 开始我们先给出一些提示和说明.

定义 1 设 $f: X \to Y$ 和 $g: X \to Y$ 是定义在集合 X 上的实值, 复值, 或一般向量值 (与集合 Y 的性质相对应) 函数, 又设 $\mathfrak{B}$ 是 X 中的基. 这时, 关系式

$$f = O(g) \text{ 或 } f(x) = O(g(x)), x \in X,$$

$$f = O(g) \text{ 或 } f(x) = O(g(x)), \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

$$f = o(g) \text{ 或 } f(x) = o(g(x)), \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

根据定义表示, 等式 $|f(x)| = \alpha(x)|g(x)|$ 中的实函数 $\alpha(x)$ 分别是 X 上的有界, 关于基 $\mathfrak{B}$ 最终有界和关于基 $\mathfrak{B}$ 为无穷小的函数.

这些关系式通常叫做 (函数 f 的)*渐近估计*.

关系式

$$f \sim g \text{ 或 } f(x) \sim g(x) \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下}$$

通常叫做这两个函数在基 $\mathfrak{B}$ 下*渐近相等*, 或称它是在基 $\mathfrak{B}$ 下的*渐近等式*[①], 它表示 $f(x) = g(x) + o(g(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下.

渐近估计和渐近等式统称*渐近公式*.

在指不指出函数自变量无关紧要的地方, 将采用缩写记号 $f = o(g), f = O(g)$, $f \sim g$. 这些我们都已系统使用过.

①注意, 还经常用符号 $\simeq$ 表示渐近相等.

如果 $f = O(g)$ 且同时有 $g = O(f)$, 则说 $f \asymp g$, 称 f 和 g 关于给定的基是同阶量.

在我们以下研究中, 设 $Y = \mathbb{C}$ 或 $Y = \mathbb{R}; X \subset \mathbb{C}$ 或 $X \subset \mathbb{R}$; 照例, 设 $\mathfrak{B}$ 是基 $X \ni x \to 0$ 或基 $X \ni x \to \infty$.

特别地, 利用引进的这些记号, 可以记

$$\cos x = O(1), x \in \mathbb{R},$$
$$\cos z \neq O(1), z \in \mathbb{C},$$
$$\ln e^z = 1 + z + o(z) \text{ 当 } z \to 0, z \in \mathbb{C},$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \text{ 当 } x \to 0, x \in \mathbb{R},$$
$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \text{ 当 } x \to +\infty, x \in \mathbb{R}.$$

注 1 关于渐近等式, 注意到它们只是一些极限关系是有益的. 为它们用于计算, 事先应完成与余项估计有关的辅助性工作. 关于这一点, 在讨论泰勒公式时我们已经说过. 此外, 还应当注意, 渐近相等一般说来只允许用于要求相对误差小的计算, 而不能用于要求绝对误差小的计算. 例如, 当 $x \to +\infty$ 时, 差 $\pi(x) - \frac{x}{\ln x}$ 并不趋于零, 因为对每个素数值 x, 函数 $\pi(x)$ 有一个单位跳跃. 同时, 以 $\frac{x}{\ln x}$ 代替 $\pi(x)$ 的相对误差趋于零:

$$\frac{o\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)}{\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)} \to 0 \text{ 当 } x \to +\infty.$$

我们下边将会看到, 这种状况在计算方面导致渐近级数, 它关心的是近似的相对误差, 而不是绝对误差. 因此, 与古典级数不同, 这种级数常常是发散的. 在古典级数情况, 被近似的函数和级数前 n 项部分和之差的绝对值, 当 $n \to +\infty$ 时, 趋于零.

我们来考察几个求渐近公式的例子.

例 6 计算 $n!$ 或 $\ln n!$ 的值的繁重程度随着 $n \in \mathbb{N}$ 的增长而增加. 但是, 利用 n 很大这个条件我们将得到一个适用于计算 $\ln n!$ 的近似值的渐近公式.

从明显的关系式

$$\int_1^n \ln x dx = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln x dx < \sum_{k=1}^n \ln k < \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \ln x dx = \int_2^{n+1} \ln x dx$$

推出

$$0 < \ln n! - \int_1^n \ln x dx < \int_1^2 \ln x dx + \int_n^{n+1} \ln x dx < \ln 2(n+1).$$

但是,

$$\int_1^n \ln x dx = n(\ln n - 1) + 1 = n\ln n - (n-1),$$

因此, 当 $n\to\infty$, 有

$$\begin{aligned}\ln n! &= \int_1^n \ln x dx + O(\ln 2(n+1))\\ &= n\ln n - (n-1) + O(\ln n) = n\ln n + O(n).\end{aligned}$$

由于当 $n\to+\infty$ 时有 $O(n)=o(n\ln n)$, 公式 $\ln n!\approx n\ln n$ 的相对误差当 $n\to+\infty$ 时趋于零.

例 7 试证, 当 $x\to+\infty$ 时, 函数

$$f_n(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t^n}dt \qquad (n\in\mathbb{N})$$

与函数 $g_n(x)=x^{-n}e^x$ 渐近等价, 这是因为当 $x\to+\infty$ 时有 $g_n(x)\to+\infty$, 而应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{g_n(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n'(x)}{g_n'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-n}e^x}{x^{-n}e^x-nx^{-n-1}e^x}=1.$$

例 8 研究函数

$$f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$$

当 $x\to+\infty$ 时的渐近行为, 这个函数与积分指数

$$\mathrm{Ei}(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt$$

只差一个常数.

利用分部积分, 得

$$\begin{aligned}f(x) &= \left.\frac{e^t}{t}\right|_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}dt = \left.\left(\frac{e^t}{t}+\frac{e^t}{t^2}\right)\right|_1^x + \int_1^x \frac{2e^t}{t^3}dt\\ &= \left.\left(\frac{e^t}{t}+\frac{1!e^t}{t^2}+\frac{2!e^t}{t^3}\right)\right|_1^t + \int_1^x \frac{3!e^t}{t^4}dt\\ &= e^t\left.\left(\frac{0!}{t}+\frac{1!}{t^2}+\frac{2!}{t^3}+\cdots+\frac{(n-1)!}{t^n}\right)\right|_1^x + \int_1^x \frac{n!e^t}{t^{n+1}}dt.\end{aligned}$$

最后这个积分, 如在例 7 中已经证明的, 当 $x\to+\infty$ 时是 $O(x^{-(n+1)}e^x)$. 把 $t=1$ 时得到的常数 $-e\sum\limits_{k=1}^n (k-1)!$ 也包括在 $O(x^{-(n+1)}e^x)$ 内, 我们就得到

$$f(x)=e^x\sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{x^k}+O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right),\ 当\ x\to+\infty.$$

近似等式

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{x^k} e^x$$

的误差 $O\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right)$ 与最后这个和式中的每一项, 其中也包括与最后一项相比, 是渐近无穷小. 同时, 当 $x \to +\infty$ 时, 和式中后边的项与它前边的项比都是无穷小, 因此, 很自然, 应把由类似的公式做成的无限精确化的序列写成由 f 产生出来的下述形式的级数:

$$f(x) \simeq e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

我们指出,这个级数显然对任何 $x \in \mathbb{R}$ 都是发散的,因此,不能写成

$$f(x) = e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

这样一来, 在这里我们碰到了一种新的、显然是有益的级数的渐近观点. 跟古典情形不同, 这种观点关心的是被考察函数的相对近似, 而不是绝对近似. 这种级数的部分和, 与古典情形不同, 主要不是用于在具体点处求函数的近似值, 而是用于刻画在所考察的极限过程中 (在这个例子中, 极限过程是 x 趋于 $+\infty$) 函数值的集体行为.

b. 渐近序列和渐近级数

定义 2 设 $f(x)$ 是定义在集合 X 上的函数, $\mathfrak{B}$ 是集合 X 中的一个基. 把在基 $\mathfrak{B}$ 下都成立的渐近公式序列

$$\begin{aligned}
&f(x) = \psi_0(x) + o(\psi_0(x)),\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + o(\psi_1(x)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) + o(\psi_n(x)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

写成

$$f(x) \simeq \psi_0(x) + \psi_1(x) + \cdots + \psi_n(x) + \cdots$$

的形式, 或更简单地, 记做 $f(x) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k(x)$, 称它是函数 f 在给定的基 $\mathfrak{B}$ 下的**渐近展开**.

从这个定义看出, 在渐近展开中, 永远有

$$o(\psi_n(x)) = \psi_{n+1}(x) + o(\psi_{n+1}(x)), \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

因此, 对于任何 $n=0,1,\cdots$, 有

$$\psi_{n+1}(x)=o(\psi_n(x)),\ \text{在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

即展开式中后边的项与前边的项相比, 从渐近观点看, 都做出了更加精细的修正.

渐近展开通常以函数 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$ 的线性组合

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots$$

的形式出现, 这里的函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 对具体问题有这样那样的方便之处.

定义 3 设 X 是一个集合, 其中有一个基 $\mathfrak{B}$. 定义在 X 上的函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 叫做*在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列*, 如果 (对于这个序列中任意相邻的两项 φ_n, φ_{n+1}) 在基 $\mathfrak{B}$ 下成立 $\varphi_{n+1}(x)=o(\varphi_n(x))$, 而且在基 $\mathfrak{B}$ 的任一元素上, 任何函数 $\varphi_n\in\{\varphi_n(x)\}$ 都不恒等于零.

注 2 在基 $\mathfrak{B}$ 的元素 B 上,$(\varphi_n|_B)(x)\not\equiv 0$, 这个条件是自然的, 因为在相反情形下, 所有的函数 $\varphi_{n+1},\varphi_{n+2},\cdots$ 在 $\mathfrak{B}$ 上将恒等于零, 从而函数系 $\{\varphi_n\}$ 的渐近性成为平庸无奇的事情了.

例 9 以下序列显然都是渐近的:

a) $1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$, 当 $x\to 0$;

b) $1,\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^2},\cdots,\dfrac{1}{x^n},\cdots$, 当 $x\to\infty$;

c) $x^{p_1},x^{p_2},\cdots,x^{p_n},\cdots$

在基 $x\to 0$ 下, 如果 $p_1<p_2<\cdots<p_n<\cdots$,

在基 $x\to\infty$ 下, 如果 $p_1>p_2>\cdots>p_n>\cdots$;

d) 序列 $\{g(x)\varphi_n(x)\}$, 其中 $\{\varphi_n\}$ 是渐近的.

定义 4 如果 $\{\varphi_n\}$ 是在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列, 则形如

$$f(x)\simeq c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots$$

的渐近展开叫做*函数 f 在基 $\mathfrak{B}$ 下按渐近序列 $\{\varphi_n\}$ 的渐近展开或渐近级数*.

注 3 适合于幂级数的渐近级数的概念是由庞加莱 (1886 年) 陈述出来的, 他积极地把渐近展开应用到自己的天体力学研究中. 但是, 渐近级数本身以及由它得出的一些方法, 在数学中早已出现. 关于庞加莱意义下的渐近级数(展开)概念 (就是我们在定义 2—4 中叙述的) 的可能的推广, 请参看本节末的练习 5.

2. 渐近级数的一般知识

a. 渐近展开的唯一性

说到函数在某个基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近行为, 我们感兴趣的只是函数极限行为的特征, 因此, 如果两个 (一般说是不同的) 函数 f 和 g 在基 $\mathfrak{B}$ 的某个元素上相等, 那么, 它

们在基 $\mathfrak{B}$ 下有同一的渐近行为, 而且在渐近意义下应当把它们看做是一致的.

其次, 设事先确定了一个渐近序列 $\{\varphi_n\}$, 希望按它做渐近展开. 这时, 应当注意到任意的这样一个函数数系 $\{\varphi_n\}$ 都有自己的局限性. 就是说, 存在着那样的函数, 在给定的这个基下, 与渐近序列 $\{\varphi_n\}$ 中的任一 φ_n 比较, 它都是无穷小.

例 10 设 $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{x^n}, n = 0, 1, \cdots$ 则 $e^{-x} = o(\varphi_n(x))$ 当 $x \to +\infty$.

这样一来, 很自然地采纳以下定义.

定义 5 如果 $\{\varphi_n(x)\}$ 是在基 $\mathfrak{B}$ 下渐近序列, 则称对每个 $n = 0, 1, \cdots$ 都使 $f(x) = o(\varphi_n(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下成立的函数 f 为关于序列$\{\varphi_n(x)\}$的渐近零元.

定义 6 称函数 f 和 g 在基 $\mathfrak{B}$ 下关于该基的渐近函数序列 $\{\varphi_n\}$ 是渐近重合的, 如果这两个函数的差 $f - g$ 关于序列 $\{\varphi_n\}$ 是渐近零元.

命题 1 (渐近展开的唯一性) 设 $\{\varphi_n\}$ 是在某一基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近函数序列.

a) 如果在基 $\mathfrak{B}$ 下函数 f 能按序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近展开, 则展开式是唯一的.

b) 如果函数 f 和 g 都能按序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近展开, 则当且仅当函数 f 和 g 在基 $\mathfrak{B}$ 下关于序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近重合时, 它们的渐近展开是相同的.

◀ a) 设函数 φ 在基 $\mathfrak{B}$ 的任何元素上都不恒等于零.

我们来证明, 如果 $f(x) = o(\varphi(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 且同时有 $f(x) = c\varphi(x) + o(\varphi(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 则 $c = 0$.

实际上, $|f(x)| \geqslant |c\varphi(x)| - |o(\varphi(x))| = |c||\varphi(x)| - o(|\varphi(x)|)$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 因此, 如果 $|c| > 0$, 则存在基 $\mathfrak{B}$ 的元素 B_1, 在它的任意点处成立不等式 $|f(x)| \geqslant \dfrac{|c|}{2}|\varphi(x)|$. 而如果 $f(x) = o(\varphi(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 则存在基 $\mathfrak{B}$ 的元素 B_2, 在它的任意点处成立 $|f(x)| \leqslant \dfrac{|c|}{3}|\varphi(x)|$. 因此, 在任意点 $x \in B_1 \cap B_2$, 应当满足不等式 $\dfrac{|c|}{2}|\varphi(x)| \leqslant \dfrac{|c|}{3}|\varphi(x)|$, 或者, 由假设条件 $|c| \neq 0$, 成立不等式 $3|\varphi(x)| \leqslant 2|\varphi(x)|$. 但是, 即使在一点 $x \in B_1 \cap B_2$ 有 $\varphi(x) \neq 0$, 这也是不可能的.

现在来研究函数 f 按序列 $\{\varphi_n\}$ 的渐近展开.

设 $f(x) = c_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ 和 $f(x) = \tilde{c}_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下. 从第一个等式中减去第二个等式, 我们得到, $0 = (c_0 - \tilde{c}_0)\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下. 但是, $0 = o(\varphi_n(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 因此, 根据证明了的结果, $c_0 - \tilde{c}_0 = 0$.

如果已经证明函数 f 按系 $\{\varphi_n\}$ 的两个展开中的系数 $c_0 = \tilde{c}_0, \cdots, c_{n-1} = \tilde{c}_{n-1}$, 那么, 从等式

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)),$$

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \tilde{c}_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)),$$

用同样的方法, 就能得到, $c_n = \tilde{c}_n$.

引用归纳法, 我们推出, 断言 a) 成立.

b) 如果对任何 $n = 0, 1, \cdots, f(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$ 和 $g(x) = c_0\varphi_0(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 则对任何 $n = 0, 1, \cdots, f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x))$ 在基 $\mathfrak{B}$ 下, 因此, 函数 f 和 g 关于渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 渐近重合.

逆命题能从 a) 推出, 因为我们取差 $f - g$ 作为渐近零元, 它应当只有零渐近展开. ►

注 4 我们讨论了关于渐近展开的唯一性问题. 但是, 我们强调一下, 函数按预先给定的渐近序列的渐近展开本身远非永远可能. 一般说来, 在一个基 $\mathfrak{B}$ 下, 两个函数 f 和 g 也并非永远能使渐近关系 $f = O(g), f = o(g)$ 或 $f \sim g$ 之一成立.

例如, 相当一般的泰勒渐近公式指出了一个具体的函数类 (在 $x = 0$ 有直到 n 阶的导数), 其中每个函数显然有渐近表示

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n), \text{ 当 } x \to 0.$$

但是, 函数 $x^{\frac{1}{2}}$ 就已经不可能把它按系 $1, x, x^2, \cdots$ 渐近展开了. 因此, 我们不应当把关于渐近序列作渐近展开看作是有一个典型的渐近序列, 使能把任何函数关于它渐近展开. 可能有的渐近行为的样式, 要比一个固定的渐近序列所能描述的多得多, 因此, 描述函数的渐近行为, 这主要不是按事先指定的渐近函数列做展开, 而是去寻找这种渐近函数列. 譬如, 在计算初等函数的不定积分时, 不能预先要求其解答是事先给定的一些初等函数的复合, 因为它可能根本不是初等函数. 寻找渐近公式, 类似于计算不定积分, 使人感兴趣的只是怎样使解答简单些, 比原先的表达式更容易研究一些.

b. 渐近公式的容许运算

符号 o 和 O 的初等算术性质 (如 $o(g) + o(g) = o(g), o(g) + O(g) = O(g) + O(g) = O(g)$ 等等) 在极限论中已经研究过 (第 3 章 §2 命题 4). 从这些性质和渐近展开的定义可以推出明显的

命题 2 (渐近展开的线性性) 如果函数 f 和 g 可在基 $\mathfrak{B}$ 下按渐近序列 $\{\varphi_n\}$ 渐近展开, $f \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n, g \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n$, 则它们的线性组合 $\alpha f + \beta g$ 也能这样展开, 且 $(\alpha f + \beta g) \simeq \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)\varphi_n$.

以下是在越来越特殊的情形下的渐近展开和一般渐近公式的性质.

命题 3 (渐近等式的积分运算) 设 f 是区间 $I = [a, \omega[$ (或 $]\omega, a]$) 上的连续函数.

a) 如果 g 是区间 I 上的非负连续函数, 而积分 $\int_a^\omega g(x)dx$ 发散, 则从关系式

$$f(x)=O(g(x)), f(x)=o(g(x)), f(x)\sim g(x) \text{ 当 } I\ni x\to\omega$$

可相应地得到

$$F(x)=O(G(x)), F(x)=O(G(x)) \text{ 以及 } F(x)\sim G(x),$$

这里

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad 和 \quad G(x)=\int_a^x g(t)dt.$$

b) 如果区间 $I=[a,\omega[$ 上的非负连续函数 $\varphi_n(x), n=0,1,\cdots$ 当 $I\ni x\to\omega$ 组成一个渐近序列, 而当 $x\in I$ 时积分 $\varPhi_n(x)=\int_x^\omega \varphi_n(t)dt$ 收敛, 则当 $I\ni x\to\omega$, 函数 $\varPhi_n(x), n=0,1,\cdots$ 也组成一个渐近序列.

c) 如果积分 $\mathfrak{F}(x)=\int_x^\omega f(x)dx$ 收敛, 而函数 $f(x)$ 当 $I\ni x\to\omega$ 时按 b) 中的渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 有渐近展开 $f(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$, 则对于函数 $\mathfrak{F}$ 成立当 $I\ni x\to\omega$ 时按渐近序列 $\{\varPhi_n(x)\}$ 的渐近展开式 $\mathfrak{F}(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\varPhi_n(x)$.

◀ a) 如果当 $I\ni x\to\omega$ 有 $f(x)=O(g(x))$, 则存在点 $x_0\in I$ 和常数 M 使得当 $x\in[x_0,\omega[$ 时有 $|f(x)|\leqslant M|g(x)|$. 从函数在区间 $[a,x_0]$ 上的连续性推出, 这时在整个区间 I 上成立不等式 $|f(x)|\leqslant C|g(x)|$, 因此, $\left|\int_a^x f(t)dt\right|\leqslant C\left|\int_a^x g(t)dt\right|=O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

为了证明剩下的两个关系式, 可利用 (如在例 7 中一样) 洛必达法则, 同时考虑到当 $I\ni x\to\omega$ 时有 $G(x)=\int_a^x g(t)dt\to\infty$. 结果我们将得到

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

b) 因为当 $I\ni x\to\omega$ 有 $\varPhi_n(x)\to 0(n=0,1,\cdots)$, 那么, 再次应用洛必达法则, 求出

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\varPhi_{n+1}(x)}{\varPhi_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\varPhi'_{n+1}(x)}{\varPhi'_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}=0.$$

c) 关系式

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+r_n(x)$$

中的函数 $r_n(x)$, 作为 I 上的连续函数的差, 其本身也是 I 上的连续函数, 显然, 当 $I\ni x\to\omega$, 有 $R_n(x)=\int_x^\omega r_n(t)dt\to 0$. 但当 $I\ni x\to\omega$ 有 $r_n(x)=o(\varphi_n(x))$ 和 $\varPhi_n(x)\to 0$, 因此, 从洛必达法则推出: 当 $I\ni x\to\omega$, 在等式

$$\mathfrak{F}(x)=c_0\varPhi_0(x)+c_1\varPhi_1(x)+\cdots+c_n\varPhi_n(x)+R_n(x)$$

中的量 $R_n(x)$ 是 $o(\varPhi_n(x))$. ▶

注 5 一般来说，不能对渐近等式和渐近级数进行微分.

例 11 函数 $f(x)=e^{-x}\sin(e^{x})$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微, 而且当 $x\to+\infty$ 关于渐近序列 $\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}$ 是渐近零元. 函数 $\dfrac{1}{x^n}$ 的导数, 不计常数因子的差别, 仍然具有 $\dfrac{1}{x^k}$ 的形式, 但是函数 $f'(x)=-e^{-x}\sin(e^{x})+\cos(e^{x})$ 不但不是渐近零元, 而且当 $x\to+\infty$ 时关于序列 $\left\{\dfrac{1}{x^n}\right\}$ 根本没有渐近展开.

3. 渐近幂级数

作为结尾我们来详细研究渐近幂级数, 这种情况遇到的特别多, 虽然有时像在例 8 中一样, 它们是以一种更一般的形式出现的.

我们将考察当 $x\to0$ 时, 关于渐近序列 $\{x^n;n=0,1,\cdots\}$, 以及当 $x\to\infty$ 时, 关于渐近序列 $\left\{\dfrac{1}{x^n};n=0,1,\cdots\right\}$ 的展开. 因为借助变换 $x=\dfrac{1}{u}$ 可以看出它们是同样一个问题, 所以我们仅对于按第一个序列展开的情形陈述要讲的命题, 然后指出, 在关于第二个序列展开的情形, 相应陈述的某些特殊性.

命题 4 *设 0 是集合 E 的极限点, 而*

$$\begin{aligned}f(x)&\simeq a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\\ g(x)&\simeq b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\end{aligned}\qquad \text{当 } E\ni x\to0.$$

那么, 当 $E\ni x\to0$ 时, 有

a) $(\alpha f+\beta g)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)x^n$;

b) $(f\cdot g)(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, *这里* $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0,n=0,1,\cdots$;

c) *如果 $b_0\neq0$, 则* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_nx^n$, *这里系数 d_n 从以下递推关系求出*

$$a_0=b_0d_0,a_1=b_0d_1+b_1d_0,\cdots,a_n=\sum_{k=0}^{n}b_kd_{n-k},\cdots;$$

d) *如果 E 是点 0 的空心邻域或半邻域, 而 f 在 E 上连续, 则*

$$\int_0^x f(t)dt\simeq a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots$$

e) *如果对条件 d) 再补充 $f\in C^{(1)}(E)$ 和*

$$f'(x)\simeq a_0'+a_1'x+\cdots,$$

则 $a_n'=(n+1)a_{n+1},n=0,1,\cdots$.

◀ a) 这是命题 2 的特殊情形.

b) 利用符号 $o()$ 的性质 (参看第 3 章 §2 命题 4), 我们得到

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n))(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+o(x^n))\\ &= (a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

当 $E\ni x\to 0$.

c) 如果 $b_0\neq 0$, 则当 x 接近于零时有 $g(x)\neq 0$, 因此, 可以考察比 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)$. 我们来验证, 如果在表示式 $h(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n+r_n(x)$ 中的系数 $d_0,\cdots,d_n$ 是按命题 c) 选取的, 则当 $E\ni x\to 0$ 有 $r_n(x)=o(x^n)$. 由恒等式 $f(x)=g(x)h(x)$, 得到

$$\begin{aligned}&a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n)\\ &\quad=(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+o(x^n))(d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n+r_n(x))\\ &\quad=(b_0d_0)+(b_0d_1+b_1d_0)x+\cdots+(b_0d_n+b_1d_{n-1}+\cdots+b_nd_0)x^n\\ &\qquad+b_0r_n(x)+o(r_n(x))+o(x^n).\end{aligned}$$

因为 $b_0\neq 0$, 由此推出, 当 $E\ni x\to 0$ 时, 有 $o(x^n)=b_0r_n(x)+o(r_n(x))+o(x^n)$ 或 $r_n(x)=o(x^n)$.

d) 这可从命题 3c) 推出, 只要在那里令 $\omega=0$, 并注意到 $-\int_x^0 f(t)dt=\int_0^x f(t)dt$ 即可.

e) 由于函数 $f'(t)$ 在 $]0,x]$ (或 $[x,0[$) 上连续且有界 (当 $x\to 0$ 时趋于 a_0'), 所以, 积分 $\int_0^x f'(t)dt$ 存在. 显然, $f(x)=a_0+\int_0^x f'(t)dt$, 这是因为当 $x\to 0$ 时 $f(x)\to a_0$. 把 $f'(x)$ 的渐近展开代入这个等式, 利用 d) 中证明了的结果, 得

$$f(x)\simeq a_0+a_0'x+\frac{a_1'}{2}x^2+\cdots+\frac{a_{n-1}'}{n}x^n+\cdots.$$

现在, 根据渐近展开的唯一性 (命题 1), 就推出 $a_n'=(n+1)a_{n+1}, n=0,1,\cdots$ ▶

推论 1 如果 U 是无限大在 $\mathbb{R}$ 中的邻域 (半邻域), 而函数 f 在 U 中连续并且有渐近展开

$$f(x)\simeq a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\cdots\quad 当\ U\ni x\to\infty,$$

则在 U 中的区间上的积分

$$\mathfrak{F}(x)=\int_x^{\infty}\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt$$

收敛且有如下渐近展开:

$$\mathfrak{F}(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \cdots \quad 当\ U \ni x \to \infty.$$

◀ 积分的收敛性是显然的, 这是因为

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \sim \frac{a_2}{t^2} \quad 当\ U \ni t \to \infty.$$

譬如, 引用命题 3c), 即可看出, 只要对渐近展开式

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \simeq \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \cdots + \frac{a_n}{t^n} \quad 当\ U \ni t \to \infty$$

进行积分就行了. ▶

推论 2 如果对推论 1 的条件再补充 $f \in C^{(1)}(U)$ 和 f' 有渐近展开

$$f'(x) \simeq a_0' + \frac{a_1'}{x} + \frac{a_2'}{x^2} + \cdots + \frac{a_n'}{x^n} + \cdots \quad 当\ U \ni x \to \infty,$$

则这个展开式可通过对函数 f 的展开式的形式微分得到,且

$$a_n' = -(n-1)a_{n-1}, n = 2, 3, \cdots \quad 且\ a_0' = a_1' = a_0 = a_1 = 0.$$

◀ 由于当 $U \ni x \to \infty$ 有 $f'(x) = a_0' + \frac{a_1'}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, 则

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = a_0'x + a_1' \ln x + O(1).$$

当 $U \ni x \to \infty$. 可是, 因为 $f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$, 而当 $U \ni x \to \infty$ 时序列 $x, \ln x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \cdots$ 是渐近的, 所以由命题 1 可以断言 $a_0' = a_1' = 0$. 现在, 对展开式 $f'(x) \simeq \frac{a_2'}{x^2} + \frac{a_3'}{x^3} + \cdots$ 进行积分, 根据推论 1, 我们就得到函数 $f(x)$ 的展开式, 从而根据展开的唯一性有关系式 $a_n' = -(n-1)a_{n-1}$ 当 $n = 2, 3, \cdots$ ▶

练 习

1. a) 设 $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ 当 $|z| > R, z \in \mathbb{C}$. 试证: 当 $\mathbb{C} \ni z \to \infty$ 有 $h(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$.

b) 假定方程 $y'(x) + y^2(x) = \sin\frac{1}{x^2}$ 的解 $y(x)$ 当 $x \to \infty$ 时有渐近展开 $y(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$, 试求这个展开式的前三项.

c) 试证: 如果 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 当 $|z| < r, z \in \mathbb{C}$, 而当 $\mathbb{C} \ni z \to 0$ 时有 $g(z) \simeq b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$, 那么, $f \circ g$ 在点 $0 \in \mathbb{C}$ 的某一空心邻域中有定义, 且当 $\mathbb{C} \ni z \to 0$ 有 $(f \circ g)(z) \simeq c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$, 这里系数 $c_0, c_1, \cdots$ 是用在收敛幂级数情况把一个级数代入另一个级数的方法得到的.

2. 试证:

a) 如果 f 在 $x \geqslant 0$ 是连续正单调函数, 则

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(x)dx + O(f^{(n)}) + O(1), \text{ 当 } n \to \infty;$$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + c + o(1)$, 当 $n \to \infty$.

c) $\sum\limits_{k=2}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \sim \frac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}$ 当 $n \to \infty$ 和 $\alpha > -1$.

3. 用分部积分法求下列函数当 $x \to +\infty$ 时的渐近展开:

a) $\Gamma_s(x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$ ——*不完全 Γ 函数*;

b) $\mathrm{er}f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}dt$ ——*概率误差函数* (我们提醒注意, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ ——欧拉 – 泊松积分);

c) $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^{\alpha}}dt$, 如果 $\alpha > 0$.

4. 利用上一练习的结果, 求下列函数当 $x \to +\infty$ 时的渐近展开:

a) $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ —— *积分正弦* (我们提醒注意, $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$ —— 狄里克雷积分);

b) $C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi}{2}t^2dt, S(x) = \int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t^2dt$ —— 菲涅耳积分 (我们提醒注意, $\int_0^{+\infty} \cos x^2dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$).

5. 对前边讲的由庞加莱引进和研究过的按渐近序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 展开的概念, 艾尔代伊[①]提出了如下推广.

设 X 是一个集合, $\mathfrak{B}$ 是 X 中的基, $\{\varphi_n(x)\}$ 是 X 上在基 $\mathfrak{B}$ 下的渐近序列. 如果在 X 上给定函数 $f(x), \psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \cdots$ 且对任何 $n = 0, 1, \cdots$ 有等式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} \psi_k(x) + o(\varphi_n(x)) \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

则记

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \{\varphi_n(x)\} \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下},$$

并说在基 $\mathfrak{B}$ 下函数 f 有*艾尔代伊意义下的渐近展开*.

a) 请注意, 如果设 $\varphi_n(x) = x^{-n}, n = 0, 1, \cdots$, 在练习 4 中我们得到的展开式是艾尔代伊意义下的渐近展开.

b) 试证在艾尔代伊意义下的渐近展开没有唯一性 (可以改变函数 ψ_n).

c) 试证: 如果给定了集合 X, X 中的基 $\mathfrak{B}$, X 上的函数 f 和序列 $\{\mu_n(x)\}$ 及 $\{\varphi_n(x)\}$, 设第二个序列在基 $\mathfrak{B}$ 下是渐近的, 则展开

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\mu_n(x), \{\varphi_n(x)\} \text{ 在基 } \mathfrak{B} \text{ 下}$$

[①] 艾尔代伊 (A. Erdélyi) (1908—1977) 是英国数学家.

(其中 a_n 是数值系数) 或者根本不可能, 或者是唯一的.

6. 一致渐近估计

设 X 是一个集合,$\mathfrak{B}_X$ 是 X 中的基, 还设 $f(x,y), g(x,y)$ 是定义在集合 X 上且依赖于参数 $y \in Y$ 的 (向量值) 函数.记 $|f(x,y)| = \alpha(x,y)|g(x,y)|$. 称在基 $\mathfrak{B}_X$ 下的渐近关系

$$f(x,y) = o(g(x,y)), f(x,y) = O(g(x,y)), f(x,y) \sim g(x,y)$$

关于参数 y 在集合 Y 上是一致的, 如果在基 $\mathfrak{B}_X$ 下分别成立 $\alpha(x,y) \rightrightarrows 0$ 在 Y 上, $\alpha(x,y)$ 关于 $y \in Y$ 一致地最终有界, $\alpha(x,y) \rightrightarrows 1$ 在 Y 上.

试证: 如果在集合 $X \times Y$ 中引进这样的基 $\mathfrak{B} = \{B_X \times Y\}$, 其元素是基 $\mathfrak{B}_X$ 的元素 B_X 和集合 Y 的直积, 则上边所说的定义将分别与在基 $\mathfrak{B}$ 下的等式

$$f(x,y) = o(g(x,y)), f(x,y) = O(g(x,y)), f(x,y) \sim g(x,y)$$

等价.

7. 一致渐近展开

渐近展开

$$f(x,y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(x) \text{ 在基 } \mathfrak{B}_X \text{ 下}$$

关于参数 y 在集合 Y 上是一致的, 如果对等式

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(y)\varphi_k(x) + r_n(x,y), \quad n = 0, 1, \cdots$$

中的 $r_n(x,y)$ 有关于 $y \in Y$ 的一致估计: $r_n(x,y) = o(\varphi_n(x))$ 在集合 X 中的基 $\mathfrak{B}_X$ 下.

a) 设 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测 (有界) 集合, 又设对每个固定的值 $x \in X$, 函数 $f(x,y), a_0(y), a_1(y), \cdots$ 在 Y 上可积. 试证: 如果在这些条件下, 在基 $\mathfrak{B}_X$ 下的渐近展开 $f(x,y) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(x)$ 关于参数 $y \in Y$ 是一致的, 则在基 $\mathfrak{B}_X$ 下渐近展开

$$\int_Y f(x,y)dy \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_Y a_n(y)dy\right) \varphi_n(x)$$

也成立.

b) 设 $Y = [c,d] \subset \mathbb{R}$. 假定函数 $f(x,y)$ 对每个固定的 $x \in X$ 关于 y 在区间 Y 上连续可微, 而且在某一个 $y_0 \in Y$ 处有渐近展开

$$f(x,y_0) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y_0)\varphi_n(x) \text{ 在基 } \mathfrak{B}_X \text{ 下.}$$

试证: 如果这时成立关于 $y \in Y$ 一致的渐近展开

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(y)\varphi_n(x) \text{ 在基 } \mathfrak{B}_X \text{ 下,}$$

且其系数 $\alpha_n(y), n=0,1,\cdots$, 关于 y 连续, 则原来的函数 $f(x,y)$ 在基 $\mathfrak{B}_X$ 下有渐近展开 $f(x,y)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(y)\varphi_n(x)$, 它关于 $y\in Y$ 是一致的, 系数 $a_n(y), n=0,1,\cdots$, 在区间 Y 上光滑依赖于 y, 且 $\dfrac{da_n}{dy}(y)=\alpha_n(y)$.

8. 设 $p(x)$ 是区间 $c\leqslant x\leqslant d$ 上的光滑正函数, 而$u(x,\lambda)$是方程$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,\lambda)=\lambda^2p(x)u(x,\lambda)$的解.

a) 如果在 $[c,d]$ 上 $p(x)\equiv 1$, 试求解 $u(x,\lambda)$.

b) 设 $0<m\leqslant p(x)\leqslant M<+\infty$ 在 $[c,d]$ 上, 且 $u(c,\lambda)=1, \dfrac{\partial u}{\partial x}(c,\lambda)=0$. 试给出 $u(x,\lambda)$ 在 $x\in[c,d]$ 的下方和上方估计.

c) 设 $\ln u(x,\lambda)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x)\lambda^{1-n}$ 当 $\lambda\to+\infty$, 这里 $c_0(x), c_1(x),\cdots$ 是光滑函数. 试利用 $\left(\dfrac{u'}{u}\right)'=\dfrac{u''}{u}-\left(\dfrac{u'}{u}\right)^2$ 证明 $c_0'^2(x)=p(x)$ 和 $\left(c_{n-1}''+\sum\limits_{k=0}^{n}c_k'\cdot c_{n-k}'\right)(x)=0$.

§2 渐近积分 (拉普拉斯方法)

1. 拉普拉斯方法的基本思想

这一节将叙述拉普拉斯方法. 具有相当普遍性的构造含参数积分的渐近式的方法是不多的, 拉普拉斯方法是其中之一. 我们限于研究形如

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx \tag{1}$$

的积分, 这里 $S(x)$ 是实值函数, 而 λ 是参数. 这种积分通常叫做*拉普拉斯积分*.

例 1 拉普拉斯变换

$$L(f)(\xi)=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\xi x}dx$$

是拉普拉斯积分的特殊情形.

例 2 拉普拉斯本人把他自己的方法应用于形如 $\int_a^b f(x)\varphi^n(x)dx$ 的积分, 这里 $n\in\mathbb{N}$, 而 $\varphi(x)>0$ 在 $]a,b[$ 上. 这种积分也是一般的拉普拉斯积分 (1) 的特殊情形, 因为 $\varphi^n(x)=\exp(n\ln\varphi(x))$.

我们感兴趣的是对于参数 λ 取大值时, 精确地说, 当 $\lambda\to+\infty, \lambda\in\mathbb{R}$ 时, 积分 (1) 的渐近式.

为了在叙述拉普拉斯方法的基本思想时不致让那些次要的细节分散注意力, 我们将认为, 在积分 (1) 中,$[a,b]=I$ 是有限区间, 函数 $f(x)$ 和 $S(x)$ 在 I 上光滑, 而且 $S(x)$ 在点 $x_0\in I$ 有唯一的, 同时又是严格的最大值. 这时, 函数 $\exp(\lambda S(x))$ 在点

$x_0 \in I$ 也有唯一严格最大值. 参数 λ 的值越大, 这个最大值超出这个函数在区间 I 上的其他值的程度也越大. 因此, 如果 $f(x)$ 在 x_0 的邻域中不恒等于零, 则整个积分 (1) 可以用在点 x_0 的随便多小的一个邻域上的积分代替, 同时使当 $\lambda \to +\infty$ 时相对误差趋于零. 我们所观察到的这个事实叫做*局部化原理*.回顾一系列历史事件, 可以说, 拉普拉斯积分的这个局部化原理着实地向人们提示了 $\delta-$ 型函数族和 $\delta-$ 函数本身的局部作用原理.

现在, 积分只取在点 x_0 的一个小邻域上, 函数 $f(x)$ 和 $S(x)$ 可以用当 $I \ni x \to x_0$ 时的它们的泰勒展开的主项代替.

剩下来的就是要求出所得到的典型积分的渐近式, 这做起来没有特别的困难.

寻求积分的渐近式的拉普拉斯方法, 本质上, 就在于逐次完成这些步骤.

例 3 设 $x_0 = a, S'(a) \neq 0$ 且 $f(a) \neq 0$, 譬如, 函数 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调减少. 在这些条件下, $f(x) = f(a) + o(1)$ 而 $S(x) = S(a) + (x-a)S'(a) + o(1)$ 当 $I \ni x \to a$. 实施拉普拉斯方法的思想, 对于小的 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda \to +\infty$, 我们得到

$$F(\lambda) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \sim f(a)e^{\lambda S(a)} \int_0^{\varepsilon} e^{\lambda t S'(a)}dt$$
$$= -\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}\left(1 - e^{\lambda S'(a)\varepsilon}\right).$$

由于 $S'(a) < 0$, 由此得到, 在所研究的情况下, 有

$$F(\lambda) \sim -\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \text{ 当 } \lambda \to +\infty. \tag{2}$$

例 4 设 $a < x_0 < b$, 这时 $S'(x_0) = 0$, 我们还假设 $S''(x_0) \neq 0$, 即 $S''(x_0) < 0$, 因为 x_0 是最大值点.

利用当 $x \to x_0$ 时成立的展开式 $f(x) = f(x_0) + o(x - x_0)$ 和 $S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2}S''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$, 我们得到, 当 $\lambda \to +\infty$, 对小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$F(\lambda) \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}dx \sim f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}dt.$$

在最后这个积分中做变量替换 $\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2 = -u^2$(注意 $S''(x_0) < 0$), 我们得到

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}dt = \sqrt{-\frac{2}{\lambda S''(x_0)}} \int_{-\varphi(\lambda,\varepsilon)}^{\varphi(\lambda,\varepsilon)} e^{-u^2}du,$$

这里 $\varphi(\lambda, \varepsilon) = \sqrt{-\frac{\lambda S''(x_0)}{2}}\varepsilon \to +\infty$ 当 $\lambda \to +\infty$.

注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi},$$

我们现在就求出了在所研究的情况下拉普拉斯积分的渐近式的主项:

$$F(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \text{ 当 } \lambda \to +\infty. \tag{3}$$

例 5 如果 $x_0 = a$, 但 $S'(x_0) = 0$ 且 $S''(x_0) < 0$, 那么, 通过像例 4 中那样的推理, 在这一次我们将得到

$$F(\lambda) \sim \int_a^{a+\varepsilon} f(x) e^{\lambda S(x)} dx \sim f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \int_0^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0) t^2} dt,$$

因此,

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \text{ 当 } \lambda \to +\infty. \tag{4}$$

我们通过以上探索性分析得到了有关拉普拉斯积分 (1) 的渐近式的三个最有用的公式 (2)—(4).

从上述研究明显看出, 拉普拉斯方法能成功地应用于研究任意积分

$$\int_X f(x, \lambda) dx \text{ 当 } \lambda \to +\infty \tag{5}$$

的渐近式, 只要:a) 对于这个积分, 局部化原理成立 (亦即整个积分当 $\lambda \to +\infty$ 时可以用在某一特殊点的任意小的邻域上的积分代替) 以及 b) 在局部化了的积分里, 积分号下的函数能用比较简单的函数替换, 而且一方面, 这个比较简单的函数的渐近式与要找的渐近式一致, 另一面, 它又要比较容易求出.

譬如, 如果在积分 (1) 中函数 $S(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有几个局部最大值点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 那么, 利用积分的可加性, 我们还是用这样一些积分的和代替积分 (1), 使相对误差很小, 但它们是取在极值点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的那样小的一些邻域 $U(x_j)$ 上, 每个邻域只包含一个极值点. 积分

$$\int_{U(x_j)} f(x) e^{\lambda S(x)} dx \text{ 当 } \lambda \to +\infty$$

的渐近式, 如已说过的那样, 是不依赖于邻域 $U(x_j)$ 本身的大小的, 因此, 这个积分的渐近式用符号 $F(\lambda, x_j)$ 表示, 并叫做*点 x_j 对积分 (1) 的渐近式的贡献*.

这样一来, 局部化原理的一般形式的陈述就是: 积分 (5) 的渐近式是被积函数在不同方面的一切临界点的贡献的总和 $\sum\limits_j F(\lambda, x_j)$.

对积分 (1) 来说, 这就是函数 $S(x)$ 的最大值点, 从而, 如从公式 (2)—(4) 看到的, 对渐近式做出基本贡献的仅仅是在区间 $[a,b]$ 上使函数 $S(x)$ 达到绝对极大值的那些局部极值点.

在本节下一段我们将详细考察这里提出来的一般构想, 然后研究拉普拉斯方法的一些有益的应用.

2. 拉普拉斯积分的局部化原理

引理 1 (指数型估计) 设 $M = \sup\limits_{a<x<b} S(x) < \infty$, 又设对某个值 $\lambda_0 > 0$, 积分 (1) 绝对收敛. 那么, 它对任何 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 都绝对收敛, 且对这样的 λ 成立估计

$$|F(\lambda)| \leqslant \int_a^b |f(x)e^{\lambda S(x)}|dx \leqslant Ae^{\lambda M}, \tag{6}$$

这里 $A \in \mathbb{R}$.

◄ 事实上, 当 $\lambda \geqslant \lambda_0$, 有

$$|F(\lambda)| = \left|\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}dx\right| = \left|\int_a^b f(x)e^{\lambda_0 S(x)}e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}dx\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x)e^{\lambda_0 S(x)}|dxe^{(\lambda-\lambda_0)M} = \left(e^{-\lambda_0 M}\int_a^b |f(x)e^{\lambda_0 S(x)}|dx\right)e^{\lambda M}. ►$$

引理 2 (极大值点的贡献的估计) 设对某值 $\lambda = \lambda_0$ 积分 (1) 绝对收敛, 又设在积分区间 I 的内部或边界上存在点 x_0, 使 $S(x_0) = \sup\limits_{a<x<b} S(x) = M$. 如果函数 $f(x)$ 和 $S(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$ 和点 x_0 在 I 中的充分小的邻域 $U_I(x_0)$, 使估计

$$\left|\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx\right| \geqslant Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)} \tag{7}$$

($B > 0$是某常数) 对 $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, 0\}$ 成立.

◄ 对于固定的 $\varepsilon > 0$ 任取一个邻域 $U_I(x_0)$, 使在其中有 $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|$ 和 $S(x_0) - \varepsilon \leqslant S(x) \leqslant S(x_0)$. 假定 f 是实值的*. 现在, 我们可以断言, 在 $U_I(x)$ 中函数 f 的值有相同的符号. 这使我们得到: 对于 $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, 0\}$ 有

$$\left|\int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx\right| = \int_{U_I(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)}dx$$
$$\geqslant \int_{U_I(x_0)} \frac{1}{2}|f(x_0)|e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}dx = Be^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}. ►$$

命题 1 (局部化原理) 设当 $\lambda = \lambda_0$ 积分 (1) 绝对收敛, 且在积分区间 I 的内部或边界上函数 $S(x)$ 有唯一的绝对极大值点 x_0, 亦即在点 x_0 的任何邻域 $U(x_0)$ 外均有

$$\sup_{I\setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0).$$

* 译者注. 这不会妨碍证明的普遍性. 证明中关键性条件是 $f(x_0) \neq 0$. 由此可以取到 x_0 的邻域 $U_I(x_0)$ 使 $f(x)$ 的实部或虚部在 $U_I(x_0)$ 中保号.

如果函数 $f(x), S(x)$ 同时在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则

$$F(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\infty})) \text{ 当 } \lambda \to +\infty, \tag{8}$$

这里 $U_I(x_0)$ 是 x_0 在 I 中的任意一个邻域,

$$F_{U_I(x_0)}(\lambda) := \int_{U_I(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx,$$

而 $O(\lambda^{-\infty})$ 是这样一个函数, 对于任何 $n \in \mathbb{N}$, 当 $\lambda \to +\infty$ 它都是 $o(\lambda^{-n})$.

◀从引理 2 推出, 如果邻域 $U_I(x_0)$ 足够小, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 当 $\lambda \to +\infty$, 最终成立不等式

$$|F_{U_I(x_0)}(\lambda)| > e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}. \tag{9}$$

同时, 根据引理 1, 对于点 x_0 的任意邻域 $U(x_0)$, 有估计

$$\int_{I \setminus U(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)}dx \leqslant Ae^{\lambda\mu} \text{ 当 } \lambda \to +\infty, \tag{10}$$

这里 $A > 0, \mu = \sup\limits_{x \in I \setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$.

把这个估计与不等式 (9) 加以比较, 容易得到, 不等式 (9) 当 $\lambda \to +\infty$, 对点 x_0 的任意邻域 $U_I(x_0)$ 最终成立.

现在只要写出

$$F(\lambda) = F_I(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda) + F_{I \setminus U(x_0)}(\lambda),$$

并引用估计 (9),(10), 就得到关系式 (8) 的正确性. ▶

这样, 我们确立了一个事实: 为了作出当 $\lambda \to +\infty$ 时拉普拉斯积分 (1) 的相对误差为 $O(\lambda^{-\infty})$ 的渐近式, 可以用函数 $S(x)$ 在积分区间 I 上的绝对极大值点 x_0 的任意小邻域 $U_I(x_0)$ 上的积分代替它.

3. 典型积分及其渐近式

引理 3 (函数在临界点邻域中的典型形式) *如果实值函数 $S(x)$ 在点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 的邻域 (半邻域) 内属于光滑函数类 $C^{(n+k)}$, 而且*

$$S'(x_0) = \cdots = S^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad S^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

$k \in \mathbb{N}$ 或 $k = \infty$, 则存在点 x_0 的邻域 (半邻域) I_x, 点 $O \in \mathbb{R}$ 的邻域 I_y 以及微分同胚 $\varphi \in C^{(k)}(I_y, I_x)$, 使

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + sy^n, \quad \text{当} \quad y \in I_y, s = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0).$$

同时

$$\varphi(0) = x_0, \varphi'(0) = \left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

◀ 利用带积分余项的泰勒公式

$$S(x)=S(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 S^{(n)}(x_0+t(x-x_0))(1-t)^{n-1}dt,$$

把差 $S(x)-S(x_0)$ 表示成

$$S(x)-S(x_0)=(x-x_0)^n r(x)$$

的形式, 其中函数

$$r(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 S^{(n)}(x_0+t(x-x_0))(1-t)^{n-1}dt,$$

根据积分关于参变量 x 微分的定理, 它属于函数类 $C^{(k)}$, 且 $r(x_0)=\frac{1}{n!}S^{(n)}(x_0)\neq 0$. 因此, 函数 $y=\psi(x)=(x-x_0)\sqrt[n]{|r(x)|}$ 在点 x_0 的某个邻域 (半邻域)I_x 中也属于函数类类 $C^{(k)}$, 而且还是单调的, 这是因为

$$\psi'(x_0)=\sqrt[n]{|r(x_0)|}=\left(\frac{|S^n(x_0)|}{n!}\right)^{1/n}\neq 0.$$

在这种情况下, 定义在 I_x 上的函数 ψ 有反函数 $\psi^{-1}=\varphi$, 它定义在包含点 $0=\psi(x_0)$ 的区间 $I_y=\psi(I_x)$ 上. 同时, $\varphi\in C^{(k)}(I_y,I_x)$.

其次, $\varphi'(0)=(\psi'(x_0))^{-1}=\left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}\right)^{1/n}$. 最后, 根据函数 φ 的构造方法本身, 得 $S(\varphi(y))=S(x_0)+sy^n$, 其中 $s=\operatorname{sgn}r(x_0)=\operatorname{sgn}S^{(n)}(x_0)$. ▶

注 1 通常人们最感兴趣的是 $n=1$ 或 2, 而 $k=1$ 或 ∞ 这些情况.

命题 2 (弱化还原) 设在积分 (1) 中, 积分区间 $I=[a,b]$ 是有限的, 且满足以下条件:

a) $f,S\in C(I,\mathbb{R})$;

b) $\max\limits_{x\in I}S(x)$只在一个点 $x_0\in I$ 处达到;

c) 在点 x_0 的 (包含在区间 I 内的) 某个邻域 $U_I(x_0)$ 中有 $S\in C^{(n)}(U_I(x_0),\mathbb{R})$;

d) $S^{(n)}(x_0)\neq 0$, 且如果 $1<n$, 则 $S^{(1)}(x_0)=\cdots=S^{(n-1)}(x_0)=0$.

那么, 当 $\lambda\to+\infty$ 时积分 (1) 可用形如

$$R(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\int_{I_y}r(y)e^{-\lambda y^n}dy$$

的积分代替, 误差根据局部化原理 (8) 确定. 这里 $I_y=[-\varepsilon,\varepsilon]$ 或 $I_y=[0,\varepsilon]$,ε 是任意小的一个正数, 而函数 r 是定义在 I_y 上具有与函数 f 在点 x_0 的邻域中一样的光滑性.

◀ 利用局部化原理, 取点 x_0 的邻域 $I_x = U(x_0)$ 使满足引理 3 的条件, 用在 I_x 上的积分代替积分 (1). 做变量替换 $x = \varphi(y)$, 我们将得到

$$\int_{I_x} f(x)e^{\lambda S(x)}dx = \left(\int_{I_y} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^n}dy\right)e^{\lambda S(x_0)}. \tag{11}$$

指数 $(-\lambda y^n)$ 中的负号, 与根据条件 $x_0 = \varphi(0)$ 是极大值点有关. ▶

以下引理给出了一些典型积分的渐近式, 拉普拉斯积分在一些基本情况下能简化成这些类型的典型积分.

引理 4 (沃森[①]引理) 设 $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < a \leqslant \infty$, 而 $f \in C([0, a], \mathbb{R})$. 那么, 关于积分

$$W(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}dx \tag{12}$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时的渐近式, 成立以下断言:

a) 积分 (12) 的渐近式的主项具有

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha}f(0)\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + O(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}) \tag{13}$$

的形式, 如果已知当 $x \to 0$ 有 $f(x) = f(0) + O(x)$ 的话.

b) 如果当 $x \to 0$ 时有 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1})$, 则

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} + O(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}). \tag{14}$$

c) 如果 f 在 $x = 0$ 无穷次可微, 则有渐近展开

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \tag{15}$$

它关于 λ 可任意次微分.

◀ 把积分 (12) 表示成在区间 $]0, \varepsilon]$ 和 $[\varepsilon, a[$ 的两个积分的和的形式, 这里 ε 是任意小的一个正数.

根据引理 1

$$\left|\int_\varepsilon^a x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}dx\right| \leqslant Ae^{-\lambda\varepsilon^\alpha} = O(\lambda^{-\infty}) \text{ 当 } \lambda \to +\infty,$$

因此,

$$W(\lambda) = \int_0^\varepsilon x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}dx + O(\lambda^{-\infty}) \text{ 当 } \lambda \to +\infty.$$

① 沃森 (Watson. G. N) (1886—1965) 是英国数学家.

在情况 b), $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k+r_n(x)$, 这里 $r_n\in C[0,\varepsilon]$ 且 $|r_n(x)|\leqslant Cx^{n+1}$ 在区间 $[0,\varepsilon]$ 上成立. 所以

$$W(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}a_k\int_0^{\varepsilon}x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^\alpha}dx+c(\lambda)\int_0^{\varepsilon}x^{n+\beta}e^{-\lambda x^\alpha}dx+o(\lambda^{-\infty}),$$

这里 $c(\lambda)$ 当 $\lambda\to+\infty$ 时是有界量.

根据引理 1, 当 $\lambda\to+\infty$, 有

$$\int_0^{\varepsilon}x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^\alpha}dx=\int_0^{+\infty}x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^\alpha}dx+O(\lambda^{-\infty}).$$

但

$$\int_0^{+\infty}x^{k+\beta-1}e^{-\lambda x^\alpha}dx=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)e^{-\frac{k+\beta}{\alpha}},$$

现在由此就可推出公式 (14) 以及它的特殊情形 —— 公式 (13).

展开式 (15) 可从等式 (14) 及泰勒公式推出.

展开式 (15) 关于 λ 的可微性可这样导出: 积分 (12) 关于 λ 的导数仍然是形如 (12) 的一个积分, 而对于 $W'(\lambda)$ 可按照公式 (15) 以显式表示出它当 $\lambda\to+\infty$ 时的渐近式来, 它与原来的展开式 (15) 经形式微分所得的结果是一致的. ►

例 6 我们来考察拉普拉斯变换

$$F(\lambda)=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\lambda x}dx,$$

我们已在例 1 中遇到过它. 如果这个积分对某个值 $\lambda=\lambda_0$ 绝对收敛, 而函数 f 在 $x=0$ 无穷可微, 则按公式 (15), 我们就求出

$$F(\lambda)\simeq\sum_{k=0}^{\infty}f^{(k)}(0)\lambda^{-(k+1)}\ \text{当}\ \lambda\to+\infty.$$

4. 拉普拉斯积分的渐近主项

定理 1 (渐近式的典型主项定理) 设积分 (1) 中的积分区间 $I=[a,b]$ 是有限的, $f,S\in C(I,\mathbb{R})$ 且 $\max\limits_{x\in I}S(x)$ 只在一个点 $x_0\in I$ 达到.

还设 $f(x_0)\neq 0, f(x)=f(x_0)+O(x-x_0)$ 当 $I\ni x\to x_0$, 而函数 S 属于在点 x_0 的邻域中的光滑函数类 $C^{(k)}$.

那么:

a) 如果 $x_0=a, k=2$ 且 $S'(x_0)\neq 0$ (即 $S'(x_0)<0$), 则

$$F(\lambda)=\frac{f(x_0)}{-S'(x_0)}e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-1}[1+O(\lambda^{-1})]\ \text{当}\ \lambda\to+\infty;\tag{2'}$$

b) 如果 $a < x_0 < b, k = 3$ 且 $S''(x_0) \neq 0$ (即 $S''(x_0) < 0$), 则

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})] \text{ 当 } \lambda \to +\infty; \tag{3'}$$

c) 如果 $x_0 = a, k = 3, S'(a) = 0$ 且 $S''(a) \neq 0$ (即 $S''(a) < 0$), 则

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{-2S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})] \text{ 当 } \lambda \to +\infty. \tag{4'}$$

◀ 利用局部化原理并做引理 3 中的变量替换 $x = \varphi(y)$, 根据有关弱化原理的命题 2, 推出下列关系式:

a) $F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_0^{\varepsilon} (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{\lambda y} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right);$

b) $F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right)$

$$= e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_0^{\varepsilon} ((f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) + (f \circ \varphi)(-y) \varphi'(-y)) e^{-\lambda y^2} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right);$$

c) $F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int_0^{\varepsilon} (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2} dy + O(\lambda^{-\infty}) \right).$

函数 $(f \circ \varphi)\varphi'$ 在上述要求下满足沃森引理的条件. 只要再应用沃森引理 (当 $n = 0$ 时的公式 (14)) 并注意到引理 3 中 $\varphi(0)$ 和 $\varphi'(0)$ 的表达式即可完成证明. ▶

这样一来, 公式 (2)—(4) 连同第 1 段中启示我们得到这些公式的那些朴素、明白而且有效的思想方法的正确性, 都得到了理论的说明.

现在, 我们来研究几个应用所证定理的例子.

例 7 *Γ 函数的渐近式* 可以把函数

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt \quad (\lambda > -1)$$

表示成拉普拉斯积分的形式:

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{\lambda \ln t} dt,$$

而且如果在 $\lambda > 0$ 时做变量替换 $t = \lambda x$, 则化成积分

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda + 1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln x)} dx,$$

它可借助证明了的定理去研究.

函数 $S(x) = \ln x - x$ 在区间 $]0, +\infty[$ 上有唯一的极大值点 $x = 1$, 且 $S''(1) = -1$. 根据局部化原理 (命题 1) 和定理 1 的断言 b), 我们推出

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e} \right)^{\lambda} [1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})] \text{ 当 } \lambda \to +\infty.$$

特别地, 由于 $\Gamma(n+1) = n!$ 当 $n \in \mathbb{N}$, 我们得到了经典的斯特林①公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n [1 + O(n^{-\frac{1}{2}})] \text{ 当 } n \to \infty, n \in \mathbb{N}.$$

例 8 贝塞尔函数

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta d\theta$$

的渐近式,其中 $n \in \mathbb{N}$. 这里 $f(\theta) = \cos n\theta, S(\theta) = \cos\theta, \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \pi} S(\theta) = S(0) = 1, S'(0) = 0, S''(0) = -1$, 因此, 根据定理 1 的断言 c), 有

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}[1 + O(x^{-\frac{1}{2}})] \text{ 当 } x \to +\infty.$$

例 9 设 $f \in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R}), S \in C^{(2)}([a,b],\mathbb{R})$, 且 $S(x) > 0$ 在 $[a,b]$ 上, $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} S(x)$ 仅在一个点 $x_0 \in [a,b]$ 达到. 如果 $f(x_0) \neq 0, S'(x_0) = 0, S''(x_0) \neq 0$, 则把积分

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_a^b f(x)[S(x)]^\lambda dx$$

改写成拉普拉斯积分

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{\lambda \ln S(x)}dx$$

的形式后, 根据定理 1 的断言 b) 和 c), 我们得到: 当 $\lambda \to +\infty$ 时

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \varepsilon f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}[S(x_0)]^{\lambda+\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}[1 + O(\lambda^{-\frac{1}{2}})],$$

这里 $\varepsilon = 1$, 当 $a < x_0 < b$ 时; 而当 $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$ 时,$\varepsilon = \frac{1}{2}$.

例 10 在区域 $x > 1$ 中, 勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta$$

当 $n \to \infty (n \in \mathbb{N})$ 的渐近式可作为上一个例子在 $f \equiv 1$ 时的特殊情形得出,

$$S(\theta) = x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta, \max_{0 \leqslant \theta \leqslant \pi} S(\theta) = S(0) = x + \sqrt{x^2-1},$$
$$S'(0) = 0, \quad S''(0) = -\sqrt{x^2-1}.$$

这样一来,

$$P_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi n}\sqrt[4]{x^2-1}}[1 + O(n^{-\frac{1}{2}})] \text{ 当 } n \to \infty, n \in \mathbb{N}.$$

①也可参看第 7 章 §3 练习 10.

*5. 拉普拉斯积分的渐近展开

定理 1 仅仅给出了拉普拉斯积分 (1) 特有的渐近式的主项, 而且是在条件 $f(x_0) \neq 0$ 下得到的. 从总体上看, 这当然是最典型的情况, 从而定理 1 毫无疑问是一个重要结果. 但是, 沃森引理就已经表明, 拉普拉斯积分的渐近式有时导致渐近展开. 当 $f(x_0)=0$, 从而定理 1 无能为力时, 这种可能性特别重要.

想完全放弃条件 $f(x_0) \neq 0$, 又不用任何东西去代替它, 停留在拉普拉斯方法的框架内, 当然是不行的: 要知道, 如果在函数 $S(x)$ 的极值点 x_0 的邻域中有 $f(x) \equiv 0$, 或当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 非常快地趋于零, 则点 x_0 可能对积分的渐近式没有任何作用. 现在, 我们经过研究已经得到特定的一类当 $\lambda \to +\infty$ 时的渐近序列 $\{e^{\lambda c}\lambda^{-p_k}\}$ $(p_0 < p_1 < \cdots)$, 可以关于这个序列论及渐近零元, 而不假定 $f(x_0) \neq 0$, 也可用下述方式陈述局部化原理: *当 $\lambda \to +\infty$ 时拉普拉斯积分 (1) 关于渐近序列 $\{e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-p_k}\}(p_0 < p_1 < \cdots)$ 精确到零元的渐近式, 与这个积分在点 x_0 的任意小的邻域上的那一部分的渐近式是一样的, 只要 x_0 是函数 $S(x)$ 在积分区间上的唯一的极大值点.*

但是, 对于这些问题, 我们将不再回过头去研究并把它们精确化, 而是在假定 f 和 S 是 $C^{(\infty)}$ 类函数的条件下, 给出利用了关于指数估计的引理 1, 关于变量替换的引理 3 和沃森引理 4 的相应的渐近展开的结果.

定理 2 (拉普拉斯渐近展开定理) *设 $I=[a,b]$ 是有限区间, $f,S \in C(I,\mathbb{R})$, $\max\limits_{x\in I} S(x)$ 只在一个点 $x_0 \in I$ 达到, 且 f,S 在点 x_0 的某一邻域 $U_I(x_0)$ 中属于 $C^{(\infty)}(U_I(x_0),\mathbb{R})$. 那么, 关于积分 (1) 的渐近式成立以下断言:*

a) *如果 $x_0=a, S^{(m)}(a) \neq 0, S^{(j)}(a)=0$ 对于 $1 \leqslant j < m$, 则*

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-\frac{1}{m}} e^{\lambda S(a)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m} \quad \text{当} \quad \lambda \to +\infty, \tag{16}$$

这里

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} m^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \left(h(x,a)\frac{d}{dx}\right)^k (f(x)h(x,a))\big|_{x=a},$$
$$h(x,a) = (S(a)-S(x))^{1-1/m}/S'(x).$$

b) *如果 $a < x_0 < b, S^{(2m)}(x_0) \neq 0, S^{(j)}(x_0)=0$ 对于 $1 \leqslant j < 2m$, 则*

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/2m} e^{\lambda S(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^{-k/m} \quad \text{当} \quad \lambda \to +\infty, \tag{17}$$

这里

$$c_k = 2\frac{(-1)^{2k+1}(2m)^{2k}}{(2k)!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right) \left(h(x,x_0)\frac{d}{dx}\right)^{2k} (f(x)h(x,x_0))\big|_{x=x_0},$$
$$h(x,x_0) = (S(x_0)-S(x))^{1-\frac{1}{2m}}/S'(x).$$

c) 如果 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ 且 $f(x)\sim\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ 当 $x\to x_0$, 则在情况 a) 和b) 下渐近式的主项分别为:

$$F(\lambda)=\frac{1}{m}\lambda^{-\frac{n+1}{m}}e^{\lambda S(a)}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)\left(\frac{m!}{|S^{(m)}(a)|}\right)^{\frac{n+1}{m}}\times\left[\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)+O(\lambda^{-\frac{n+1}{m}})\right], \tag{18}$$

$$F(\lambda)=\frac{1}{m}\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}e^{\lambda S(x_0)}\Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right)\left(\frac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|}\right)^{\frac{n+1}{2m}}\times\left[\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)+O\left(\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}\right)\right]. \tag{19}$$

d) 展开式 (16),(17) 关于 λ 可任意次微分.

◀ 从引理 1 可得, 在我们的条件下, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 积分 (1) 可用在点 x_0 的任意小的邻域上的积分代替, 而精确到只相差形如 $e^{\lambda S(a)}O(\lambda^{-\infty})$ 的一个量.

在这个邻域中做变量替换 $x=\varphi(y)$, 这是引理 3 中指出的那种变量替换, 把在 x_0 的小邻域上的积分化成

$$e^{-\lambda S(x_0)}\int_{I_y}(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)e^{-\lambda y^{\alpha}}dy \tag{20}$$

的形式, 这里 $I_y=[0,\varepsilon],\alpha=m$, 如果 $x_0=a$ 的话; 而如果 $a<x_0<b$, 则 $I_y=[-\varepsilon,\varepsilon],\alpha=2m$.

做替换 $x=\varphi(y)$ 的那个邻域, 可以认为是那样小的, 以致函数 f,S 在其中都无穷次可微. 那时, 积分 (20) 中积分号下的函数 $(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)$ 也可看做是无穷次可微的.

如果 $I_y=[0,\varepsilon]$, 即在情况 $x_0=a$ 下, 直接把沃森引理 4 应用于积分 (20), 就证明了展开 (16) 的存在性.

而如果 $I_y=[-\varepsilon,\varepsilon]$, 即在情况 $a<x_0<b$ 下, 我们把积分 (20) 化成

$$e^{-\lambda S(x_0)}\int_0^{\varepsilon}\left[(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)+(f\circ\varphi)(-y)\varphi'(-y)\right]e^{-\lambda y^{2m}}dy \tag{21}$$

的形式, 再应用沃森引理, 我们就得到展开式 (17).

展开式 (16),(17) 的可微性如下推出: 在我们的条件下, 积分 (1) 关于 λ 可微, 而且这时得到的积分还满足定理的条件. 对于它, 展开式 (16),(17) 成立, 从而可立即确认, 这些展开式事实上是与形式地微分原积分的展开式 (16),(17) 所得到的结果是一致的.

现在, 剩下的只是系数 a_k 和 c_k 的公式了. 根据沃森引理, $a_k = \dfrac{1}{k!m}\dfrac{d^k\Phi}{dy^k}(0)\Gamma\left(\dfrac{k+1}{m}\right)$, 这里 $\Phi(y)=(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)$.

但是, 注意到

$$\begin{aligned}
&S(\varphi(y))-S(a)=-y^m,\\
&S'(x)\varphi'(y)=-my^{m-1},\\
&\varphi'(y)=-m(S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x),\\
&\frac{d}{dy}=\varphi'(y)\frac{d}{dx},\\
&\Phi(y)=f(x)\varphi'(y),
\end{aligned}$$

我们得到

$$\frac{d^k\Phi}{dy^k}(0)=(-m)^{k+1}\left(h(x-a)\frac{d}{dx}\right)^k(f(x)h(x,a))\Bigg|_{x=a},$$

这里 $h(x,a)=(S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x)$.

类似地, 应用沃森引理于 (21), 可得出系数 c_k 的公式.

令 $\psi(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)+f(\varphi(-y))\varphi'(-y)$, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 有

$$\int_0^\varepsilon \psi(y)e^{-\lambda y^{2m}}dy\simeq\frac{1}{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}\Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right)\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}.$$

但 $\psi^{(2k+1)}(0)=0$, 这是由于函数 $\psi(y)$ 是偶的, 因此, 最后这个渐近展开可改写成

$$\int_0^\varepsilon \psi(y)e^{-\lambda y^{2m}}dy\simeq\frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi^{(2k)}(0)}{(2k)!}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2m}\right)\lambda^{-\frac{2k+1}{2m}}.$$

剩下来只需注意 $\psi^{(2k)}(0)=2\Phi^{(2k)}(0)$, 这里 $\Phi(y)=f(\varphi(y))\varphi'(y)$. 现在, c_k 的公式从已建立起来的 a_k 的公式, 把其中的 k 换成 $2k$, 再把代换结果加倍就得到.

为了在 c) 中的条件 $f(x)=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+O((x-x_0)^{n+1})$(这里 $f^{(n)}(x_0)\neq 0$) 下得到渐近展开 (16),(17) 的主项 (18),(19), 只要注意到 $x=\varphi(y), x_0=\varphi(0), x-x_0=\varphi'(0)y+O(y^2)$, 亦即当 $y\to 0$ 时有

$$(f\circ\varphi)(y)=y^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\varphi'(0))^n+O(y)\right)$$

和

$$(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)=y^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\varphi'(0))^{n+1}+O(y)\right),$$

因为 $\varphi'(0) = \left(\dfrac{m!}{|S^{(m)}(a)|}\right)^{\frac{1}{m}} \neq 0$, 如果 $x_0 = a$; 而如果 $a < x_0 < b$, 有 $\varphi'(0) = \left(\dfrac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|}\right)^{1/2m} \neq 0$.

最后只需把所得的表达式分别代入积分 (20),(21) 并利用沃森引理中的公式 (13) 即可完成定理的证明. ►

注 2 当 $n = 0, m = 1$ 时, 从公式 (18) 又得到公式 (2′).

类似地. 当 $n = 0, m = 1$ 时, 我们从 (19) 得到关系式 (3′).

最后, 等式 (4′) 由等式 (18) 在 $n = 0, m = 2$ 的条件下得出.

所有这些, 当然都是在定理 2 的条件下说的.

注 3 定理 2 涉及是函数 $S(x)$ 在区间 $I = [a, b]$ 上有唯一的极大值点的情况. 如果这种点有几个: $x_1, \cdots, x_n$, 则把积分 (1) 分成这种积分的和, 其中每一个的渐近式可用定理 2 描述. 这就是说, 在这种情形, 渐近式是上边那些极大值点的贡献的和 $\sum\limits_{j=1}^{n} F(\lambda, x_j)$.

容易想像, 这时可能发生某些, 甚至全部相互抵消的现象.

例 11 如果 $S \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且当 $x \to \infty$ 时 $S(x) \to -\infty$, 则

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S'(x) e^{\lambda S(x)} dx \equiv 0 \text{ 当 } \lambda > 0.$$

因此, 在这种情况显然应当存在贡献的相互干涉. 从形式观点看, 所举的例可能显得没有说服力, 因为从前说的都是有限积分区间的情况. 但是, 下边重要的注将消除这个疑问.

注 4 在定理 1 和 2 中, 为了使问题容易些并避免笨重的叙述, 我们假定了积分区间 I 是有限的, 而积分 (1) 是常义的. 其实, 如果在极大值点 $x_0 \in I$ 的任意邻域 $U(x_0)$ 之外成立不等式 $\sup\limits_{I \setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$, 则由引理 1 已能保证, 在 $U(x_0)$ 外部的区间上的积分与 $e^{\lambda S(x_0)}$ 相比, 当 $\lambda \to +\infty$ 时, 是指数小量 (当然, 是在积分 (1) 至少对某个值 $\lambda = \lambda_0$ 绝对收敛的条件下).

这样一来, 无论定理 1 还是定理 2, 只要刚才指出的条件满足, 它们对反常积分也都成立.

注 5 在定理 2 中得到的系数公式, 由于它们都很笨重, 通常只能用它们求出在具体计算中需要的渐近式的头几项. 就这些系数的公式来说, 很少能得到比定理 2 中指出的更加简单的渐近展开一般形式了. 然而, 这种情况也还是能遇到的. 为了阐明这些公式, 我们将考察以下几个例子.

例 12 容易用分部积分法得到概率误差积分

$$\mathrm{Er}f(x)=\int_x^{+\infty} e^{-u^2}du$$

当 $x\to+\infty$ 时的渐近式:

$$\mathrm{Er}f(x)=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\frac{1}{2}\int_x^{+\infty}u^{-2}e^{-u^2}du=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\frac{3e^{-x^2}}{2^2x^3}+\int_x^{+\infty}u^{-4}e^{-u^2}du$$
$$=\cdots$$

由此经明显的估计推出

$$\mathrm{Er}f(x)\simeq\frac{e^{-x^2}}{2x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k}x^{-2k} \text{ 当 } x\to+\infty. \tag{22}$$

现在, 让我们从定理 2 出发得出这个展开式.

经变换 $u=xt$ 得表达式

$$\mathrm{Er}f(x)=x\int_1^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt.$$

在这里置 $\lambda=x^2$ 并像在定理 2 中那样用字母 x 表示积分变量, 就将问题归结为求积分

$$F(\lambda)=\int_1^{\infty}e^{-\lambda x^2}dx \tag{23}$$

的渐近式, 这是因为 $\mathrm{Er}f(x)=xF(x^2)$.

根据注 4, 积分 (23) 满足定理 2 的条件: $S(x)=-x^2, S'(x)=-2x<0$ 当 $1\leqslant x<+\infty, S'(1)=-2, S(1)=-1$.

这样, $x_0=a=1, m=1, f(x)\equiv1, h(x,a)=\dfrac{1}{-2x}, h(x,a)\dfrac{d}{dx}=\dfrac{1}{-2x}\dfrac{d}{dx}$.

因此,

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^0\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2x}=\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1},$$

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^1\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(-1)x^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)=\left(-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^1\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2(-1)x^{-3}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3(-1)(-3)x^{-5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^k\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}x^{-(2k+1)}.$$

令 $x=1$, 我们求出

$$a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\Gamma(k+1)\left(-\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\right)=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}.$$

现在, 对积分 (23) 写出渐近展开式 (16) 后, 并注意关系式 $\mathrm{Er}f(x) = xF(x^2)$, 我们就得到当 $x \to +\infty$ 时函数 $\mathrm{Er}f(x)$ 的展开式 (22).

例 13 我们在例 7 中从表示式

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-\ln x)} dx \tag{24}$$

出发得到了当 $\lambda \to +\infty$ 时函数 $\Gamma(\lambda+1)$ 的渐近式主项. 现在, 我们来尝试一下, 利用定理 2 b), 把从前求出的公式精确化.

为了简化以下某些书写, 我们把积分 (24) 中的 x 换成 $x-1$. 于是得到

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x)-x)} dx,$$

并把问题归结为研究积分

$$F(\lambda) = \int_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x)-x)} dx \tag{25}$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时的渐近式. 这里 $S(x) = \ln(1+x) - x, S'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1, S'(0) = 0$, 即 $x_0 = 0, S''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}, S''(0) = -1 \neq 0$, 就是说, 根据注 4, 定理 2 的条件 b) 成立, 这里还应设 $f(x) \equiv 1$ 和 $m = 1$, 因为 $S''(0) \neq 0$.

函数 $h(x, x_0) = h(x)$ 在给定情形下有如下形式:

$$h(x) = -\frac{1+x}{x}(x - \ln(1+x))^{1/2}.$$

如果我们想找出渐近式的头两项, 则我们应当在 $x = 0$ 计算

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^0 (h(x)) = h(x),$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^1 (h(x)) = h(x)\frac{dh}{dx}(x)$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^2 (h(x)) = \left(h(x)\frac{d}{dx}\right)\left(h(x)\frac{dh}{dx}(x)\right) = h(x)\left[\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 (x) + h(x)\frac{d^2h}{dx^2}(x)\right].$$

显见, 如果找出 $h(0), h'(0), h''(0)$, 这个计算是容易完成的. 而 $h(0), h'(0)$ 和 $h''(0)$ 可从函数 $h(x), x \geqslant 0$, 在零的邻域中的泰勒展开

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1+x}{x}\left[x-\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+O(x^5)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1+x}{x}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+O(x^5)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{2}{3}x+\frac{2}{4}x^2+O(x^3)\right]^{1/2} \\ &= -\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{7}{36}x^4+O(x^3)\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}x+\frac{5}{36\sqrt{2}}x^2+O(x^3) \end{aligned}$$

中得到.

这样一来, $h(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, h'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3}, h''(0) = \frac{5}{18\sqrt{2}}$,

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^0 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^1 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{3},$$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^2 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{12\sqrt{2}},$$

$$c_0 = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2\pi},$$

$$c_1 = -2\frac{(2)^2}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}.$$

因此, 当 $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}\lambda^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{12}\lambda^{-\lambda}+O(\lambda^{-2})\right),$$

即当 $\lambda \to +\infty$

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left(1+\frac{1}{12}\lambda^{-1}+O(\lambda^{-2})\right). \tag{26}$$

渐近展开 (16) 和 (17) 也可以按照定理 2 的证明去求, 而不必涉及定理 2 的叙述中指出的系数表达式. 注意到这一点是有益的.

作为例子我们又将得到积分 (25) 的一个另外形式的渐近式.

利用局部化原理并在零的邻域中做替换 $x=\varphi(y)$, 使 $0=\varphi(0), S(\varphi(y))=\ln(1+\varphi(y))-\varphi(y)=-y^2$. 我们把问题归结为研究积分

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi'(y)e^{-\lambda y^2}dy=\int_0^{\varepsilon}\psi(y)e^{-\lambda y^2}dy$$

的渐近式, 这里 $\psi(y)=\varphi'(y)+\varphi'(-y)$. 最后这个积分的渐近展开可根据沃森引理得到

$$\int_0^{\varepsilon}\psi(y)e^{-\lambda y^2}dy\simeq\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi^k(0)}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\lambda^{-(k+1)/2}\ \text{当}\ \lambda\to+\infty,$$

注意到关系式 $\psi^{(2k+1)}(0)=0, \psi^{(2k)}(0)=2\varphi^{(2k+1)}(0)$, 由它可给出渐近级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda^{-(k+\frac{1}{2})}=\lambda^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k!2^{2k}}\lambda^{-k}.$$

于是, 对于积分 (25), 我们得到它的渐近展开

$$F(\lambda)\simeq\lambda^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k!2^{2k}}\lambda^{-k},\tag{27}$$

这里 $x=\varphi(y)$ 是那样一个光滑函数, 它使在 x 和 y 的零点的邻域中有 $x-\ln(1+x)=y^2$.

如果我们要求出渐近式的头两项, 则应在一般公式 (27) 中代入 $\varphi'(0)$ 和 $\varphi^{(3)}(0)$ 的具体值.

把求这些值的下列方法演示一下, 可能不是没有好处的, 通常, 它可以用于按一个函数的展开式求它的反函数的泰勒展开.

假设当 $y>0$ 时有 $x>0$, 我们从关系式

$$x-\ln(1+x)=y^2$$

依次得到

$$\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\right)=y^2,$$

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{2}y\left(1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{2}y\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}x^2+O(x^3)\right)\\&=\sqrt{2}y+\frac{\sqrt{2}}{3}yx-\frac{\sqrt{2}}{12}yx^2+O(yx^3).\end{aligned}$$

但当 $y \to 0$ 时 ($x \to 0$ 时) 有 $x \sim \sqrt{2}y$, 因此, 利用已经得到的 x 的表达式, 继续进行这个计算, 就得到: 当 $y \to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}y\left(\sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}yx + O(y^3)\right) - \frac{\sqrt{2}}{12}y(\sqrt{2}y)^3 + O(y^4) \\
&= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{9}y^2x - \frac{\sqrt{2}}{6}y^3 + O(y^4) \\
&= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{9}y^2(\sqrt{2}y) - \frac{\sqrt{2}}{6}y^3 + O(y^4) \\
&= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}y^3x + O(y^4).
\end{aligned}$$

这样一来, 我们得到了我们感兴趣的量 $\varphi'(0), \varphi^{(3)}(0)$ 的值: $\varphi'(0) = \sqrt{2}, \varphi^{(3)}(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

把它们代入公式 (27), 求出

$$F(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})\right) \text{ 当 } \lambda \to +\infty,$$

由此, 我们又得到公式 (26).

最后, 我们还将做两个与本节讨论的问题有关的注.

注 6 (高维情形的拉普拉斯方法) 我们指出, 拉普拉斯方法也能成功地应用于研究拉普拉斯重积分

$$F(\lambda) = \int_X f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

的渐近式, 其中 $x \in \mathbb{R}^n$,X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, f, S 是 X 中定义的实值函数.

对于这种积分, 关于指数估计引理 1 成立, 根据这个引理, 这种积分的渐近式的研究可归结为它的在函数 S 的极大值点 x_0 的邻域上取得那一部分

$$\int_{U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}dx$$

的渐近式的研究.

如果这是一个非蜕化极大值, 即 $S''(x_0) \neq 0$, 则根据莫尔斯引理 (参看第 1 卷第 8 章 §6) 存在变量替换 $x = \varphi(y)$ 使 $S(x_0) - S(\varphi(y)) = |y|^2$, 这里 $|y|^2 = (y^1)^2 + \cdots + (y^n)^2$. 因此, 问题归结到典型积分

$$\int_I (f \circ \varphi)(y)\det\varphi'(y)e^{-\lambda|y|^2}dy,$$

在函数 f, S 是光滑函数的情形, 可应用富比尼定理, 并依据上边证明了的沃森引理 (参看这方面的练习 8—11) 来研究它.

注 7 (稳定相位法) 如我们已经指出的, 拉普拉斯方法在它的广义理解下是:

1° 确定的局部化原理 (关于指数估计的引理 1).

2° 局部地把积分化成典型形式的方法 (莫尔斯引理).

3° 典型积分的渐近式的描述 (沃森引理).

局部化思想我们早在研究 $\delta-$型函数族时已经遇见过, 在研究级数和傅里叶变换时也遇见过 (黎曼引理, 函数的光滑性及其傅里叶变换减小的速度, 级数的收敛性及傅里叶积分).

形如

$$\widetilde{F}(\lambda) = \int_X f(x)e^{i\lambda S(x)}dx$$

的积分, 其中 $X \subset \mathbb{R}^n$, 在数学中占有重要地位, 它叫傅里叶积分.傅里叶积分与拉普拉斯积分的差别只是指数中的一个小小的因子 i. 但是, 这却导致对于实的 λ 和 $S(x)$ 有 $|e^{i\lambda S(x)}| = 1$, 从而, 在研究傅里叶积分的渐近式时极大值优先的思想不再适用.

设 $X = [a,b] \subset \mathbb{R}^1, f \in C_0^{(\infty)}([a,b],\mathbb{R})$ (即 f 在 $[a,b]$ 具有紧支集), $S \in C^{(\infty)}([a,b],\mathbb{R})$ 且在 $[a,b]$ 上 $S'(x) \neq 0$.

作分部积分并利用黎曼引理 (参看练习 12), 得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx &= \frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{f(x)}{S'(x)}de^{i\lambda S(x)} = -\frac{1}{i\lambda}\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{S'}\right)(x)e^{i\lambda S(x)}dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_a^b f_1(x)e^{i\lambda S(x)}dx = \cdots = \frac{1}{\lambda^n}\int_a^b f_n(x)e^{i\lambda S(x)}dx \\ &= o(\lambda^{-n}) \text{ 当 } \lambda \to \infty.\end{aligned}$$

这样一来, 如果 $S'(x) \neq 0$ 在区间 $[a,b]$ 上, 那么, 由于当 $\lambda \to \infty$ 时函数 $e^{i\lambda S(x)}$ 的振荡频率总在增长, 区间 $[a,b]$ 上的傅里叶积分实际上是 $O(\lambda^{-\infty})$ 型的量.

傅里叶积分中的函数 $S(x)$ 叫*相位函数*. 这样, 傅里叶积分有自己的局部化原理, 它叫做*稳定相位原理*. 根据这个原理, 傅里叶积分 (在 $f \in C_0^{(\infty)}$ 的情况) 当 $\lambda \to \infty$ 的渐近式, 在不计 $O(\lambda^{-\infty})$ 的差别时, 与取在相位函数的稳定点 x_0 (即使 $S'(x_0) = 0$ 的点 x_0) 的邻域 $U(x_0)$ 上的那部分傅里叶积分的渐近式相同.

然后, 借助变量替换, 把问题归结为研究典型积分

$$E(\lambda) = \int_0^\varepsilon f(x)e^{i\lambda x^\alpha}dx,$$

的渐近式, 它由专门的一个欧拉引理来描述, 这个引理对傅里叶积分所起的作用, 犹如沃森引理对拉普拉斯积分的作用.

研究傅里叶积分的渐近式的这个框架叫做*稳定相位方法*.

稳定相位方法中的局部化原理的自然属性跟拉普拉斯积分的情形完全不是一回事, 但是, 我们看到, 拉普拉斯方法的一般框架在这里还是适用的.

关于稳定相位方法的一些详细情况, 读者将在练习 12—17 中找到.

练 习

一维情形的拉普拉斯方法.

1. a) 对于 $\alpha > 0$, 函数 $h(x) = e^{-\lambda x^\alpha}$ 在 $x = 0$ 达到最大值. 同时, 若 $\delta = O\left(\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, 则 $h(x)$ 在点 $x = 0$ 的 $\delta-$ 邻域内是 1 阶量.

利用引理 1, 证明: 如果 $0 < \delta < 1$, 则积分

$$W(\lambda) = \int_{c(\lambda,\delta)}^{a} x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx,$$

其中 $c(\lambda, \delta) = \lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}$, 当 $\lambda \to +\infty$ 时的阶为 $O(e^{-A\lambda^\delta})$. 这里 A 是一个正常数.

b) 证明: 如果函数 f 在 $x = 0$ 连续, 则

$$W(\lambda) = \alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[f(0) + o(1)]\lambda^{-\beta/\alpha} \quad 当 \quad \lambda \to +\infty.$$

c) 定理 1, a) 中的条件 $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ 可以减弱, 用 f 在点 x_0 连续这个条件代替它. 试证: 这时渐近式主项不变, 但一般说, 等式 $(2')$ 不再保持, 其中的 $O(x - x_0)$ 现在应换成 $o(1)$.

2. a) 伯努利数 B_{2k} 由关系式

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} = -\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}, |t| < 2\pi$$

定义. 已知

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) = \ln x + \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right) e^{-tx} dt.$$

试证

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x) \simeq \ln x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k} x^{-2k} \text{ 当 } x \to +\infty.$$

b) 试证: 当 $x \to +\infty$, 有

$$\ln\Gamma(x) \simeq \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} x^{-2k+1}$$

这个渐近展开式叫做斯特林级数.

c) 试利用斯特林级数求函数 $\Gamma(x+1)$ 当 $x \to +\infty$ 时的渐近式的头两项, 并把你的结果与例 13 的结果进行比较.

d) 模仿例 13 的方法, 利用斯特林级数, 独立地证明

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \text{ 当 } x \to +\infty.$$

3. a) 设 $f \in C([0,a],\mathbb{R}), S \in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R}), S(x) > 0$ 在 $[0,a]$ 上, $S(x)$ 在 $x=0$ 达到最大且 $S'(0) \neq 0$. 试证: 如果 $f(0) \neq 0$, 则

$$I(\lambda) := \int_0^a f(x) S^\lambda(x) dx \sim -\frac{f(0)}{\lambda S'(0)} S^{\lambda+1}(0) \text{ 当 } \lambda \to +\infty.$$

b) 如果还假定 $f, S \in C^{(\infty)}([0,a],\mathbb{R})$, 导出渐近展开

$$I(\lambda) \simeq S^{\lambda+1}(0) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-(k+1)} \text{ 当 } \lambda \to +\infty.$$

4. a) 试证

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}(1 + O(n^{-1})) \text{ 当 } n \to +\infty.$$

b) 用欧拉积分表示这个积分, 并证明当 $n \in \mathbb{N}$ 时它等于 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

c) 试求瓦里斯公式 $\pi = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$.

d) 试求 a) 中积分当 $n \to +\infty$ 的渐近展开的头两项.

5. a) 试证 $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ 当 $n \to +\infty$.

b) 试求这个积分的渐近式的后继项.

6. 试证: 如果 $\alpha > 0$, 则当 $x \to +\infty$, 有

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha t} t^x dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e^\alpha}} x^{\frac{1}{2\alpha}} \exp\left(\frac{\alpha}{e} x^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

7. a) 求积分

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt} dt \text{ 当 } n \to +\infty$$

的渐近式的主项.

b) 利用所得的结果和恒等式 $k! n^{-k} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^k dt$ 证明

$$\sum_{k=0}^{n} c_n^k k! n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}(1 + O(n^{-1})) \text{ 当 } n \to +\infty.$$

高维情形的拉普拉斯方法.

8. **关于指数估计的引理.** 设 $M = \sup\limits_{x \in D} S(x)$, 又设在某值 $\lambda = \lambda_0$ 积分

$$F(\lambda) = \int_{D \subset \mathbb{R}^n} f(x) e^{\lambda S(x)} dx \tag{*}$$

绝对收敛. 试证, 当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 这个积分绝对收敛, 且

$$|F(\lambda)| \leqslant \int_D |f(x) e^{\lambda S(x)}| dx \leqslant A e^{\lambda M} (\lambda \geqslant \lambda_0),$$

这里 A 是一个正常数.

9. **莫尔斯引理.** 设 x_0 是函数 $S(x)$ 的非蜕化临界点, 这里 $S(x)$ 是定义在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的一个邻域内并属于 $C^{(\infty)}$类. 则存在$x = x_0$的邻域$U, y = 0$的邻域V和属于$C^{(\infty)}(V, U)$ 的微分同胚 $\varphi : V \to U$, 满足

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \nu_j (y^j)^2,$$

$\det \varphi'(0) = 1, \nu_1, \cdots, \nu_n$ 是矩阵 $S''_{xx}(x_0)$ 的本征值, 而 $y = (y^1, \cdots, y^n)$ 是点 $y \in \mathbb{R}^n$ 的坐标.

试根据在第 1 卷第 8 章 §6 的莫尔斯引理证明莫尔斯引理的这个具体一些的形式.

10. **典型积分的渐近式.**

a) 设 $t = (t_1, \cdots, t_n), V = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t_j| \leqslant \delta, j = 1, 2, \cdots, n\}, a \in C^{(\infty)}(V, \mathbb{R})$, 且 $F_1(\lambda, t') = \int_{-\delta}^{\delta} a(t_1, \cdots, t_n) e^{-\frac{\lambda \nu_1}{2} t_1^2} dt_1$, 这里 $t' = (t_2, \cdots, t_n), \nu_1 > 0$. 试证, $F_1(\lambda, t') \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(t') t^{-(k+\frac{1}{2})}$ 当 $\lambda \to +\infty$; 这个展开式关于 $t' \in V' = \{t' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |t^j| \leqslant \delta, j = 2, \cdots, n\}$ 是一致的, 且对任意的 $k = 0, 1, \cdots$, 有 $a_k \in C^{(\infty)}(V', \mathbb{R})$.

b) 以 $e^{-\frac{\lambda \nu_2}{2} t_2^2}$ 乘 $F_1(\lambda, t')$, 试根据相应渐近展开式逐项积分的合法性求函数

$$F_2(\lambda, t'') = \int_{-\delta}^{\delta} F_1(\lambda, t') e^{-\frac{\lambda \nu_2}{2} t_2^2} dt_2 \text{ 当 } \lambda \to +\infty$$

的渐近展开, 这里 $t'' = (t_3, \cdots, t_n), \nu_2 > 0$.

c) 试证, 对于函数

$$A(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} a(t_1, \cdots, t_n) e^{-\frac{\lambda}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j t_j^2} dt_1 \cdots dt_n,$$

其中 $\nu_j > 0, j = 1, \cdots, n$, 成立渐近展开

$$A(\lambda) \simeq \lambda^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k} \text{ 当 } \lambda \to +\infty,$$

这里 $a_0 = \sqrt{\dfrac{(2\pi)^n}{\nu_1 \cdot \cdots \cdot \nu_n}} a(0)$.

11. **高维情形的拉普拉斯积分渐近式**

a) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭区域, $f, S \in C(D, \mathbb{R}), \max\limits_{x \in D} S(x)$ 只在区域 D 的某一内点x_0达到; f, S在点 x_0 的某一邻域内属 $C^{(\infty)}$, 且 $\det S''(x_0) \neq 0$.

试证: 如果积分 (*) 对某个 $\lambda = \lambda_0$ 绝对收敛, 则

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k} \text{ 当 } \lambda \to +\infty,$$

且这个展开式关于 λ 可任意次可微, 而它的主项有

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|\det S''(x_0)|}} (f(x_0) + O(\lambda^{-1}))$$

的形式.

b) 验证: 如果在上一断言中代替 $f, S \in C^{(\infty)}$ 只假定在点 x_0 的邻域中有 $f \in C$, 而 $S \in C^{(3)}$, 则当 $\lambda \to +\infty$ 渐近式主项不变, 只是要以 $o(1)$ 代替 $O(\lambda^{-1})$.

一维情形的稳定相位方法

12. *黎曼引理的推广.*

a) 试证黎曼定理的以下推广.

设 $S \in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$ 且 $S'(x) \neq 0$ 在 $[a,b] =: I$ 上. 那么, 对任何在区间 I 上绝对可积的函数 f 成立关系式

$$\widetilde{F}(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx \to 0 \text{ 当 } \lambda \to \infty, \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) 验证: 如果此外还假定 $f \in C^{(n+1)}(I,\mathbb{R})$, 而 $S \in C^{(n+2)}(I,\mathbb{R})$, 则当 $\lambda \to \infty$ 有

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}(i\lambda)^{-(k+1)}\left(\frac{1}{S'(x)}\frac{d}{dx}\right)^k \frac{f(x)}{S'(x)}\bigg|_a^b + o(\lambda^{-(n+1)}).$$

c) 写出函数 $\widetilde{F}(\lambda)$ 当 $\lambda \to \infty, \lambda \in \mathbb{R}$ 时的渐近式主项.

d) 试证: 如果 $S \in C^{(\infty)}(I,\mathbb{R})$, 而 $f\Big|_{[a,c]} \in C^{(2)}[a,c], f\Big|_{[c,b]} \in C^{(2)}[c,b]$, 但 $f \notin C^{(2)}[a,b]$, 则当 $\lambda \to \infty$, 函数 $\widetilde{F}(\lambda)$ 未必是量 $o(\lambda^{-1})$.

e) 试证: 当 $f, S \in C^{(\infty)}(I,\mathbb{R})$, 函数 $\widetilde{F}(\lambda)$ 当 $\lambda \to \infty$ 可以展开成渐近级数.

f) 如果 $\alpha > 0$, 而 $\psi_1 = e^{i\lambda x}, \psi_2 = \cos\lambda x, \psi_3 = \sin\lambda x$, 试求积分 $\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha}\psi_j(x,\lambda)dx$ $(j = 1,2,3)$ 当 $\lambda \to \infty, \lambda \in \mathbb{R}$ 的渐近展开.

13. *局部化原理.*

a) 设 $I = [a,b] \subset \mathbb{R}, f \in C_0^{(\infty)}(I,\mathbb{R}), S \in C^{(\infty)}(I,\mathbb{R})$ 且 $S'(x) \neq 0$ 在 I 上. 试证

$$\widetilde{F}(\lambda) := \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}dx = O(|\lambda|^{-\infty}) \text{ 当 } \lambda \to \infty.$$

b) 设 $f \in C_0^{(\infty)}(I,\mathbb{R}), S \in C^{(\infty)}(I,\mathbb{R}); x_1, \cdots, x_m$ 是函数 $S(x)$ 的有限多个稳定点, 在 $I \setminus \{x_1, \cdots, x_m\}$ 上 $S'(x) \neq 0$. 我们用 $\widetilde{F}(\lambda, x_j)$ 表示函数 $f(x)e^{i\lambda S(x)}$ 在点 x_j 的邻域 $U(x_j)$ 上的积分, $j = 1, \cdots, m$, 设 $U(x_j)$ 的闭包不包含其他的临界点. 试证:

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m}\widetilde{F}(\lambda, x_j) + O(|\lambda|^{-\infty}) \text{ 当 } \lambda \to \infty.$$

14. *一维情形傅里叶积分的渐近式.*

a) 在相当广泛的情况下, 借助局部化原理能把求一维傅里叶积分的渐近式的问题归结为求典型积分

$$E(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1}f(x)e^{i\lambda x^\alpha}dx$$

的渐近式, 而关于这个典型积分, 成立以下

艾尔代伊引理　*设 $\alpha \geqslant 1, \beta > 0, f \in C^{(\infty)}([0,a],\mathbb{R})$ 且 $f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots$, 则*

$$E(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \text{ 当 } \lambda \to +\infty,$$

这里

$$a_k = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right) e^{i\frac{\pi}{2}\frac{k+\beta}{\alpha}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

而且这个展开式关于 λ 可任意次微分.

试利用艾尔代伊引理证明下列命题.

设 $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 是有限区间, $f, S \in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, 且 $f \in C_0(I, \mathbb{R})$, 而 S 在 I 上有唯一的稳定点 $x_0, S'(x_0) = 0$, 但 $S''(x_0) \neq 0$. 那么, 当 $\lambda \to +\infty$, 有

$$\widetilde{F}(\lambda, x_0) := \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \simeq e^{i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}S''(x_0)} e^{i\lambda S(x_0)} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}$$

且渐近式的主项具有

$$\widetilde{F}(\lambda, x_0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}S''(x_0) + \lambda S(x_0)\right)} (f(x_0) + O(\lambda^{-1}))$$

的形式.

b) 考察整指标 $n \geqslant 0$ 的贝塞尔函数:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi) d\varphi.$$

试证

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \text{ 当 } x \to +\infty.$$

高维情形的稳定相位方法.

15. *局部化原理*

a) 试证下述命题.

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $f \in C_0^{(\infty)}(D, \mathbb{R}), S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R}), \mathrm{grad}S(x) \neq 0$ 当 $x \in \mathrm{supp} f$, 且

$$\widetilde{F}(\lambda) := \int_D f(x) e^{i\lambda S(x)} dx. \tag{**}$$

那么, 对任何 $k \in \mathbb{N}$, 存在正常数 $A(k)$ 使对一切 $\lambda \geqslant 1$ 成立估计 $|\widetilde{F}(\lambda)| \leqslant A(k)\lambda^{-k}$, 从而, $\widetilde{F}(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ 当 $\lambda \to +\infty$.

b) 设同上一样有 $f \in C_0^{(\infty)}(D, \mathbb{R}), S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$, 但 S 在 D 中有有限多个临界点 $x_1, \cdots, x_m$, 在这些点外 $\mathrm{grad}S(x) \neq 0$. 用 $\widetilde{F}(\lambda, x_j)$ 表示函数 $f(x)e^{i\lambda S(x)}$ 在点 x_j 的邻域 $U(x_j)$ 上的积分, 而 $U(x_j)$ 的闭包中没有 x_j 以外的其他临界点. 试证

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{F}(\lambda, x_j) + O(\lambda^{-\infty}) \text{ 当 } \lambda \to +\infty.$$

16. *化成典型积分.* 如果 x_0 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的函数 $S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$ 的非蜕化临界点, 则根据莫尔斯引理 (参看练习 9) 存在那样的局部变量替换 $x = \varphi(y)$, 使 $x_0 = \varphi(0), S(\varphi(y)) = S(x_0) + \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j (y^j)^2$, 且 $\det\varphi'(y) > 0$, 其中 $\varepsilon_j = \pm 1, y = (y^1, \cdots, y^{(n)})$.

试利用局部化原理 (练习 15) 证明: 如果 $f \in C_0^{(\infty)}(D, \mathbb{R}), S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R}), S$ 在 D 中至多有有限个临界点, 它们全是非蜕化的, 则积分 (**) 的渐近式的研究可归结成专门的积分

$$\psi(\lambda) := \int_{-\delta}^{\delta} \cdots \int_{-\delta}^{\delta} \psi(y^1, \cdots, y^n) e^{\frac{i\lambda}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j (y^j)^2} dy^1 \cdots dy^n$$

的渐近式的研究.

17. *高维情形傅里叶积分的渐近式.*

试利用艾尔代伊引理 (练习 14a)) 和练习 10 中的运算方案证明: 如果 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域, $f, S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$, $\mathrm{supp} f$ 在 D 中紧, x_0 是函数 S 在 D 中的唯一的而且是非蜕化的临界点, 则对于积分 (**) 当 $\lambda \to +\infty$ 时成立渐近展开

$$\widetilde{F}(\lambda) \simeq \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{i\lambda S(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k},$$

且它关于 λ 可任意次微分.

渐近式的主项有

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4}\mathrm{sgn} S''(x_0)\right] \\ \times \left|\det S''(x_0)\right|^{-\frac{1}{2}} \left[f(x_0) + O(\lambda^{-1})\right] \text{ 当 } \lambda \to +\infty.\end{aligned}$$

这里 $S''(x_0)$ 是函数 S 在点 x_0 的二阶导数矩阵 (*亥赛矩阵*), 它是对称的, 且根据假设条件它是非蜕化的, 而 $\mathrm{sgn} S''(x_0)$ 是这个矩阵的符号差 (或它对应的二次形式的符号差), 即矩阵 $S''(x_0)$ 的正负特征值的个数差 $\nu_+ - \nu_-$.

口试提纲

第三学期

级数和含参变量积分

1. 级数收敛性的柯西准则. 收敛性的比较定理和基本的充分性检验法 (控制检验法, 积分检验法, 阿贝尔 – 狄利克雷检验法). 级数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.
2. 函数项级数和函数族的一致收敛性. 函数项级数一致收敛性的柯西准则和基本的充分性检验法 (强函数检验法, 阿贝尔 – 狄利克雷检验法).
3. 两个极限可交换的充分条件. 连续性, 积分法, 微分法和极限过渡.
4. 幂级数的收敛域和收敛特点. 柯西 – 阿达马公式. 阿贝尔 (第二) 定理. 基本初等函数的泰勒展开. 欧拉公式. 幂级数的微分法和积分法.
5. 反常积分. 收敛性的柯西准则和基本的充分性检验法 (控制检验法, 阿贝尔 – 狄利克雷检验法).
6. 含参变量反常积分的一致收敛性. 一致收敛性的柯西准则和基本的充分性检验法 (强函数检验法, 阿贝尔 – 狄利克雷检验法).
7. 含参变量的常义积分的连续性, 微分法和积分法.
8. 含参变量的反常积分的连续性, 微分法和积分法. 狄利克雷积分.
9. 欧拉积分. 定义域, 微分性质, 递推公式, 各种表示, 相互关系. 泊松积分.
10. δ 型函数族. 卷积收敛性定理. 用代数多项式一致逼近连续函数的经典的魏尔斯特拉斯定理.

口试参考题

1. P 是多项式. 计算 $\left(e^{t\frac{d}{dx}}\right)P(x)$.

2. 试验证, 向量函数 $e^{tA}x_0$ 是柯西问题 $\dot{x}=Ax, x(0)=x_0$ 的解 ($\dot{x}=Ax$ 是由矩阵 A 给出的方程组).

3. 试求方程 $\sin x+\dfrac{1}{x}=0$ 的正根 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时具精度 $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ 的渐近式.

4. a) 试证,$\ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots$. 试问, 为求出 $\ln 2$ 精确到误差 $\leqslant 10^{-3}$ 的近似值, 需取这个级数的多少项?

   b) 试验证, $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-t}=t+\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{5}t^5+\cdots$. 利用这个展开式, 令 $x=\dfrac{1+t}{1-t}$, 计算 $\ln x$ 是方便的.

   c) 在 b) 中令 $t=\dfrac{1}{3}$ 得

$$\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots$$

   试问, 为求出 $\ln 2$ 精确到误差 $\leqslant 10^{-3}$ 的近似值, 需取这个级数多少项? 并与 a) 比较.

   这是改善收敛性的一个方法.

5. 试验证, 在阿贝尔意义下, 成立

   a) $1-1+1\cdots=\dfrac{1}{2}$.

   b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin k\varphi=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\varphi, \varphi\neq 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

   c) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi=0, \varphi\neq 2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

6. 试证阿达马引理:

   a) 如果 $f\in C^{(1)}(U(x_0))$, 则 $f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0)$, 其中 $\varphi\in C(U(x_0))$ 且 $\varphi(x_0)=f'(x_0)$.

   b) 如果 $f\in C^{(n)}(U(x_0))$, 则

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\\ &\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}+\varphi(x)(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

   其中 $\varphi\in C(U(x_0))$ 且 $\varphi(x_0)=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

   c) 当 $x=(x^1,\cdots,x^n)$, 亦即当 f 是 n 元函数时, 这些关系的坐标写法是怎样的?

7. a) 试验证, 函数

$$J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

   满足贝塞尔方程 $y''+\dfrac{1}{x}y'+y=0$.

   b) 应用幂级数尝试着求解这个方程.

c) 求函数 $J_0(x)$ 的幂级数展开.

8. 试证以下渐近展开成立: 当 $x \to +\infty$

a) $\Gamma(\alpha, x) := \int_x^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \simeq e^{-x}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{\alpha-k}$,

b) $\mathrm{Er}f(x) := \int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \simeq \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-k\right)x^{2k-1}}$

9. a) 遵循欧拉的方法找出级数 $1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + \cdots$ 与函数

$$S(x) := \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+xt}dt$$

的联系.

b) 这个级数收敛吗?

c) 当 $x \to 0$ 时, 它给出 $S(x)$ 的渐近展开吗?

10. a) 线性装置 A, 它的特性不依赖于时间, 对 $\delta-$ 函数输入信号 $\delta(t)$ 的响应是输出信号 $E(t)$. 试问, 装置对输入信号 $f(t)(-\infty < t < +\infty)$ 的响应?

b) 总能根据变换了的信号 $\widehat{f} := Af$ 单值地恢复原输入信号 f 吗?

第四学期

积分学 (多变量的)

1. n 维区间上的黎曼积分. 积分存在的勒贝格准则.

2. n 维区间上实函数的积分存在的达布准则.

3. 集合上的积分. 集合的若尔当测度及其几何意义. 可测集上积分存在的勒贝格准则. 积分的线性性和可加性.

4. 积分的估计.

5. 重积分化成累次积分: 富比尼定理及其重要推论.

6. 重积分变量替换公式. 测度和积分的不变性.

7. 反常重积分: 基本定义, 收敛性的控制判别法, 典型积分. 欧拉 – 泊松积分的计算.

8. $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维曲面和给定 k 维曲面的基本方法. 抽象 k 维流形.k 维流形的边界是 $(k-1)$ 维无边流形.

9. 可定向及不可定向流形. 给抽象流形定向的方法和 $\mathbb{R}^n$ 中的 (超) 曲面.

定向流形的边界的可定向性, 流形及其边界定向的和谐性.

10. 流形在一点的切向量和切空间. 切向量解释作微分算子.

11. 区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的微分形式. 例子: 函数的微分, 功形式, 流量形式. 微分形式的坐标表示. 外微分运算.

12. 点的映射及在这些点上定义的函数的共轭映射. 在光滑映射下, 点的变换及在这些点处的切空间的向量的变换. 在光滑映射下, 函数及微分形式的转移. 在坐标形式下进行形式转移的做法.

13. 微分形式的转移与其外积运算和微分运算的交换. 流形上的微分形式. 微分形式运算的不变性 (合理性).

14. 功和通量的计算纲要.$k-$ 形式沿 k 维流形的积分. 定向的方法. 积分对参数化的独立性.$k-$ 微分形式沿 k 维紧定向流形的积分的一般定义.

15. 方体上的格林公式, 它的推导, 解释和用微分形式的积分语言表述. 一般斯托克斯公式. 化简到 $k-$ 维区间情形并证明. 经典分析的积分公式是一般斯托克斯公式的具体推论.

16. $\mathbb{R}^n$ 中和曲面上的体积形式. 体积形式对定向的依赖性. 第一型积分及其对定向的独立性. 把面积和物质曲面的质量看作第一型积分.k 维曲面 $S^k \subset \mathbb{R}^n$ 的体积形式的局部参数表示, 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 S^{n-1} 的体积形式在包含 S^{n-1} 的空间的笛卡儿坐标下的表示.

17. 场论中基本微分算子 $(\mathrm{grad}, \mathrm{rot}, \mathrm{div})$ 以及它们与欧氏定向空间中的外微分算子d的关系.

18. 场的功和通量的第一型积分写法. 把 $\mathbb{R}^3$ 中场论的基本积分公式看作经典分析基本公式的向量写法.

19. 势场和它的势. 恰当形式和闭形式. 形式的恰当性和向量场成为势场的必要性的微分判别法. 在单连通区域下它的充分性. $1-$ 形式和向量场的恰当性的积分准则.

20. 闭形式的恰当性的局部性 (庞加莱引理). 整体分析, 同调与上同调. 迪 · 拉姆定理 (只述不证).

21. 斯托克斯 (高 - 奥) 公式的应用例子: 推导基本的连续介质力学方程. 梯度、旋度和散度的物理意义.

22. 算子 ∇ 及其利用. 梯度、旋度和散度在三维曲线坐标系中的具体形式.

口试参考题

以下 22 组习题 (1)—22)) 依次与上边列出的 22 个要点匹配

1) 第十一章, §1, 练习 2,3.
2) 第十一章, §1, 练习 4.
3) 第十一章, §2, 练习 1,3,4.
4) 第十一章, §3, 练习 1,2,3,4.
5) 第十一章, §4, 练习 6,7.
   第十三章, §2, 练习 6.
6) 第十一章, §5, 练习 9.
   第十二章, §5, 练习 5,6.
7) 第十一章, §6, 练习 1,5,7.
8) 第十二章, §1, 练习 2,3; §4, 练习 1,4
9) 第十二章, §2, 练习 1,2,3,4; §5, 练习 11.
10) 第十五章, §3, 练习 1,2.

11) 第十二章, §5, 练习 9;
    第十五章, §3, 练习 3.
12) 第十五章, §3, 练习 4.
13) 第十二章, §5, 练习 8,10.
14) 第十三章, §1, 练习 3,4,5,9.
15) 第十三章, §3, 练习 1,10,13,14.
16) 第十二章, §4, 练习 10.
    第十三章, §2, 练习 5.
17) 第十四章, §1, 练习 1,2.
18) 第十四章, §2, 练习 1,2,3,4,8.
19) 第十四章, §3, 练习 7,13,14.
20) 第十四章, §3, 练习 11,12.
21) 第十三章, §3, 练习 11.
    第十四章, §1, 练习 8.
22) 第十四章, §1, 练习 4,5,6.

考试大纲

第三学期

级数和含参变量积分

1. 级数收敛性的柯西准则. 收敛性的比较定理和基本的充分性判别法 (强函数判别法, 积分判别法, 阿贝尔 – 狄利克雷判别法). 级数 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

2. 函数项级数和函数族的一致收敛性. 函数项级数一致收敛性的柯西准则和基本的充分性判别法 (强函数判别法, 阿贝尔 – 狄利克雷判别法).

3. 两个极限可交换的充分条件. 连续性, 积分法, 微分法和极限过渡.

4. 幂级数的收敛域和收敛特点. 柯西 – 阿达马公式. 阿贝尔 (第二) 定理. 基本初等函数的泰勒展开. 欧拉公式. 幂级数的微分法和积分法.

5. 反常积分. 收敛性的柯西准则和基本的充分性判别法 (控制检验法, 阿贝尔 – 狄利克雷检验法).

6. 含参变量反常积分的一致收敛性. 一致收敛性的柯西准则和基本的充分性判别法 (控制检验法, 阿贝尔 – 狄利克雷检验法).

7. 含参变量的常义积分的连续性, 微分法和积分法.

8. 含参变量的反常积分的连续性, 微分法和积分法. 狄利克雷积分.

9. 欧拉积分. 定义域, 微分性质, 递推公式, 各种表示, 相互关系. 泊松积分.

10. δ 型函数族. 卷积收敛性定理. 用代数多项式一致逼近连续函数的经典的魏尔斯特拉斯定理.

11. 具内积的向量空间. 内积的连续性和与此相关的它的代数性质. 正交和正交规范向量系. 毕达哥拉斯定理. 傅里叶系数和傅里叶级数. 函数空间中的内积和正交系的例子.

12. 垂线引理. 傅里叶系数的极值性质. 傅里叶级数的贝塞尔不等式和收敛性. 规范正交系的完全性条件, 最小二乘法.

13. 实形式和复形式的经典的傅里叶级数 (傅里叶三角级数). 黎曼引理. 局部化原理和傅里叶级数在一点的收敛性. 例子: 将 $\cos(\alpha x)$ 展成傅里叶级数和将 $\sin \pi x/\pi x$ 展成无穷乘积.

14. 函数的光滑性, 它的傅里叶系数的递减速度和它的傅里叶级数的收敛速度.

15. 三角函数系的完全性和傅里叶三角级数的平均收敛性.

16. 傅里叶变换和傅里叶积分 (反演公式). 例: 对于 $f(x) := \exp(-a^2x^2)$ 计算 $\hat{f}$.

17. 傅里叶变换和微分算子. 函数的光滑性和它的傅里叶变换的递减速度. 帕塞瓦尔等式. 傅里叶变换是速降函数空间的等距同构映射.

18. 傅里叶变换和卷积. 一维热传导方程的解.

19. 根据装置的谱函数和接收到的信号恢复传递来的信号. 科捷利尼科夫公式.

20. 渐近序列和渐近级数. 例: 函数 $\mathrm{Ei}(x)$ 的渐近展开. 收敛级数与渐近级数的区别. 拉普拉斯积分渐近式 (主项). 斯特林公式.

第四学期

积分学 (多维的)

1. n 维区间上的黎曼积分. 积分存在的勒贝格准则.

2. n 维区间上实函数的积分存在的达布准则.

3. 集合上的积分. 集合上的若尔当测度及其几何意义. 可测集上积分存在的勒贝格准则. 积分的线性性和可加性.

4. 积分的估计.

5. 重积分化成累次积分: 富比尼定理及其重要推论.

6. 重积分的变量替换公式. 测度和积分的不变性.

7. 反常重积分: 基本定义, 收敛性的控制判别法, 典型积分. 欧拉 – 泊松积分的计算.

8. $\mathbb{R}^n$ 中的 k 维曲面和给定 k 维曲面的基本方法. 抽象 k 维流形.k 维流形的边界是 $(k-1)$ 维无边流形.

9. 可定向及不可定向流形. 给抽象流形定向的方法和 $\mathbb{R}^n$ 中的 (超) 曲面.

10. 流形在一点的切向量和切空间. 切向量解释作微分算子.

11. 区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 中的微分形式. 例子: 函数的微分, 功形式, 流量形式. 微分形式的坐标表示. 外微分运算.

12. 点的映射及在这些点上定义的函数的共轭映射. 在光滑映射下, 点的变换及在这些点处的切空间的向量的变换. 在光滑映射下, 函数及微分形式的转移. 在坐标形式下进行形式转移的做法.

13. 微分形式的转移与其外积运算和微分运算的交换. 流形上的微分形式. 微分形式运算的不变性 (合理性).

14. 功和通量的计算纲要.$k-$ 形式沿 k 维流形的积分. 定向的方法. 积分对参数化的独立性.$k-$ 微分形式沿 k 维定向流形的积分的一般定义.

15. 方体上的格林公式, 它的推导, 解释和用微分形式的积分的语言表述. 一般斯托克斯公式. 化简到 k 维区间情形并证明. 经典分析的积分公式是一般斯托克斯公式的具体推论.

16. $\mathbb{R}^n$ 中和曲面上的体积形式. 体积形式对定向的依赖性. 第一型积分及其对定向的独立性. 把面积和物质曲面的质量看作第一型积分.k 维曲面 $S^k \subset \mathbb{R}^n$ 的体积形式的局部参数表示, 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的超曲面 S^{n-1} 的体积形式在包含 S^{n-1} 的空间的笛卡儿坐标下的表示.

17. 场论中基本微分算子 $(\mathrm{grad}, \mathrm{rot}, \mathrm{div})$ 以及它们与欧氏定向空间中的外微分算子 d 的关系.

18. 场的功和通量的第一型积分写法. 把 $\mathbb{R}^3$ 中场论的基本积分公式看作经典分析基本公式的向量写法.

19. 势场和它的势. 恰当形式和闭形式. 形式的恰当性和向量场成为势场的必要性的微分判别法.1– 形式和向量场的恰当性的积分准则.

20. 斯托克斯 (高 – 奥) 公式的应用例子: 推导基本的连续介质力学方程. 梯度、旋度和散度的物理意义.

参考文献

I. 经典著作

1. 本源文献

Ньютон И.

a. Математические начала натуральной философии. (Перевод с латинскоговкн.: Крылов А. Н. Собрание трудов. Т. 7. — Л. – М.: Изд-во АН СССР, 1936, с. 57–662.)

b. Математические работы. — М. – Л.: ОНТИ, 1937.

Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений. *Успехи матем. наук*, 1948, т. 3, въш. 1. с. 165–205.

2. 重要的系统专著

Эйлер Л.

a. Введение в анализ бесконечных. В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1961

b. Дифференциальное исчисление. — М. – Л.: Гостехиздат, 1949.

c. Интегральное исчисление. В 3-х т. —М.: Гостехиздат, 1956–1958.

Коши О. Л.

a. Алгебраический анализ. — Лейпциг: Бэр и Хэрманн, 1864.

b. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб.: Имп. Акад. наук, 1831

3. 20世纪上半叶的经典分析教程

Валле-Пуссен Ш-Ж. Курс анализа бесконечно малых. В 2-х т. М. – Л.: ГТТИ, 1933.

Гурса Э. Курс математического анализа. В 2-х т. М. – Л.: ОНТИ, 1936.

II. 教科书[1]

Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 2000.

Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. В 2-х ч. Изд. 2-е, перераб. — М.: Изд-во Моск. ун-та. Ч. I, 1985. Ч. II, 1987.

Камынин Л. И. Курс математического анализа. В 2-х ч. — М.: Изд-во Моск. ун-та. Ч. I, 1993. Ч. II, 1995.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х т. — М.: Высшая школа. Т. I, II, 1988. Т. III, 1989.

Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2-х т. — М.: Наука, Физматлит, 1990.

III. 教学参考书

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, Физматлит, 1990.

Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. — М.: Наука, Физматлит, 1992.

[1] 俄罗斯 (包括前苏联) 国家有关部门推荐的大学数学、应用数学、力学、应用数学与信息科学专业教科书.

Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. В 2-х ч. —Новосибирск: Изд-во Инс-та матем. Ч. I, книги 1 и 2, 1999. Ч. II, книги 1 и 2, 2000, 2001.

Рудин У.Основы математического анализа. Изд. 2-е. — М.: Мир, 1976.

Шилов Г. Е.

a. Математический анализ. Функции одного переменного. — М.: Наука, Физматлит, 1969. Ч.1–2, 1969. Ч. 3, 1970.

b. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1–2. — М.: Наука, Физматлит, 1972.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Изд. 7-е, стереот. — М.: Наука, Физматлит, 1969.

IV. 辅助文献

Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. — М.: ГТТИ, 1938.

Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сб. статей. (Сборник фундаментальных работ математиков и физиков, связанных со становлением и развитием современного представления о пространстве, времени и материи. Издан к 100-летию со дня рождения А. Эйнштейна.) — М.: Мир, 1979.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М.: Наука, Физматлит, 1989.

Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. (В том числе статья《Архитектура математики》.) — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.

Вейль Г. Математическое мышление. — М.: Наука, Физматлит, 1989.

Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, Физматлит, 1971.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, Физматлит, 1986.

Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.

Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, Физматлит, 1962.

Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, Физматлит, 1967.

Зорич В. А. Анализ. (Записки лекций для студентов Математического колледжа НМУ и механико-математического факультета МГУ.) В 3-х вып. Вып. I. Лекции 5-7: Дифференциал. Вып. II. Лекция 8: Теорема о неявной функции. Вып. Ш. Лекции 9-11: Приложения теоремы о неявной функции. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1995.

Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.

Клейн Ф. Очерки о развитии математики в XIX столетии. — М.: Наука, Физматлит, 1989.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е, перераб. — М.: Наука, Физматлит, 1976.

Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, Физматлит, 1986.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 2-х т. — М.: Наука, Физматлит, 1970.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теорияполя. — М.: Наука, Физматлит, 1967.

Манин Ю. И. Математика и физика. — М.: Знание, 1979. — (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика, кибернетика; №012.)

Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965. — (Библиотека сборника 《Математика》.)

Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, Физматлит, 1990.

Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-х т. Изд. 3-е. — М.: Наука, Физматлит, 1978.

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, Физматлит, 1974.

Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, Физматлит, 1990.

Спивак М. Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. В 2-х ч. Изд. 2-е. — М.: Физматгиз, 1962–1963.

Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.
Т. I. Современная наука о природе; законы механики. — М.: Мир, 1965.
Т. 4. Кинетика, теплота, звук. — М.: Мир, 1965.
Т. 5. Электричество и магнетизм. — М.: Мир, 1966.
Т. 6. Электродинамика. — М.: Мир, 1966.
Т. 7. Физика сплошных сред. — М.: Мир, 1966.

Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Наука, Физматлит, 1963.

Шварц Л. Анализ. В 2-х т. — М.: Мир, 1972.

Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Том IV. — М.: Наука, 1967. (В том числе статьи 《Мотивы научного исследования》 (с.39–41)и 《Физика и реальность》 (с. 200–227).)

基本符号索引

逻辑符号

集合

空间

度量, 范数, 数量积

函数

微分运算

积分运算

微分形式

索　　引

补　序

得知我写的数学分析教科书译成了中文, 我感到非常高兴.

在序言中已经说明了该书的一般特点, 指出了其叙述的基本原则和目标. 这里, 在讨论可以想到的一些问题之前, 我想就如何在教学过程中使用这本书作一些实际的说明.

任何一本教科书, 通常都是学生用, 教师也用, 各有自己的目的. 大家都希望书中除正式规定的必需的最低限度的理论内容以外, 还有应用这些理论的丰富的例子、说明、历史评述和科学注释, 还应展示相互联系, 指出发展前景. 但是, 到期末准备考试时, 学生则希望看到所有要考的材料. 同样地, 为了备课, 教师则关注怎样挑选那些在课堂上应当讲授且能够讲授的材料.

考虑到这些问题, 应当指出, 这本教科书的内容明显多于讲稿的内容, 尽管教科书是在讲稿的基础上写成的. 区别在哪里呢? 首先, 对讲稿内容本身补充了一个完整的练习集, 它不仅有习题, 还有一些问题, 这些问题有的来源于自然科学, 有的来源于相应章节的数学理论本身, 有的是这些章节内容的重要推广. 第二, 书中所分析的展示理论作用的例子, 当然, 比课堂上更多. 最后, 第三点, 一些章节或个别段落是有意作为对课堂讲授内容所作的补充. 这些在第一卷序言的 “引言” 部分、“辅助材料” 部分以及第二卷序言中都说过. 我再次强调这个方面, 并把那里所说的东西具体化一些.

在全部与分析的形式化基础有关并在头两章详细罗列的导论材料中, 在课堂上通常只讲第一章 §3, 第二章 §1 的第 1、2 两部分, §2 的第 3 部分, 或许还能讲第 4 部分; 最后是 §3, 通常还要讲 §4. 这样一个篇幅不大且条理清楚的引论大约需要三讲. 倘若在课堂上逐字逐句地讲述课本中的全部引论材料, 而把分析本身的内容用

在一边, 将严重干扰课程的重点.

如果考虑头两章中所讲的整个内容, 可能除第八章 §6 的第 2、4、5 部分 (那里, 作为隐函数定理的应用讲了关于秩、关于微分同胚分解定理和 Morse 引理) 外, 第一卷的全部理论材料, 选用的证明和应用例子, 都是传统的和必需的.

第二卷用于第二年的学习, 显然其中有大量附加的、不完全被认为是经典的材料, 为了阅读方便, 这些材料都标了 * 号. 从科学内容方面看, 第二卷当然丰富多了. 在这里, 分析与数学的其他领域相互作用, 其思想和典型方法都以它们的现代水平为准. 顺便指出, 对它们的现代水平的这种关注, 第一卷内容叙述的原则, 就已经受到它的影响. 例如, 古典微分学是按现代水准叙述的, 为的是在往后边的部分 (多变量以及其后的部分) 过渡时不再出现新的微分运算法则, 法则与以前是一样的, 而是要充实过去的记号和与新的具体内容的关系.

关于第二卷材料的一些说明, 除了第十七章 §5 和第十九章 §2 这些部分可能是例外, 通常, 没有打 * 号的部分, 在做了这样那样的局部变动后, 都直接纳入课堂讲授. 如果听众有足够的数学训练, 常可代替第七章讲第九章. 这时, 第十章或者全讲、或者不讲其中的 §5、§6, 但需要予以补充并用第八章的经典材料举例说明. 对这样的听众, 可代替第十二章、第十三章讲第十五章, 而第十二、十三章的材料可作为一般理论的具体说明.

最后, 传统分析教程中的渐近展开, 比较而言, 譬如与收敛级数理论比较, 只占有非常平常的位置, 虽然在除了关心度量的绝对误差还关心相对误差时, 它们提供了一种应用中需要的方法. 无论如何, 渐近级数的初等知识 (第十九章 §1), 分出 Laplace 积分渐近主项的 Laplace 方法的思想以及有关应用实例 (见同一章 §2), 通常是要列入数学系和物理系分析课中的, 并在后继的复分析课中得到进一步发展 (鞍点法, 稳定相位法).

B. A. 卓里奇

莫斯科, 1989 年 5 月 1 日

中文版修订者的话

B. A. 卓里奇的《数学分析》俄文第 1 版 (1981) 是由邝荣雨, 蒋铎, 王昆扬, 钱珮玲和我译成中文的. 俄文原版分 I, II 卷, 中文译本将每一卷分成了两个分册, 高等教育出版社分别于 1987, 1989 和 1994 年出版了前三个分册. 第二卷第二分册因故未能出版. 俄文原著在 1998, 2001 和 2002 年分别出版了第 2、3、4 版. 据作者讲, 德国施普林格出版社已经出版英文版.

卓里奇这套分析教科书的特点在它的序言中已有详细介绍. 这里, 我想引用两位著名数学家, 前苏联科学院院士 A. H. 柯尔莫戈洛夫 (已于 1987 年谢世) 和俄罗斯科学院院士 B. И. 阿诺尔德, 对该书评语中的几段话, 或许能帮助我们更好地理解这套分析教科书的优点.

柯尔莫戈洛夫生前在对这套书的第 1 版的评论中说: 它把叙述的高度严谨性与可读性、充实的内容以及培养研究实际问题的习惯结合起来了.

阿诺尔德对这套书的称赞更具体, 他说: B. A. 卓里奇的教科书是现有供大学数学系、物理系学生用的分析教科书中最成功的. 它与传统分析教科书的重要区别在于, 它一方面更贴近自然科学 (特别是物理学和力学) 的应用, 另一方面, 它比常规的教科书更多地运用了现代数学 (包括代数学、几何学和拓扑学) 的思想和方法. 教程富于思想性, 它清楚地展示了在具体问题研究中现代数学的思想和方法的强大威力. 特别不寻常的是第二卷, 它包括向量分析, 流形上的微分形式理论, 广义函数论和位势理论的引论, 傅里叶级数和傅里叶变换以及渐近展开初步.

阿诺尔德如此称赞卓里奇的书, 与他反对日益加剧的教材专业化趋势有关. 他说: 当今, 像卓里奇这样编写教科书, 应看作是一个创新. 这在古尔沙时代曾经是平常的, 但是, 惹人注意的近半个世纪的教材专业化趋势阉割了分析教程, 留给它的几

乎只是一个个的论证. 现在看来, 重新使分析教程变成有丰富内容的, 显然, 是非常必要的, 这也与大多数大学生未来将从事应用性的工作有关.

两位数学大家的话引起了我们的思想共鸣. 我们从教学和科研工作中也意识到, 提高数学基础课教学质量就是使学生学到符合现代水准的、足够的数学理论, 并培养学生具有应用数学理论分析解决实际问题的习惯和能力. 卓里奇的两卷分析教科书以及他在莫斯科大学力学-数学系的教学实践的着力点也正在于此. 因此, 我们以为, 认真研究一下卓里奇怎样解决上述两方面问题, 必将得到许多有益的启示. 高等教育出版社重版卓里奇这套分析教程的确是件大好事.

去年二、三月高等教育出版社的张小萍老师找到我们, 商量根据卓里奇《数学分析》原著第 4 版修订中译本的问题. 当时, 在第 1 版译者中, 蒋铎先生已经谢世, 除我之外的其他三位同志都有不能脱身的工作. 张小萍老师希望我们来做这项工作, 我们也认为这确实也是一件有意义的事, 就这样, 我硬着头皮接受了这项任务.

卓里奇的《数学分析》第 4 版与其第 1 版比较, 虽然内容、结构、思想、风格依旧, 但具体改动却不少. 每卷末都增加了口试试题和考试大纲; 傅里叶级数和傅里叶变换这一章全部改写了; 对一些关键定理给出了新证明或改写了原来的证明; 充实了与自然科学有关的例子; 重新编排了部分习题, 并增加了一些新习题; 作了更加详细的索引; 许多段落中都有词句改动.

鉴于这种情况, 加之我们的第 1 版译本本身也有一些错误和译得不好的地方, 这次修订采用了以通读俄文原著第 4 版为基础, 逐字逐句对照, 进行修改、重译和补译的方法. 原版中的印刷错误和明显的笔误, 在译文中改正后未作标注. 有个别地方, 修订者认为有必要补充说明, 就写了译者注.

虽然我作了不少努力以减少错误, 但限于语言文字水平和自然科学知识水平, 难免还有不少改错译错之处, 希望有关专家、老师及所有读者不吝赐教, 批评指正.

我感谢邝荣雨、王昆扬、钱珮玲几位同事的信任和支持, 感谢高等教育出版社的张小萍老师在修订过程中对我的帮助以及她为该书顺利出版所做的各种努力. 我还要对书的作者 B. A. 卓里奇教授深深致谢, 1989 年他为第 1 版中译本写了补序. 为这次修订, 他向我们介绍了第 4 版与第 1 版比较所作的主要改动. 还应感谢对译稿加工的徐伯勋、文小西、杨芝馨和郭思旭几位先生, 他们认真细致的工作使修订稿避免了不少错误.

周美珂

2006 年 2 月于北京师范大学

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析　第二卷　（第四版）
作者＝Ｂ．Ａ．卓里奇著　蒋铎　钱佩玲　周美珂　邝荣雨译
页数＝５８５
ＳＳ号＝１１８２６１７０
出版日期＝２００６年１２月第１版